



# 目 录

基础篇 .....	( 1 )
第一讲 数列 .....	( 2 )
1.1 数列的概念与简单表示法 .....	( 2 )
1.2 数列的前 $n$ 项的和 .....	( 14 )
高考热点题型评析与探索 .....	( 24 )
本讲测试题 .....	( 28 )
第二讲 等差数列 .....	( 36 )
2.1 等差数列的基本概念 .....	( 36 )
2.2 等差数列的基本性质 .....	( 50 )
高考热点题型评析与探索 .....	( 65 )
本讲测试题 .....	( 72 )
第三讲 等比数列 .....	( 83 )
3.1 等比数列的基本概念 .....	( 83 )
3.2 等比数列的基本性质 .....	( 100 )
3.3 融等差数列与等比数列于一题的问题举例 .....	( 114 )
3.4 探究与发现:数列在分期付款中的应用 .....	( 130 )
高考热点题型评析与探索 .....	( 135 )
本讲测试题 .....	( 144 )
第四讲 数列的极限、数学归纳法简介 .....	( 154 )
4.1 数列的极限 .....	( 154 )
4.2 数学归纳法 .....	( 169 )
高考热点题型评析与探索 .....	( 186 )

# CONTENTS

---



综合应用篇.....	(195)
数列的理论应用 .....	(195)
一、等差数列的应用 .....	(195)
二、等比数列的应用 .....	(202)
三、数列与其他知识的组合问题 .....	(208)
数列的实际应用 .....	(211)
一、等差数列的应用 .....	(211)
二、等比数列的应用 .....	(214)
综合应用训练题 .....	(223)

# 基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简说研究“数”和“形”的学科.代数是它的侧重研究运算方法的分支.数列、数列的极限、数学归纳法是代数的三个节点.

数列是按一定次序排列的一列数.

从映射、函数的观点看,数列是一个序号集到另一个数的集合的映射  $f:A \rightarrow B$ .其中,  $A = \mathbf{N}^*$ , 或  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $B \subseteq \mathbf{R}$ . 因此,数列  $\{a_n\}$  可以看成是定义域为  $A$ 、值域为  $B$ 、对应法则为  $f$  的函数  $a_n = f(n)$  的一列函数值  $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots$ .

数列研究的主要问题是

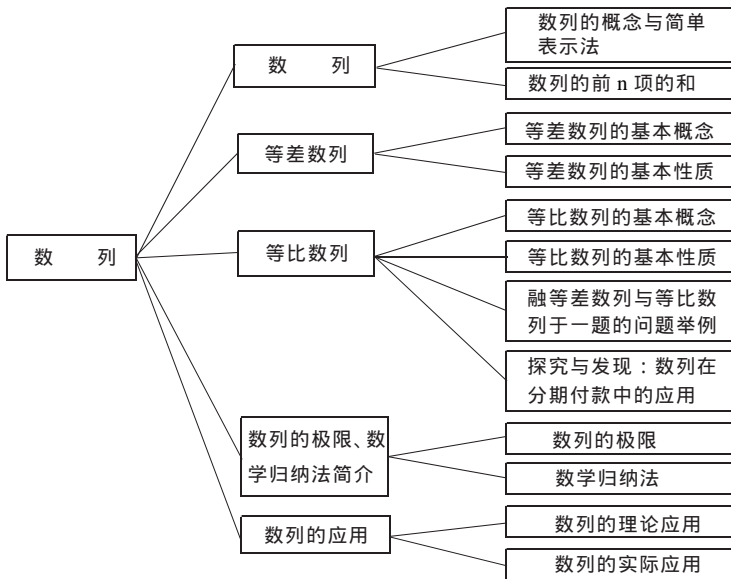
- (1) 根据已知条件, 求出通项公式  $a_n = f(n)$ ;
- (2) 通过通项公式  $a_n = f(n)$  研究数列的性质.

数列课题的知识载体是通项  $a_n$ 、前  $n$  项的和  $S_n$ ; 模型函数是等差数列、等比数列.

数列的极限, 其本质是研究无穷数列的变化趋势.

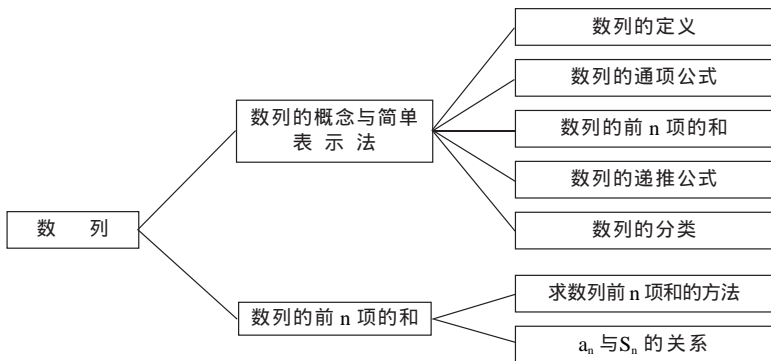
数学归纳法, 其本质是研究与正整数有关的命题的推理论证方法.

