

目录

龙门新教案

高中数学 (1) B 版

第一章

集 合

第一节	集合与集合的表示方法	1
第一讲	集合的概念	1
第二讲	集合的表示方法 (一)	5
第三讲	集合的表示方法 (二)	9
第二节	集合之间的关系与运算	12
第一讲	集合之间的关系 (一)	12
第二讲	集合之间的关系 (二)	16
第三讲	集合的运算 (一)	20
第四讲	集合的运算 (二)	24
第三节	单元小结与复习	28
第四节	创新能力综合测试	31

第二章

函 数

第一节	函数	33
第一讲	变量与函数的概念	33
第二讲	映射与函数	37
第三讲	函数的表示方法	41
第四讲	函数的单调性 (一)	45
第五讲	函数的单调性 (二)	49
第六讲	函数的奇偶性	53
第二节	一次函数和二次函数	58
第一讲	一次函数的性质与图象	58
第二讲	二次函数的性质与图象 (一)	62
第三讲	二次函数的性质与图象 (二)	66
第四讲	待定系数法	70
第三节	函数的应用 (I)	74
第四节	函数与方程	78
第一讲	函数的零点	78
第二讲	求函数零点近似解的一种计算方法——二分法	82
第五节	单元小结与复习	85
第六节	创新能力综合测试	89

第三章

基本初等函数 (I)

第一节	指数与指数函数	91
第一讲	有理指数幂及其运算 (一)	91
第二讲	有理指数幂及其运算 (二)	94

第三讲	指数函数 (一)	98
第四讲	指数函数 (二)	103
第二节	对数与对数函数	108
第一讲	对数及其运算 (一)	108
第二讲	对数及其运算 (二)	112
第三讲	对数函数 (一)	116
第四讲	对数函数 (二)	120
第五讲	指数函数与对数函数的关系 (一)	124
第六讲	指数函数与对数函数的关系 (二)	128
第三节	幂函数	133
第一讲	幂函数 (一)	133
第二讲	幂函数 (二)	138
第四节	函数的应用 (II)	143
第五节	单元小结与复习	148
第六节	创新能力综合测试	152

附赠 参考答案提示与点拨

第一章 集 合



第一节 集合与集合的表示方法

第一讲 集合的概念



问题探知

学校举办了一次运动会,某班有8名同学参加了田径比赛,有12名同学参加了球类比赛,那么这次运动会这个班共有多少名同学参加了这两项比赛?如果回答有20名,对不对?为什么?如果不对,在怎样的情况下,结果才是20名?

描述、解决上述问题,就涉及我们将要学习的集合知识.“集合”一词与我们日常熟悉的“整体”“一类”“一群”等词语意义相近.例如,“数学书的全体”“地球上人的全体”“所有文具的全体”等都可分别看成一些“对象”的集合.



教材全解

重点1

一般地,把一些能够确定的不同的对象看成一个整体,就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合(或集).

集合中的每个对象叫做这个集合的元素.如果 a 是集合中的一个元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$.



在线课堂

(1) 集合的概念

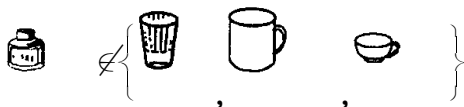
“一般地,把一些能够确定的不同的对象看成一个整体,就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合(或集)”.这句话是对集合概念的描述性说明.所以集合是没有给出严格定义的数学概念.

(2) 集合与元素的表示

集合中的每个对象叫做这个集合的元素.例如“中国的直辖市”这一集合的元素是北京、上海、天津、重庆.

集合中的元素常用英语小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A ,记作 $a \in A$;否则,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$.

例如, $4 \in \{\text{整数}\}$;再如:



例1] 考查下列每组对象能否构成一个集合:

- ①所有的好人;②不超过20的非负数;③我班16岁以下的学生;④直角坐标系中横坐标与纵坐标相等的点;⑤我班高个子同学;⑥充分接近 $\sqrt{3}$ 的实数.



思路导引

某些对象能否构成集合,关键要看这些对象是否被确定.集合中的元素具有确定性,对于集合 A 和某一对象 a ,有一个明确的判断标准是 $a \in A$ 还是 $a \notin A$,二者必居其一,不会模棱两可.

解:(1)“所有的好人”无明确的标准,对于某个人是否是“好人”无法客观地判断,因此①不能构成集合;类似地⑤⑥也不能构成集合.

(2)任给一个实数 x ,可以明确地判断是不是“不超过20的非负数”,即“ $0 \leq x \leq 20$ ”与“ $x > 20$ 或 $x < 0$ ”,两者必居其一,且仅居其一,故“不超过20的非负数”能构成集合.类似地③④也能构成集合.所以能构成集合的有②③④;不能构成集合的有①⑤⑥.



方法规律

充分理解集合的概念,在判断过程中注意集合中元素的确定性.