本书知识框图



# 第一讲 数列

本讲知识框图



## 学习指导

[考纲要求]

理解数列的概念;了解数列的通项公式的意义;了解递推公式是给出数列的一种方法,并能根据递推公式写出数列的前几项.

### 1.1 数列的概念与简单表示法

#### 重点难点归纳

**重点** ①数列的定义. ②数列的通项公式的定义.

**难点** 正确运用数列的递推公式求数列的通项公式.

**本节需掌握的知识点** ①数列的定义. ②数列的通项公式的定义.

#### 知识点精析与应用

#### 知识点精析

##### 1. 数列的定义

数列是按一定次序排列的一列数.



在函数意义下,数列是定义域为正整数集  $\mathbf{N}^*$  (或它的有限子集  $\{1, 2, \dots, n\}$ ) 的函数  $f(n)$  当自变量  $n$  从 1 开始依次取正整数时所对应的一系列函数值

$$f(1), f(2), \dots, f(n), \dots.$$

通常用  $a_n$  代替  $f(n)$ , 于是数列的一般形式为  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , 简记为  $\{a_n\}$ . 其中  $a_1, a_2, \dots, a_n$  依次叫做数列  $\{a_n\}$  的第 1 项, 第 2 项,  $\dots$ , 第  $n$  项,  $a_1$  也叫首项,  $a_n$  也叫通项. 对项数有限的数列而言, 最后一项一般称为末项.

## 2. 数列的通项公式

一个数列  $\{a_n\}$  的第  $n$  项  $a_n$  与项数  $n$  之间的函数关系, 如果可以用一个公式

$$a_n = f(n)$$

来表示, 我们就把这个公式叫做这个数列的通项公式.

如, 数列  $1, 4, 9, 16, \dots$  的通项公式为  $a_n = n^2$ .

正像不是所有的函数关系都能用解析式表示出来一样, 也不是每个数列都能写出它的通项公式. 如, 数列  $1, 2, 3, -1, 4, -2$  就没有通项公式.

有的数列, 虽然有通项公式, 但在形式上却不一定是唯一的. 如, 数列  $-1, 1, -1, 1, \dots$  的通项公式可写成  $a_n = (-1)^n$ , 也可写成  $a_n = \cos n\pi$ .

## 3. 数列的前 $n$ 项的和

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  叫做数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的和.

## 4. 数列的递推公式

如果已知数列  $\{a_n\}$  的第 1 项 (或前几项), 且任一项  $a_n$  与它的前一项  $a_{n-1}$  (或前几项) 间的关系可以用一个公式来表示, 那么这个公式就叫做这个数列的递推公式.

## 5. 数列的分类

### (1) 有穷数列、无穷数列

按照数列的项数是有限项还是无限项来分, 数列可划分为有穷数列、无穷数列. 如, 数列  $1, 2, \dots, 2\ 008$  和数列  $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$  分别是有穷数列和无穷数列.

### (2) 递增数列、递减数列

按照数列的项与项之间的大小关系“ $a_{n+1} > a_n$ , 或  $a_{n+1} < a_n$ ”来分, 数列可划分为递增数列、递减数列. 如, 数列  $1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}, \dots$  和数列  $2\ 008, 2\ 007, \dots, 1\ 949$  分别是递增数列和递减数列.

递增数列与递减数列统称为单调数列.

### (3) 有界数列、无界数列

按照数列的任何一项的绝对值是否都小于某一正数来分, 数列可划分为有界数列、无界数列. 如, 数列  $\{\sin 1\ 921n\}$  和数列  $\{n^{1\ 927}\}$  分别是有界数列和无界数列.

(4) 摆动数列

$a_{n+1} > a_n$  或  $a_{n+1} < a_n$  不确定. 如: 数列  $-2, 2, -2, 2, \dots$  是摆动数列.

(5) 常数数列

$a_{n+1} = a_n$ . 如: 数列  $2\ 010, 2\ 010, \dots, 2\ 010, \dots$  是常数数列.

**解题方法指导**

1. 用观察法求数列的通项公式

用观察法求数列的通项公式应从三个方面考虑:

(1) 掌握一些简单数列的通项公式, 见下表.

简单数列	通项公式
1, 1, 1, 1, ...	$a_n = 1$
1, 2, 3, 4, ...	$a_n = n$
2, 4, 6, 8, ...	$a_n = 2n$
1, 3, 5, 7, ...	$a_n = 2n - 1$
1, 2, 4, 8, ...	$a_n = 2^{n-1}$
2, 6, 12, 20, ...	$a_n = n(n+1)$
1, 4, 9, 16, ...	$a_n = n^2$
1, 8, 27, 64, ...	$a_n = n^3$
1, -1, 1, -1, ...	$a_n = (-1)^{n-1} = \cos(n-1)\pi$
-1, 1, -1, 1, ...	$a_n = (-1)^n = \cos n\pi$
1, -2, 3, -4, ...	$a_n = (-1)^{n+1}n$
0, 1, 0, 1, ...	$a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} = \left  \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \right $
1, 0, 1, 0, ...	$a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} = \left  \sin \frac{n\pi}{2} \right $
1, 11, 111, 1 111, ...	$a_n = \frac{10^n - 1}{9}$

(2) 正、负号的交错“+, -, +, -, ...”和“- , +, -, +, ...”, 分别用  $(-1)^{n+1}$  和  $(-1)^n$  来调解.

(3) 求形如  $\{a_n b_n\}$ 、 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  等形式的数列的通项公式, 先分别求出  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  的



通项公式,再组合为一体.

[例1] 求下列数列的一个通项公式:

(1)  $1, -1, 1, -1, \dots$ ;      (2)  $3, 5, 9, 17, 33, \dots$ ;

(3)  $\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 8, \frac{25}{2}, \dots$ ;      (4)  $1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{7}, 0, \dots$ .

分析 用观察法考察数列中的每一项与它的序号之间的对应关系,归纳各项数值的变化规律.

解 (1)  $a_n = (-1)^{n+1}$ .

(2)  $a_n = 1 + 2^n$ .

(3) 数列的项,有的是分数,有的是整数,可将数列的各项都统一成分数再观察.

在数列  $\frac{1}{2}, \frac{4}{2}, \frac{9}{2}, \frac{16}{2}, \frac{25}{2}, \dots$  中,分母为 2,分子为  $n^2$ ,

所以 
$$a_n = \frac{n^2}{2}.$$

(4) 把数列改写成  $\frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{0}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0}{6}, \frac{-1}{7}, \frac{0}{8}, \dots$ .

分母依次为  $1, 2, \dots$ , 而分子  $1, 0, -1, 0, \dots$  周期性地出现,

因此,我们可以用  $\sin \frac{n\pi}{2}$  来表示分子,

所以 
$$a_n = \frac{\sin \frac{n}{2}\pi}{n}.$$

## 2. 根据数列的递推公式求数列的通项公式

[例2] 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 1$ , 写出数列的前 6 项及  $\{a_n\}$  的通项公式.

分析 已知  $a_{n+1} = 2a_n + 1$  中,一般称为数列的递推公式.由数列的首项和递推公式可直接写出数列中的各项,通项公式可用累乘法来求.

解  $\because a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 1,$

$\therefore a_2 = 7, a_3 = 15, a_4 = 31, a_5 = 63, a_6 = 127.$

$a_{n+1} = 2a_n + 1$  变形为  $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ , 由此得下面  $n-1$  个式子

$$a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1),$$

$$a_{n-1} + 1 = 2(a_{n-2} + 1),$$

$$a_{n-2} + 1 = 2(a_{n-3} + 1),$$

.....

$$a_2 + 1 = 2(a_1 + 1).$$

将这  $n-1$  个等式相乘,得

$$a_n + 1 = 2^{n-1}(a_1 + 1).$$

又  $\because a_1 = 3,$

$\therefore$

$$a_n = 2^{n+1} - 1.$$

**点评** 已知递推公式求通项,可把每相邻两项的关系列出来,抓住它们的特点进行适当的处理.本题的处理办法是相乘(称为累乘法).有时也可相加或相减(称为叠加法).比如,本例调整一下系数就可用叠加法,即对递推公式  $a_{n+1} = 2a_n + 1$  可做如下调整:  $a_n = 2a_{n-1} + 1, 2a_{n-1} = 2^2 a_{n-2} + 2, 2^2 a_{n-2} = 2^3 a_{n-3} + 2^2, \dots, 2^{n-2} a_2 = 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2}$ . 将这  $n-1$  个等式相加,得  $a_n = 2^{n-1} \cdot 3 + (1 + 2 + \dots + 2^{n-2})$ . 本题还可用递归法,即将递推关系层层代入,比如,  $a_{n+1} = 2a_n + 1 \Rightarrow a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ , 所以  $a_n = 2a_{n-1} + 1$ , 所以  $a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1) = 2[2(a_{n-2} + 1)] = \dots = 2^{n-1}(a_1 + 1) = 2^{n+1}$ , 所以  $a_n = 2^{n+1} - 1$ .

**【例3】** 已知数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  中,  $a_1 = 1, b_1 = -1$ , 又  $a_{n+1} = 8a_n - 6b_n, b_{n+1} = 6a_n - 4b_n$ . 求  $a_n$  和  $b_n$ .

**分析** 本题没有直接给出两个数列的递推关系,但两个等式只要相减就可得到差数列的递推关系,即  $a_{n+1} - b_{n+1} = 2(a_n - b_n)$ , 因此用累乘法或递归法可求得差数列的通项  $a_n - b_n = 2^n$ , 代入第 1 个等式消去  $b_n$  得  $\{a_n\}$  的递推公式,再用叠加法可求得  $\{a_n\}$  的通项公式,然后代入差数列的通项公式即可得  $\{b_n\}$  的通项公式.