随堂练习

1. 下列各组对象:

- ①所有的数学难题;②比较小的正整数全体;③平面上到点 O 的距离等于1的点的全体;④正三角形的全体;⑤ $\sqrt{2}$ 的近似值的全体.

其中能构成集合的组数是

()

A.2组

B.3组

C.4组

D.5组

重点2 集合的特征

对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的、互异的、无序的.这称作集合元素的三个特征.



在线课堂

要正确认识集合中元素的特性:

(1) 确定性: $a \in A$ 和 $a \notin A$,二者必居其一.

集合中的元素必须是确定的.这就是说,给定一个集合,任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了.例如,给出集

合地球上的四大洋,它的元素是太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋.其他对象都不用于这个集合.

(2) 互异性 这就是说,集合中的元素是不能重复的,集合中相同的元素只能算是一个.例如方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个重根 $x_1 = x_2 = 1$,其解集只能记为 $\{1\}$,而不能记为 $\{1, 1\}$.

(3) 无序性 集合中的元素是不分顺序的.集合和点的坐标是不同的概念,在平面直角坐标系中,点 $(1, 0)$ 和点 $(0, 1)$ 表示不同的两个点,而集合 $\{1, 0\}$ 和 $\{0, 1\}$ 表示同一个集合.

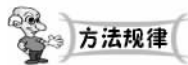
例 2] 已知集合 $M = \{a, b, c\}$ 中的三个元素可构成某一三角形的三边长,那么此三角形一定不是 ()

- A. 直角三角形 B. 锐角三角形
C. 钝角三角形 D. 等腰三角形



解这道题应从集合元素的三大特征入手考虑,应侧重考虑集合中元素的_____性.由于 a, b, c 三个元素不相同,故由它们组成的三角形一定不是等腰三角形.

解 选 D.



在求解有关集合中元素的问题时,应从集合中元素的三大特征入手考虑,其中互异性至关重要,要引起重视.

随堂练习

2. 求集合 $\{1, x, x^2 - x\}$ 中元素 x 所满足的条件.

3. 已知集合 $A = \{a + 2, (a + 1)^2, a^2 + 3a + 3\}$, 若 $1 \in A$, 求实数 a 的值.

重点 3 常用数集的记法

$N = \{\text{非负整数}\} = \{\text{自然数}\}$ $N^* = N_+ = \{\text{正整数}\}$;
 $Z = \{\text{整数}\}$ $Q = \{\text{有理数}\}$ $R = \{\text{实数}\}$.



以后学习中,经常用到常用数集的符号,同学们必须牢记:

常用数集	简称	记法
全体非负整数的集合	非负整数集 (或自然数集)	N
非负整数集内排除 0 的集合	正整数集	N^* 或 N_+
全体整数的集合	整数集	Z
全体有理数的集合	有理数集	Q
全体实数的集合	实数集	R

按照概念外延的大小,可以将 N^*, N, Q, Z, R 按某种次序填入图 1-1-1 中.

注意:(1) 自然数集与非负整数集是相同的,也就是说,自然数集包括数 0,即 $0 \in N$ 但 $0 \notin N^*$.



(2) 非负整数集内排除 0 的集,表示成 N^* 或 N_+ , Q, R, Z 等其他数集内排除 0 的集,也是这样表示.如整数集内排除 0 的集,记作“ Z^* ”.

图 1-1-1

例 3] 用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空:

- (1) $0 \underline{\hspace{1cm}} Q, 0 \underline{\hspace{1cm}} N, 0 \underline{\hspace{1cm}} N_+, 0 \underline{\hspace{1cm}} Z,$
 $0 \underline{\hspace{1cm}} R;$
(2) $-2 \underline{\hspace{1cm}} N^*, -2 \underline{\hspace{1cm}} Z, -2 \underline{\hspace{1cm}} R,$
 $-2 \underline{\hspace{1cm}} Q;$
(3) $\sqrt{3} \underline{\hspace{1cm}} N_+, \sqrt{3} \underline{\hspace{1cm}} R, \sqrt{3} \underline{\hspace{1cm}} Q, \sqrt{3} \underline{\hspace{1cm}} Z.$



由图 1-1-1 可知,若 $a \in N^*$,则 $a \in N, a \in Z, a \in Q, a \in R$;
若 $b \in N$,则 $b \in Z, b \in Q, b \in R$ 若 $c \in Z$,则 $c \in Q, c \in R$;……

解:(1) $\in, \in, \in, \in$; (2) $\notin, \in, \in, \in$; (3) $\notin, \in, \notin, \in$.



弄清并区分常用数集 N^*, N, Z, Q, R 是解决本题的关键.