解 由  $\begin{cases} a_{n+1} = 8a_n - 6b_n, \\ b_{n+1} = 6a_n - 4b_n, \end{cases}$  得

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 2(a_n - b_n),$$

$$\therefore a_n - b_n = 2(a_{n-1} - b_{n-1}) = 2^2(a_{n-2} - b_{n-2}) = \dots = 2^{n-1}(a_1 - b_1) = 2^n,$$

即

$$a_n - b_n = 2^n. \quad \text{①}$$

把①代入  $a_{n+1} = 8a_n - 6b_n$ , 得

$$a_{n+1} = 2a_n + 6(a_n - b_n) = 2a_n + 6 \cdot 2^n.$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n + 6 \cdot 2^n,$$

$$2a_n = 2^2 a_{n-1} + 6 \cdot 2^n, \leftarrow$$

$$2^2 a_{n-1} = 2^3 a_{n-2} + 6 \cdot 2^n,$$

.....

$$2^{n-1} a_2 = 2^n \cdot a_1 + 6 \cdot 2^n.$$

把  $a_{n+1} = 2a_n + 6 \cdot 2^n$  中的  $n$  每次减少 1, 再把所得式子两边同时乘以 2, 就得到了这  $n-1$  个式子



以上各式相加并把  $a_1=1$  代入,得

$$a_{n+1}=2^n+6\cdot 2^n\cdot n=2^n(6n+1).$$

$$\therefore a_n=2^{n-1}[6(n-1)+1]=2^{n-1}(6n-5),$$

即

$$a_n=2^{n-1}(6n-5).$$

把上式代入①,得

$$b_n=2^{n-1}(6n-7).$$

**[例4]** 已知数列  $\{a_n\}: 3, 5, 7, \dots, 2n+1, \dots$ , 作另一数列  $\{b_n\}$ , 使  $b_1=a_1$ , 当  $n \geq 2$  时,  $b_n=a_{b_{n-1}}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的第4项、第5项和通项.

**分析** 数列  $\{a_n\}$  是已知数列, 通项公式为  $a_n=2n+1$ ,  $\{b_n\}$  与  $\{a_n\}$  的关系是  $b_n = \begin{cases} a_1 & (n=1), \\ a_{b_{n-1}} & (n \geq 2). \end{cases}$  结合在一起, 得  $b_1=a_1$ ,  $b_{n+1}=2b_n+1$ , 即  $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$ , 所以数列  $\{b_n+1\}$  的通项可求.

**解**  $b_2=a_3=7$ ,

$$b_3=a_{b_2}=a_7=2\cdot 7+1=15,$$

$$b_4=a_{b_3}=a_{15}=31,$$

$$b_5=a_{b_4}=a_{31}=63,$$

$$\therefore b_n=a_{b_{n-1}}=2b_{n-1}+1,$$

$$\therefore n \geq 2 \text{ 时, } b_n+1=2(b_{n-1}+1)=2^2(b_{n-2}+1)=\dots=2^{n-1}(b_1+1)=2^{n+1},$$

$$\therefore b_n=2^{n+1}-1 \text{ (经检验, } n=1 \text{ 也适合)}.$$

$$\textcircled{1} a_n=2n+1 \Rightarrow a_1=b_1=3.$$

$\textcircled{2}$  依  $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$ , 将  $n=1, 2, \dots, n-1$  逐个代入

### 3. 根据数列前 $n$ 项和公式求数列的通项公式

**[例5]** 数列  $\{a_n\}$  中,  $S_n=n^2+n-2$ , 求  $a_n$ .

**分析** 已知数列的前  $n$  项和的公式, 求通项  $a_n$ , 可直接利用通项与和的关系

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1), \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2). \end{cases}$$

**解** 当  $n=1$  时,  $a_1=S_1=1+1-2=0$ .

当  $n \geq 2$  时, 有

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n-2)-[(n-1)^2+(n-1)-2]=2n.$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 0 & (n=1), \\ 2n & (n \geq 2). \end{cases}$$

$a_1$  符合  $a_n=2n$  的表达式, 通项公式可以统一写, 如果  $a_1$  不符合表达式, 通项公式必须分段表示

#### 4. 根据数列的通项公式求数列的某些项

**[例 6]** 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \begin{cases} n & (n=2k-1, k \in \mathbf{N}^*) \\ n+1 & (n=2k, k \in \mathbf{N}^*) \end{cases}$ ,

- (1) 写出这个数列的奇数项的前 3 项;  
 (2) 写出这个数列的前 3 项.

**分析** 可以直接按项数的奇偶性求所求的项,另一种方法是将通项公式整理成  $a_n = n + \frac{1+(-1)^n}{2}$ .

**解** (1)  $a_1 = 1, a_3 = 3, a_5 = 5$ .

(2)  $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3$ .

**点评** 通项公式可以分段表达也可统一表达,如:  $a_n = \begin{cases} f(n) & (n \text{ 为奇数}) \\ g(n) & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$ ,

也可合并写成  $a_n = \frac{1}{2}[f(n) + g(n)] + \frac{(-1)^{n+1}}{2} \times [f(n) - g(n)] (n \in \mathbf{N}^*)$ .

#### 5. 数列中的探索性问题

**[例 7]** 数列  $\{a_n\}$  的通项公式是  $a_n = (n+1) \times 0.9^n$ , 问是否存在这样的正整数  $N$ , 使得对于任意的正整数  $n$ , 都有  $a_n \leq a_N$  成立, 证明你的结论.

**分析** 本题属于探索性问题中的存在性问题,这类问题的解题思路是:先假定所需探索的对象存在或结论成立,以此为前提进行推理和运算.若推出矛盾,则否定结论,否则要给出肯定的证明.本题提出的问题是判断数列  $\{a_n\}$  中是否存在最大的项,所以需要研究数列中各项间的大小关系及其变化情况.因此,只要判断  $\{a_n\}$  的增减性即可.

**解** 由  $a_n = (n+1) \times 0.9^n$ , 得

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} (n+2) - \left(\frac{9}{10}\right)^n (n+1) = \frac{9^n}{10^{n+1}} (8-n).$$

$\therefore$   $n < 8$  时,  $a_{n+1} > a_n$ ;  $n > 8$  时,  $a_{n+1} < a_n$ ; 且  $a_8 = a_9$ .

$\therefore$   $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_8 = a_9 > a_{10} > a_{11} > \dots$ .

判断数列的增减性与判断函数的增减性方法相同,即考查  $a_{n+1} - a_n$  的符号,正号具有递增性,负号具有递减性

$\therefore$  存在正整数  $N=8$  或  $9$ , 使  $a_n \leq a_N$  成立.



## 基础训练题

### 一、选择题

1. 在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1=1$ , 当  $n \geq 2$  时,  $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = n^2$ , 则  $a_3 + a_5$  等于 ( )

- A.  $\frac{61}{16}$                       B.  $\frac{25}{9}$                       C.  $\frac{25}{16}$                       D.  $\frac{31}{15}$

2. 如果数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的和  $S_n = \frac{3}{2}a_n - 3$ , 那么这个数列的通项公式是

- ( )
- A.  $a_n = 2(n^2 + n + 1)$                       B.  $a_n = 3 \cdot 2^n$   
 C.  $a_n = 3n + 1$                       D.  $a_n = 2 \cdot 3^n$

3. 若数列  $\{a_n\}$  的通项公式是  $a_n = n^2 - 2n + 2008$ , 则  $a_{n+1} - a_n =$  ( )

- A.  $2n - 2$                       B.  $2n - 1$                       C.  $2n$                       D.  $2n + 1$

4. 如果数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \frac{2}{n^2 + n}$ , 那么  $\frac{1}{10}$  是它的 ( )

- A. 第 4 项                      B. 第 5 项                      C. 第 6 项                      D. 第 7 项

### 二、填空题

5. 数列  $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \dots$  的一个通项公式是 \_\_\_\_\_.

6. 若数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的和为  $S_n = \frac{2n-1}{n}$ , 则  $a_8 =$  \_\_\_\_\_.

7. 若数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的和为  $S_n = 2n^2 - 3n + 1$ , 则它的通项公式为 \_\_\_\_\_.

8. 在函数  $f(x) = \sqrt{x}$  中, 令  $x = 1, 2, 3, \dots$ , 可得一个数列, 则这个数列的前五项为 \_\_\_\_\_.

### 三、解答题

9. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的和  $S_n = 3n^2 - 2n$ , 求数列的通项公式.

10. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 4$ , 且  $a_n a_{n-1} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.

## 答案与提示

### 一、选择题

1. A (由  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = n^2$  可知,  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} = (n-1)^2$ ,

$$\therefore a_n = \frac{n^2}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1}} = \frac{n^2}{(n-1)^2}, \therefore a_3 = \frac{9}{4}, a_5 = \frac{25}{16}, \therefore a_3 + a_5 = \frac{61}{16}.)$$

2. D(当  $n=1$  时,  $a_1=S_1=6$ . 当  $n=2$  时,  $a_2=S_2-S_1, \therefore a_2=\left(\frac{3}{2}a_2-3\right)-a_1$ , 解得  $a_2=18$ . 将  $n=2$  代入四个选项中通项公式, 可否定 A、B、C.)
3. B(由  $a_n=n^2-2n+2$  008 知,  $a_{n+1}=(n+1)^2-3(n+1)+2$  008  $=n^2+2$  007,  $\therefore a_{n+1}-a_n=2n-1$ .)
4. A(若  $\frac{1}{10}$  是这个数列的某一项, 则必存在正整数  $n$ , 使得  $\frac{2}{n^2+n}=\frac{1}{10}$ , 即此方程有正整数解. 解此方程得  $n=4$  或  $n=-5$ (舍去), 所以  $\frac{1}{10}$  是这个数列的第 4 项.)

## 二、填空题

5.  $a_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$ .

6.  $a_8 = S_8 - S_7 = \frac{16-1}{8} - \frac{14-1}{7} = \frac{1}{56}$ .

7. 运用  $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$  来求.  $a_1 = S_1 = 2 - 3 + 1 = 0$ .  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1}$ ,  $\therefore a_n = 2n^2 - 3n + 1 - [2(n-1)^2 - 3(n-1) + 1] = 4n - 5$ ,  $\therefore a_n = \begin{cases} 0 & (n=1), \\ 4n-5 & (n \geq 2). \end{cases}$

8.  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}$ .