随堂练习

4. 用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空:

- $1 \underline{\hspace{1cm}} N, 0 \underline{\hspace{1cm}} N, -3 \underline{\hspace{1cm}} N, 0.5 \underline{\hspace{1cm}} N, \sqrt{2} \underline{\hspace{1cm}} N;$
 $1 \underline{\hspace{1cm}} Z, 0 \underline{\hspace{1cm}} Z, -3 \underline{\hspace{1cm}} Z, 0.5 \underline{\hspace{1cm}} Z, \sqrt{2} \underline{\hspace{1cm}} Z;$
 $1 \underline{\hspace{1cm}} Q, 0 \underline{\hspace{1cm}} Q, -3 \underline{\hspace{1cm}} Q, 0.5 \underline{\hspace{1cm}} Q, \sqrt{2} \underline{\hspace{1cm}} Q;$
 $1 \underline{\hspace{1cm}} R, 0 \underline{\hspace{1cm}} R, -3 \underline{\hspace{1cm}} R, 0.5 \underline{\hspace{1cm}} R, \sqrt{2} \underline{\hspace{1cm}} R.$

重点 4 集合的分类

集合按其元素个数可分为有限集、无限集、空集.



一般地,含有有限个元素的集合叫有限集.含有无限个元素的集合叫无限集.不含任何元素的集合叫空集.例如 $A = \{x | x^2 - 1 = 0\}$ 是有限集, $B = \{x | x^2 - 1 > 0\}$ 是无限集, $C = \{x \in R | x^2 + 1 = 0\}$ 是空集.空集记作 $\emptyset$.

例 4] 集合 A 满足 若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$.

证明:(1) 若 $2 \in A$, 则集合 A 中还有另外两个元素;

(2) 若 $a \in R$, 则集合 A 不可能是单元素集.



反复利用题设,若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$, 注意角色转换, 单元素集是指集合中有且只有一个元素.

$$\begin{aligned} \text{证明: (1)} & \because 2 \in A, \therefore \frac{1}{1-2} = -1 \in A \\ & \because -1 \in A, \therefore \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A \\ & \because \frac{1}{2} \in A, \therefore \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in A \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} A \text{ 中还有 } -1, \\ \frac{1}{2} \text{ 两个元素.} \end{array}$$

(2) 假设 A 是单元素集, 则必有 $a = \frac{1}{1-a}$, 即 $a^2 - a + 1 = 0$,
 $\therefore \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$, 方程没有实数解, 故假设不成立, $\therefore A$ 不可能是单元素集.



对于一个否定性命题, 用直接法不易证明时, 可采用反证法.

随堂练习

5. 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}$.

- (1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值, 并求出这个元素;
- (2) 若 A 中至少有一个元素, 求 a 的取值范围.



研讨应用

- 例 5] (1) 集合 $\{1, 1\}$ 与集合 $\{1\}$ 表示同一集合吗?
 (2) 集合 $\{1, 2\}$ 与集合 $\{x=1, y=2\}$ 呢?
 (3) 若 $\{x, x^2\}$ 与 $\{1, x\}$ 表示同一集合, 则 x 取何值?
 (4) $\emptyset$ 与集合 $\{1\}$ 表示同一集合吗?

下面是四个同学的说法, 请判断正误.

甲生:

(1) 集合 $\{1, 1\}$ 与集合 $\{1\}$ 表示同一集合.

乙生:

(2) 集合 $\{1, 2\}$ 与集合 $\{x=1, y=2\}$ 表示同一集合.

丙生:

(3) 若 $\{x, x^2\}$ 与 $\{1, x\}$ 表示同一集合, 则 $x=0$ 或 1 .

丁生:

(4) $\emptyset$ 与集合 $\{1\}$ 表示同一集合.

师评:

四个同学的说法都是错误的.

甲同学忽视了集合中元素的互异性, 即集合中的元素是互不相同的, 没有 $\{1, 1\}$ 这种说法.

乙同学没有区分两个集合的不同点, $\{1, 2\}$ 是由数 $1, 2$ 组成的集合, $\{x=1, y=2\}$ 的元素却是两个式子“ $x=1$ ”与“ $y=2$ ”.

丙同学忽视了集合中元素的互异性: $x=0$ 时, $x=x^2$; $x=1$ 时, $x=x^2$, 但由 $x \neq x^2$ 知 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$. 正确的思考方法应是:

$$\therefore \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 1, \\ \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow x \neq 1, \\ \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow x = 1 \text{ 或 } x = -1, \end{cases}$$

$$\therefore x = \underline{\hspace{2cm}}.$$

丁同学将空集理解错了. 空集是不含任何元素的集合, 而集合 $\{0\}$ 是含有一个元素“ 0 ”的集合, 因此集合 $\{0\}$ 并不表示空集.

随堂练习

6. 含有三个实数的集合既可表示为 $\{a, \frac{b}{a}, 1\}$, 也可表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$, 求 $a^{2004} + b^{2005}$ 的值.

要点记忆

1. 易混淆点 要注意空集的特殊性, 它是一个不含任何元素的集合, 另外 $\emptyset$ 不能写成 $\{ \}$ 或 $\{0\}$ 或 $\{ \emptyset \}$ 或 0 .
2. 易忽略点 “ $\in$ ” 符号表示元素与集合间的从属关系.
3. 解题技巧与规律 对集合概念的考查要注意抓住集合元素的三大特征, 即确定性、互异性、无序性.



【问题探究】 不一定对, 因为可能有些同学既参加了田径比赛, 又参加了球类比赛, 只有在所有参赛的同学只参加了一项比赛的情况下, 才是 20 名

例 2] 互异

研讨应用

$$\begin{cases} x \neq x^2, \\ 1 \neq x, \\ x^2 = 1, \end{cases} \quad x = -1$$



[基础演练]

8. 设集合 A 为所有大于 $6 + \sqrt{3}$ 且小于 10 的实数组成则：
- (1) A 是有限集还是无限集？
- (2) $3 + \sqrt{17}$ 是不是集合 A 中的元素？ $5\sqrt{3}$ 呢？

9. 设 A 表示集合 $\{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, B 表示集合 $\{a + 3, 2\}$.
已知 $5 \in A$, 且 $5 \notin B$, 求 a 的值.

10. 求出满足例 4 的题设条件的集合 A , 并指出它的元素的特点, 如果 A 恰有 3 个元素.

自我评价



第一节 集合与集合的表示方法

第二讲 集合的表示方法(一)



问题探知

观察下面三个集合:① $\{x|y=x^2+1\}$; ② $\{y|y=x^2+1\}$; ③ $\{(x,y)|y=x^2+1\}$. 它们所表示的意义相同吗?为什么?
这三个集合都涉及函数 $y=x^2+1$, 而要具体回答上面的问题, 就必须搞清楚集合的表示方法.



教材全解

重点1 集合的表示方法一

列举法 是把集合中的元素一一列举出来, 写在大括号“ $\{ \}$ ”内表示这个集合的方法.



在线课堂

(1) 用列举法表示集合时, 只需将集合中的元素一一列举出来并用大括号括起来即可. 例如, 由方程 $x^2-1=0$ 的所有解组成的集合, 可以表示为 $\{-1, 1\}$.

(2) 用列举法表示集合时, 一般不必考虑元素之间的顺序. 但在表示有些特殊集合时, 通常仍按惯用的次序写出它的元素. 例如, 由所有大于0且小于10的奇数组成的集合, 可以表示为 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, 如无特殊需要, 一般很少写成 $\{7, 5, 1, 3, 9\}$ 或其他形式. 当一个集合有许多元素或无限多个元素时, 如果通过列举该集合中的一部分元素, 可以提供某种规律, 使我们能由此规律明显地、正确地找出其余元素, 那么就可用省略号代表其余的元素. 例如, 所有的正偶数组成的无限集可记作 $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

(3) 列举法有直观、明白的特点, 但有些集合是不能用列举法表示出来的. 例如“不等式 $x-3>2$ 的解集”, 就不能把它的元素一一列举出来或列举出有足够代表性且反映出规律的元素.

例1 用列举法表示下列集合:

(1) 方程 $x^2+x-1=0$ 的解集 A ;

(2) 方程组 $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 的解集 B .



思路导引

先将方程或方程组的解求出, 再用大括号括起来即可, 但要注意 (2) 的表示方法.

解: (1) 方程 $x^2+x-1=0$ 的根为 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$,

$\therefore$ 集合 $A=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

(2) 由 $\begin{cases} 2x+y=0, \\ x-y+3=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=2, \end{cases} \therefore B=\{(-1, 2)\}$.



警示误区

要注意用列举法表示方程特别是方程组的解集, 方程组的解是一对或几对有序实数对 (x, y) , 按习惯 x 在前, y 在后, 因而上述 (2) 中集合 B 不能写成 $\{2, -1\}$.

随堂练习

1. 用列举法表示下列集合:

(1) 函数 $y=x^2-1, x<5, x\in\mathbb{N}$ 的自变量取值集合 A ;

(2) 函数 $y=x^2-1, x<5, x\in\mathbb{N}$ 的函数值集合 B ;

(3) 抛物线 $y=x^2-1, x<5, x\in\mathbb{N}$ 上的点集 C .

重点2 集合表示方法之二

特征性质描述法 把集合中元素所具有的特征性质描述出来, 写在大括号内表示集合的方法.



在线课堂

(1) **特征性质** 如果在集合 I 中, 属于集合 A 的任意一个元素 x 都具有性质 $p(x)$, 而不属于集合 A 的元素都不具有性质 $p(x)$, 则性质 $p(x)$ 叫做集合 A 的一个特征性质.

(2) **特征性质描述法** 的一般形式: $A=\{x\in I|p(x)\}$. 它表示集合 A 是由集合 I 中具有性质 $p(x)$ 的所有元素构成的. 大括号内竖线左边的“ x ”为元素, 右边“ $p(x)$ ”为元素 x 必须满足的特征性质, 当且仅当“ x ”满足特征性质“ $p(x)$ ”时, x 才是集合 A 中的元素. 如方程 $x^2-1=0$ 的解集可表示为 $A=\{x\in\mathbb{R}|x^2-1=0\}$.