## 三、解答题

9. 当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 2n - [3(n-1)^2 - 2(n-1)]$ , 即  $n \geq 2$  时,  $a_n = 6n - 5$ . 又  $\because a_1 = S_1 = 1 = 6 - 5$ , 当  $n=1$  时,  $a_1$  符合  $a_n = 6n - 5$  的表达式, 所以  $a_n = 6n - 5 (n \in \mathbf{N}^*)$ .
10. 当  $n \geq 2$  时,  $a_n a_{n-1} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^2, \therefore a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ . 当  $n=1$  时,  $a_1=4$  也符合,  $\therefore n \geq 2$  时,  $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 (n \in \mathbf{N}^*)$ .

## 视野拓展

### 释疑解难

$a_n = f(n)$  与  $y = f(x)$  的相同点在哪儿? 不同点又在哪儿?

对数列  $\{a_n\}$  的研究, 一时一刻都离不开通项公式  $a_n = f(n)$ . 由于  $n \in \mathbf{N}^*$ , 所以仅仅通过  $a_n = f(n)$  去研究  $\{a_n\}$  的性质就必然存在一定的局限性. 如, 已知  $a_n = \left(n - \frac{7}{2}\right)^2 + 1, n \in \mathbf{N}^*$ , 问  $n$  取何值时,  $a_n$  最小? 此问题若回答为“当  $n = \frac{7}{2}$  时,



$a_n$  最小。”答案就是错误的,原因是  $\frac{7}{2} \notin \mathbf{N}^*$ , 因此,“ $n = \frac{7}{2}$ ”是不可能的. 设想建立  $a_n = \left(n - \frac{7}{2}\right)^2 + 1$  的对应函数  $y = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + 1, x \in \mathbf{R}$ , 这时我们可以肯定地说: 当  $x = \frac{7}{2}$  时,  $y$  最小! 于是, 我们可以更进一步地得到: 当  $n = 3$ , 或  $n = 4$  时,  $a_n$  最小. 诸如此类的例子, 举不胜举.

以上分析客观地反映了数列  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n = f(n)$  与函数  $y = f(x)$  的对应关系:

- (1) 定义域的关系:  $\{n | a_n = f(n), n \in \mathbf{N}^*\} \subseteq \{x | y = f(x), x \in \mathbf{R}\}$ ;
- (2) 值域的关系:  $\{a_n | a_n = f(n), n \in \mathbf{N}^*\} \subseteq \{y | y = f(x), x \in \mathbf{R}\}$ ;
- (3) 对应法则的关系: 相同, 都是  $f$ .

### 典型例题导析

【例 8】给出下列数列的通项公式,  $n$  取何值时,  $a_n$  最小?

$$(1) a_n = \left(n - \frac{9}{2}\right)^2 + 1; (2) a_n = \left(n - \frac{10}{3}\right)^2 + 1; (3) a_n = (n - 11)^2 + 1.$$

分析 通过建立  $a_n = f(n)$  的对应函数  $y = f(x)$  解答本题. 读者请注意: 这三道题代表三个类型, 尤其要注意“ $\frac{9}{2}$  夹在 4 与 5 的正中间,  $\frac{10}{3}$  夹在 3 与  $3\frac{1}{2}$  之间, 11 本身就是正整数”对答案的影响.

解 (1) 设  $a_n = \left(n - \frac{9}{2}\right)^2 + 1$  的对应函数为  $y = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + 1$ , 则

当  $x = \frac{9}{2}$  时,  $y$  最小.  $\frac{9}{2}$  在 4 与 5 的正中间, 所以有两个  $n$  使  $a_n$  最小

如图 1-1(A), 当  $n = 4$ , 或  $n = 5$  时,  $a_n$  最小.

(2) 设  $a_n = \left(n - \frac{10}{3}\right)^2 + 1$  的对应函数为  $y = \left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + 1$ , 则

当  $x = \frac{10}{3}$  时,  $y$  最小. 在所有的正整数中, 3 距  $\frac{10}{3}$  最近, 这时  $n$  唯一

如图 1-1(B), 当  $n = 3$  时,  $a_n$  最小.

(3) 由已知  $a_n = (n - 11)^2 + 1$ , 得

当  $n = 11$  时,  $a_n$  最小.

因为  $n$  可以直接取到正整数, 所以没有必要设  $a_n$  的对应函数

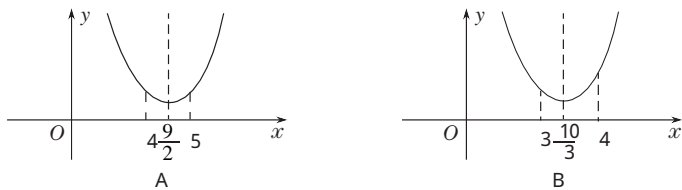


图 1-1

## 2. 累乘法、叠加法、递归(迭代)法概述

由数列  $\{a_n\}$  的递推公式  $a_n = f(a_{n-1})$  可以写出  $n-1$  个式子:

$$a_n = f(a_{n-1}),$$

$$a_{n-1} = f(a_{n-2}),$$

.....