(3) 集合的表示方法以特征性质描述法为主, 它具有抽象概括、普遍性的特点. 在不致发生误解时, x 的取值集合可以省略不写. 如上述集合 A 可写为 $\{x|x^2-1=0\}$.

例2 下列集合是用什么方法表示的? 试用另一种方法表示它们:

(1) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$;

(2) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \frac{9}{32}, \frac{11}{64}\right\}$;

(3) 绝对值不大于3的整数;

(4) $\{x\in\mathbb{Z}|\ 2x+1)(x+1)(x-2)(x^2+1)=0\}$;

(5) $\left\{x\left|y=\frac{6}{2-x}, x\in\mathbb{N}^*, y\in\mathbb{Z}\right.\right\}$.



思路导引

集合的表示方法主要有列举法和特征性质描述法两种,重要的是在不同的场合选用合适的表示方法.表示一个集合可以认为是下述互逆过程中的同一个过程:

列举法 $\xrightarrow{\text{根据对元素规律观察,概括出特征性质}} \text{特征性质描述法}$
 $\xrightarrow{\text{根据元素满足的条件,求出具体元素}}$

据此可分别求解.

解:(1)是列举法,还可表示为{____的正因数}(特征性质描述法);

(2)是列举法,还可表示为 $\{x|x=____, n \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } n \leq 6\}$ (特征性质描述法);

(3)是特征性质描述法,还可表示为 $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ (列举法);

(4)是特征性质描述法,还可表示为 $\{-1, 2\}$ (列举法);

(5)是特征性质描述法,因为 $\frac{6}{2-x} \in \mathbb{Z}$,所以 $2-x$ 可以取 $\pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1$,注意到 $x \in \mathbb{N}^*$,故得 $x \in \{1, 3, 4, 5, 8\}$ (列举法).



方法规律

列举法表示集合有直观、一目了然的优点,但有些集合不能用列举法表示.如“小于1的所有正数的集合”,就不能把它的元素一一列举出来或列举出有代表性、且能反映规律的元素,而用描述法则相当简明: $\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$.究竟用哪种方法表示,要依具体问题而定.

随堂练习

2. 用特征性质描述法表示下列集合:

(1) 方程组 $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$ 的解集;

(2) 方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的解集;

(3) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(4) 坐标平面上坐标轴上的点集;

(5) 坐标平面上第二象限内点的集合.

3. 集合 $\{(x, y) | x + y = 6, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$ 用列举法可表示为_____.

重点3 集合的表示方法之三
图示法(又称维恩图法).

在线课堂

(1) 图示法 为了形象地表示集合,我们常用平面内一个封闭曲线的内部表示一个集合.这个区域通常叫做维恩(Venn)图,例如用图示

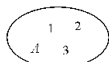


图 1-1-2

法表示集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 为如图 1-1-2 所示.

(2) 列举法和图示法可以看清集合中的元素,特征性质描述法可以看清集合中元素所满足的特征性质.

例3 用图示法表示下列集合以及他们之间的关系:

$A = \text{四边形}, B = \text{平行四边形}, C = \text{梯形}, D = \text{菱形}, E = \text{正方形}, F = \text{矩形}.$



思路导引

根据平面几何图形的定义来判断,然后用图示法来表示.

解 用图示法表示,如图 1-1-3 所示.

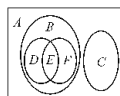


图 1-1-3



方法规律

用图示法表示集合的优点在于形象直观,它特别适用于解决与抽象的集合(即集合由哪些元素所组成,元素具有怎样的特征性质不明确)有关的问题.缺点在于集合的元素具有怎样的特征性质不明显.

随堂练习

4. 用图示法表示下列集合以及它们之间的关系:

$A = \text{四边形}, B = \text{梯形}, C = \text{等腰梯形}, D = \text{直角梯形}, E = \text{平行四边形}.$

例4 设 $M = \{a + b\sqrt{2} | |a^2 - 2b^2| = 1, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$, 已知 $x \in M, y \in M$. 问 xy 是不是 M 中的元素?



思路导引

只需判断 xy 是否符合 M 的元素的属性.

解 $\because x \in M, y \in M,$

$\therefore$ 可设 $x = a + b\sqrt{2}, y = c + d\sqrt{2},$

且 $|a^2 - 2b^2| = 1, |c^2 - 2d^2| = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$

$\therefore xy = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + \sqrt{2}(bc + ad)$

其中, $ac + 2bd \in \mathbb{Z}, bc + ad \in \mathbb{Z},$ 且

$\therefore xy \in M.$



体验探究

运用推理方法研究集合中的元素的构成.