这  $n-1$  个式子相乘,或相加以后,其结果形式上都比较简单、明了

$$a_3 = f(a_2),$$

$$a_2 = f(a_1).$$

通过这  $n-1$  个式子“相乘,相加,或层层代入”去求数列的通项公式的方法,依次称为累乘法、叠加法、递归(迭代)法.

读者了解累乘法、叠加法、递归法以后,若回头再读一遍例 2,可能另有一番品味.

## 思维拓展训练题

1. 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = -2n + 2\ 009$ , 这个数列的前多少项的和最大?

2. 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2n - 2\ 008$ , 这个数列的前多少项的和最小?

3. 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \frac{1}{2^{n^2 - 2\ 001n + 2\ 002}}$ , 这个数列的哪一项最大,其值是多少?

4. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_{n+1} = 2^n a_n$ , 且  $a_1 = 1$ , 求  $a_n$ .

5. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_2 = \frac{2}{3}, \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{2}{a_n} (n=2, 3, \dots)$ , 求  $a_n$ .

6. 在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 0$ , 且  $a_n = \frac{1}{4}(a_{n-1} + 3) (n=2, 3, \dots)$ , 求  $a_n$ .

7. 设  $a_1 = 1, b_1 = 0$ , 且  $3a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}, 3b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} (n \geq 2)$ , 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式.

8. 在数列  $\{a_n\}$  中, 设  $a_1 = 1$ ,  $x$  的二次方程  $a_{n+1}x^2 - (2a_{n+1} + a_n + 2)x + 2a_n +$



4=0有重根,求 $a_n$ .

9. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$ ,前 $n$ 项的和为 $S_n$ ,且 $a_n=2S_{n-1}+2n-1(n\geq 2)$ ,求 $a_n$ .

10. 数列 $\{a_n\}$ 由“ $a_1=1, 4a_n a_{n+1}=(a_n+a_{n+1}-1)^2, a_n>a_{n-1}$ ”定义,求 $a_n$ .

### 答案与提示

1. 设 $a_n=-2n+2\ 009$ 的对应函数为 $y=-2x+2\ 009$ ,则①一次函数 $y=-2x+2\ 009$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数; ②令 $y=0$ ,得 $x=1\ 004.5$ .由①和②知,数列 $\{a_n\}$ 从第1 005项开始,各项的值都是负数,所以它的前1 004项的和最大.

2. 设 $a_n=2n-2\ 008$ 的对应函数为 $y=2x-2\ 008$ .则 $y=2x-2\ 008$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,且 $y=0$ 时, $x=1\ 004$ .所以数列 $\{a_n\}$ 的前1 003项,或前1 004项的和最小.

3. 设 $a_n=\frac{1}{2^{n^2-2\ 001n+2\ 002}}$ 的对应函数为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t, t=x^2-2\ 001x+2\ 002$ ,则①当 $x=-\frac{-2\ 001}{2\times 1}=1\ 000.5$ 时,二次函数 $t=x^2-2\ 001x+2\ 002$ 有最小值;② $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数.由①和②知,当 $x=1\ 000.5$ 时, $y$ 最大.于是,当 $n=1\ 000$ ,或 $n=1\ 001$ 时, $a_n$ 最大,且 $a_n$ 的最大值为 $a_{1\ 000}=a_{1\ 001}=2^{998\ 998}$ .

4. 由 $a_{n+1}=2^n a_n, a_1=1$ ,得 $\frac{a_2}{a_1}=2, \frac{a_3}{a_2}=2^2, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}$ .将 $n-1$ 个式子相乘,得 $\frac{a_n}{a_1}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}, \therefore a_1=1, \therefore a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

5. 由 $a_1=1, a_2=\frac{2}{3}, \frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{2}{a_n}$ ,得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}=\dots=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}. \therefore a_n=\frac{2}{n+1}$ .

6.  $\therefore a_n=\frac{1}{4}(a_{n-1}+3), \therefore a_{n-1}=\frac{1}{4}(a_{n-2}+3)$ ,两式相减,得 $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{4}(a_{n-1}-a_{n-2})$ ,用累乘法得 $a_n-a_{n-1}=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}(n\geq 2)$ ,再由叠加法,得 $a_n=1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, a_n=1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$ .经验证, $n=1$ 也满足通项公式.

7. 已知两式相加,得 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}, \therefore \{a_n+b_n\}$ 的通项为 $a_n+b_n=1$ .同理 $a_n-b_n=\frac{1}{3}(a_{n-1}-b_{n-1}), \{a_n-b_n\}$ 的通项为 $a_n-b_n=\frac{1}{3^{n-1}}$ .解方程组,得 $a_n=\frac{3^{n-1}+1}{2\cdot 3^{n-1}}, b_n=\frac{3^{n-1}-1}{2\cdot 3^{n-1}}$ .经验证, $n=1$ 也满足通项公式.