例5] 以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质:

① P 中的元素有正数,有负数;

② P 中的元素有奇数,有偶数;

③ $-1 \notin P$;

④ 若 $x, y \in P$, 则 $x + y \in P$.

对于集合 P , 下列结论正确的一个是 ()

A. $0 \in P, 1 \in P$

B. $0 \notin P, 1 \in P$

C. $0 \in P, 1 \notin P$

D. $0 \notin P, 1 \notin P$



思路导引

本题是判断元素与集合的关系,应根据定义及性质设法判断元素 0 和 1 是否满足集合 P 的属性.

由题设性质①可知,集合 P 一定存在最小正整数和最大负整数,不妨设最小正整数为 a ,最大负整数为 b . 那么必有 $b < a + b < a$. 由性质④可知 $a + b \in P$,而 $a + b$ 比最小正整数小且比最大负整数大,所以 $a + b$ 既不是正数,也不是负数,因此 $a + b = 0$,故 $0 \in P$. 这样便可排除掉 B、D. 正确结论可能是 A 或 C,只要判断 1 与 P 的关系即可.

1 与 P 的关系直接判断比较困难,可考虑反证法,假设 $1 \in P$,则 1 就是 P 中的最小正整数, $\therefore a = 1$,则 $a + b = 0$,可知 $-1 \in P$,这与题设中的 $-1 \notin P$ 相矛盾, $\therefore 1 \notin P$,故正确结论为 C.



探究总结

本题所给的集合 P 是抽象的,要想判断元素 0、1 与 P 的关系,只能依据题设性质. 在运用性质时要求能合理地设,巧妙地推理分析,当从正面不易突破时,可采取反证的方法,对于抽象的问题可通过合理引入有关的数或量,使问题具体化,从而达到化难为易的目的.

随堂练习

5. 当正整数的集合 A 满足:“若 $x \in A$, 则 $10 - x \in A$ ”时,则:

(1) 试写出只有一个元素的集合 A ;

(2) 试写出只有两个元素的集合 A ;

(3) 这样的集合 A 至多有多少个元素?

要点记忆

1. 易错点: (1) 要注意方程、方程组的解集与曲线上的点集的表示方法. 如方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解集不要表示为 $\{x|1 \text{ 或 } 3\}$ 等; 又如点集 $\{(1, 2)\}$ 不要写成 $\{1, 2\}$ 或 $\{2, 1\}$ 或 $\{1, 2\}$ 或 $\{x = 1, y = 2\}$ 等错误的表示方法.

(2) 整数集表示为 $\{\text{全体整数}\}$ 、实数集表示为 $\{\text{实数}\}$ 等表示方法都是错误的. 因为大括号就含有“所有”的意思.

2. 易混淆点: 用特征性质描述法表示集合, 关键要看清代表元素, 弄清集合的构成. 例如集合: ① $\{x | y = x^2 + 1\}$; ② $\{y | y = x^2 + 1\}$; ③ $\{(x, y) | y = x^2 + 1\}$ 它们所表示的意义不相同, 这里判断的关键就是看代表元素.

3. 解题技巧与规律:

列举法 $\xrightarrow{\text{根据对元素规律的观察, 概括出特征性质}} \xrightarrow{\text{根据元素满足的条件, 写出具体的元素}} \text{特征}$

性质描述法

集合的表示方法主要有列举法和特征性质描述法两种, 重要的是在不同的场合选用合适的表示方法.



心得笔记

【问题探知】不相同. 集合 (1) 是函数 $y = x^2 + 1$ 的自变量 x 所有允许值组成的集合, 因为 x 可以取任意实数, 所以 $\{x | y = x^2 + 1\} = \mathbb{R}$; (2) 是函数 $y = x^2 + 1$ 的所有函数值 y 组成的集合, 由二次函数的图象知 $y \geq 1$, 所以 $\{y | y = x^2 + 1\} = \{y | y \geq 1\}$; 集合 (3) 是函数 $y = x^2 + 1$ 图象上所有点的坐标组成的集合

例2] (1) 24 (2) $x = \frac{2n-1}{2^n}$

例4] $|(ac + 2bd)^2 - 2(bc + ad)^2| = |(a^2 - 2b^2) \cdot (c^2 - 2d^2)| = 1 \in$



课后作业

班级 _____ 姓名 _____ 分数 _____

[基础演练]

1. 方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 的解集是 ()
- A. $\{x=0, y=1\}$ B. $\{0, 1\}$
 C. $\{0, 1\}$ D. $\{(x, y) \mid x=0 \text{ 或 } y=1\}$

2. 有以下四种说法：

- ① $M = \{1, 2\}$ 与 $N = \{2, 1\}$ 表示同一个集合；
 ② $M = \{1, 2\}$ 与 $N = \{2, 1\}$ 表示同一个集合；
 ③ $M = \{y \mid y = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$ 与 $N = \{t \mid t = (x+1)^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$ 表示同一个集合；
 ④ 空集是惟一的。

其中正确的个数有

- A. 3 个 B. 2 个 C. 1 个 D. 0 个

3. 集合 $M = \{(x, y) \mid xy \geq 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ 的意义是 ()

- A. 第一象限的点
 B. 第三象限的点
 C. 第一和第三象限的点
 D. 不在第二象限也不在第四象限的点

4. 已知平面内的点 $M(1, 2), N(0, 3)$, 集合 $A = \{(x, y) \mid 2x - y = 0\}, B = \{(x, y) \mid x + 2y = 5\}, C = \{(x, y) \mid 2x + 3y = 9\}$, 那么 M, N 与 A, B, C 的关系是 ()

- A. $M \in A, N \in B$ B. $M \in B, N \in A$
 C. $M \in C, N \in C$ D. $M \in B, N \notin B$

5. 用 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

- (1) 若 $A = \{x \mid x^2 = x\}$, 则 -1 _____ A ;
 (2) 若 $B = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$, 则 3 _____ B ;
 (3) 若 $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 10\}$, 则 8 _____ C ;
 (4) 若 $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 3\}$, 则 1.5 _____ D .

6. 下列四个方程

- ① $4x^2 + 9y^2 - 4x + 12y + 5 = 0$; ② $6x^2 + x - 2 = 0$;
 ③ $(2x-1)^2 (3x+2)^2 = 0$; ④ $6x^2 - x - 2 = 0$ 中,

 实数解的集合为 $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$ 的个数为 _____ 个.

[综合测试]

7. 用适当的方法把下面的集合表示出来：

- (1) 方程 $x = |x|, x \in \mathbb{Z}$ 且 $x < 5$ 的解集 A ;
 (2) $x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}$ (a, b 为非零实数) 的所有 x 取值集合 B ;
 (3) 使 $y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$ 有意义的实数 x 的集合 C ;
 (4) 被 5 除余 1 的正整数集合 D ;
 (5) 分子、分母分别由 1, 2, 3 三个数字组成的所有真分数的集合 E .

8. 已知集合 $A = \{x, xy, xy-1\}$, 其中 $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$. 若 $0 \in A$, 求 A 及 A 中元素之和.

[探究升级]

9. 设 a, b 为整数, 把形如 $a + b\sqrt{5}$ 的一切数构成的集合记作 M , 即 $M = \{a + b\sqrt{5} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$. 设 $x \in M, y \in M$, 试判断 $x+y, x-y, xy, \frac{x}{y}$ 是否属于 M .

自我评价



第一节 集合与集合的表示方法

第三讲 集合的表示方法(二)



问题探知

已知集合 $A = \{x | x^2 + 2(a-1)x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 求一次函数 $y = 2x - 1, x \in A$ 的 y 的取值范围.

根据题意应先求出集合 A , 但集合 A 是怎样的一个集合呢? 如何求出这个集合? 这就需要将集合语言进行合理的转化.



教材全解

重点 数学语言各种形态之间的互译与转化
集合语言、几何语言、自然语言.



在线课堂

一切用以反映数量关系和空间形式的语言都是数学语言, 如自然语言(包括口头的、文字的的日常用语)、几何语言、集合语言. 同一数学研究对象, 往往可用不同的语言形态表达.

数学语言的不同形态各有自己的特点. 几何语言易给人清晰的视觉形象, 它能直观地表达概念、定理的本质以及相互间的关系, 在抽象的数学思维中起着具体化和帮助理解的作用; 自然语言比较生动、自然, 它能将问题所研究的对象的含义更加明白地叙述出来, 教科书上的概念、定理等多以自然语言叙述. 集合语言是用集合的有关概念和符号来叙述问题的语言, 集合语言比较简洁、严谨, 可大大缩短语言表达的“长度”, 有利于推理、计算. 集合语言与其他语言的关系以及它的构成如图 1-1-4:

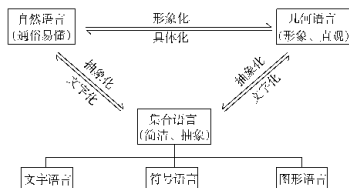


图 1-1-4

将集合的三种语言之间进行相互转化, 或将集合语言转化为自然语言、几何语言, 有助于弄清集合是由哪些元素所构成的, 有助于提高分析和解决问题的能力, 但在转化的过程中应注意求解的完备性(不缩小范围)和纯粹性(不扩大范围).

例 1 已知集合 $A = \{x | x \text{ 是小于 } 6 \text{ 的正整数}\}$, $B = \{x | x \text{ 是小于 } 10 \text{ 的质数}\}$, $C = \{x | x \text{ 是 } 24 \text{ 和 } 36 \text{ 的公约数}\}$, 用列举法表示下列集合:

$$(1) M = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in C\};$$

$$(2) N = \{x | x \in B, \text{ 且 } x \notin C\}.$$



思路导引

M 中的元素有什么属性呢? 由题意知, M 中元素既是 A 中元素又是 C 中元素. 同样地可知, N 中元素是 B 中元素但不是 C 中元素.