8. 分解因式得 $(x-2)[a_{n+1}x-(a_n+2)]=0, \therefore a_{n+1}\neq 0, \therefore x=2$ 或 $x=\frac{a_n+2}{a_{n+1}}, \therefore$ 方程

有重根,  $\therefore 2 = \frac{a_n + 2}{a_{n+1}}$ , 整理得  $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$ , 用累乘法:  $a_n - 2 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 2)$ ,

$a_{n-1} - 2 = \frac{1}{2}(a_{n-2} - 2), \dots, a_2 - 2 = \frac{1}{2}(a_1 - 2)$ , 将  $n-1$  个式子相乘, 得

$$a_n - 2 = \frac{1}{2^{n-1}}(a_1 - 2). \therefore a_1 = 1, \therefore a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*).$$

9.  $n \geq 2$  时, 由  $a_n = S_n - S_{n-1}$  和已知条件得  $S_n - S_{n-1} = 2S_{n-1} + 2n - 1$ , 即  $S_n = 3S_{n-1} + 2n - 1$ , 两边相加  $n+1$  得  $S_n + n + 1 = 3(S_{n-1} + n)$ , 取  $n = 2, 3, \dots, n$ , 相乘得  $S_n + n + 1 = 3^n$ . 即  $S_n = 3^n - n - 1$ , 于是  $a_n = S_n - S_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ . (经验证,  $n=1$  时也满足通项)

10. 由递推公式得  $a_{n+1}^2 - 2(a_n + 1)a_{n+1} + (a_n - 1)^2 = 0 \dots \textcircled{1}$ , 用  $n-1$  代替下标:  $a_n^2 - 2(a_n + 1)a_{n-1} + (a_n - 1)^2 = 0 \dots \textcircled{2}$ . 由  $\textcircled{1}$  和  $\textcircled{2}$ , 知  $a_{n+1}$  和  $a_{n-1}$  是方程  $x^2 - 2(a_n + 1)x + (a_n - 1)^2 = 0$  的两根, 由韦达定理, 得  $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n + 2 \dots \textcircled{3}$ . 由  $\textcircled{3}$  式得  $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} + 2$ ,  $\therefore \{a_{n+1} - a_n\}$  的通项可用累加法求得  $a_{n+1} - a_n = 2n + 1$ , 再由叠加法, 得  $a_n = n^2$ .

## 1.2 数列的前 $n$ 项的和

### 重点难点归纳

**重点** ①数列的前  $n$  项的和与通项公式的关系. ②数列的前  $n$  项的和的求法.

**难点** 对用递推关系给出的数列的讨论.

本节需掌握的知识点 ①数列的前  $n$  项的和与通项公式的关系. ②领悟求数列的前  $n$  项的和的方法本质, 掌握方法的一般规律.

### 知识点精析与应用

#### 知识点精析

数列课题的知识载体是通项公式  $a_n$ 、前  $n$  项的和  $S_n$ , 可以说  $a_n$ 、 $S_n$  贯穿于数列研究的全过程. 因此, 全面地、系统地探讨  $a_n$ 、 $S_n$  的求解方法显得格外重要.

1.1 节我们讨论了  $a_n$  的求解方法, 本节介绍  $S_n$  的求解方法.

#### 1. 求数列的前 $n$ 项的和的方法

##### (1) 倒序相加法

即根据有些数列的特点, 将  $S_n$  倒写后再与  $S_n$  相加, 从而达到(化多为少)求



和的目的.

### (2) 错位相减法

即将数列中的各项乘以一个适当的数(或式),然后错开一位相减,使数列中的一些项相互抵消或形成规律,最后得出数列的前  $n$  项的和.

### (3) 裂项相消法

即将数列中的各项均分裂成两项的差,而后和式中的一些项相互抵消(多数情况下只剩下首末两项),以达到求和的目的.此种方法的实施多从数列的通项公式的裂项入手.

## 2. $a_n$ 与 $S_n$ 的关系

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1), \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2). \end{cases} \quad \leftarrow \text{联系 } a_n \text{ 与 } S_n \text{ 的“桥梁”}$$

应用  $a_n$  与  $S_n$  的这种关系求  $a_n$ , 步骤有三: ① 计算  $a_1, a_1 = S_1$ ; ② 计算  $a_n = S_n - S_{n-1} (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$ ; ③ 检验  $a_1 = S_1$  是否适合  $a_n = S_n - S_{n-1} (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$ ?

是,  $a_n = S_n - S_{n-1}$ ; 否,  $a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1), \\ S_n - S_{n-1} & (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2). \end{cases}$

## 解题方法指导

### 1. 运用倒序相加法求 $S_n$

[例 1] 记  $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ , 求  $S_n$ .

分析 由正整数列的特点不难发现下面的规律:

$$1 + n = 2 + (n-1) = 3 + (n-2) = 4 + (n-3) = \cdots$$

$$\text{解 } S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n, \quad \leftarrow \text{正序}$$

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1, \quad \leftarrow \text{倒序}$$

两式相加,得

$$S_n + S_n = (1+n) + [2+(n-1)] + [3+(n-2)] + \cdots + [(n-1)+2] + (n+1).$$

$$\therefore 2S_n = n \cdot (1+n), \quad \leftarrow \text{“正序+倒序”,即倒序相加法}$$

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

### 2. 运用错位相减法求 $S_n$

[例 2] 求  $S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n$ .