解 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

$$(1) \because x \in A, \text{ 且 } x \in C, \therefore x = 1, 2, 3, 4,$$

$$\therefore M = \{1, 2, 3, 4\}.$$

$$(2) \because x \in B, \text{ 且 } x \notin C, \therefore x = 5, 7,$$

$$\therefore N = \{5, 7\}.$$



方法规律

注意学会符号语言和普通语言的互译.

例 2 用描述法表示图 1-1-5 中阴影部分(含边界)点的坐标的集合.

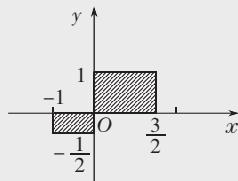


图 1-1-5



思路导引

本题是用图形语言给出的, 要求把图形语言转换为符号语言.

解 由描述法表示为 (即用符号语言表示):



方法规律

首先注意代表元素的表示形式, 然后仔细分析代表元素满足的条件.

例 3 已知集合 $A = \left\{a \left| \frac{x+a}{x^2-2} = 1 \right. \right\}$ 中方程 $\frac{x+a}{x^2-2} = 1$ 有惟一实数解, 用列举法表示集合 A .



思路导引

转译时要注意 $x^2 - 2 \neq 0$ 即 $|x| \neq \sqrt{2}$ 这一隐含条件. 由

$\frac{x+a}{x^2-2} = 1$ ① 可得方程 $x^2 - x - a - 2 = 0$, 于是可将 A 转译为混

合组 $\begin{cases} x^2 - x - a - 2 = 0 & ② \\ x^2 - 2 \neq 0 & ③ \end{cases}$ 在照顾到 $|x| \neq \sqrt{2}$ 的前提下讨论方程②有惟一实根时 a 的取值集合. 由于方程①为分式方程,

可能有增根,当方程②的两实根中有一个是方程①的增根
 $x = -\sqrt{2}$ 或 $x = \sqrt{2}$ 时,方程①也只有一个实根.

解 由方程 $\frac{x+a}{x^2-2} = 1$

可得方程 $x^2 - x - a - 2 = 0$

方程①只有惟一实根等价于混合组

$$(1) \begin{cases} x^2 - x - a - 2 = 0 \\ x^2 - 2 \neq 0 \end{cases}$$

只有惟一实根.

(1) 当②有等根时, $\Delta = (-1)^2 - 4(-a-2) = 0$, 解得 $a = -\frac{9}{4}$, 此时 $x = \frac{1}{2}$, 适合③;

(2) 当②有两个不等的实根时, 由 $\Delta > 0$ 可得 $a > -\frac{9}{4}$

当 $x = -\sqrt{2}$ 为①的增根时, 由②得 $a = \sqrt{2}$;

当 $x = \sqrt{2}$ 为①的增根时, 由②得 $a = -\sqrt{2}$.

$$\therefore \sqrt{2} > -\frac{9}{4}, -\sqrt{2} > -\frac{9}{4}.$$

$\therefore$ 由 (1)、(2) 得 $A = \left\{-\frac{9}{4}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$.



警示误区

集合语言转译成其他语言, 转译的准确性是解题的关键.

例 4] 已知集合 $A = \{x | ax^2 + x + 1 = 0, a \in \mathbb{R}\}$.

(1) 若 A 是空集, 求 a 的取值范围;

(2) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值;

(3) 若 A 中至多只有一个元素, 求 a 的取值范围.



思路导引

A 中至多只有一个元素, 包括两种情形: (1) $A = \emptyset$; (2) A 中只有一个元素. 另外讨论方程 $ax^2 + x + 1 = 0$ 的解时应分 $a = 0$ 与 $a \neq 0$ 两种情况来讨论.

解 集合 A 是方程 $ax^2 + x + 1 = 0$ 在实数范围内的解集.

(1) $A = \emptyset$, 说明方程 $ax^2 + x + 1 = 0$ 无解,

$$\text{即 } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 1 - 4a < 0 \end{cases} \Rightarrow a > \frac{1}{4};$$

(2) 当 $a = 0$ 时, 此时 $A = \{-1\}$ 符合题意;

当 $a \neq 0$ 时, 则当且仅当 $\Delta = 1 - 4a = 0$, 即 $a = \frac{1}{4}$.

$$\therefore a = 0 \text{ 或 } a = \frac{1}{4}$$

(3) A 中至多只有一个元素, 包括 $A = \emptyset$ 和 A 中只有一个元素两种情形. 由 (1)、(2) 可知 a 的取值范围为 $a \geq \frac{1}{4}$ 或 $a = 0$.



方法规律

运用分类讨论思想来解决集合问题时, 关键是如何根据题设确定分类讨论的依据, 使分类情况既不重复又不遗漏. 一般地, 对方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解的情况可作如下分类:

$$ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \begin{cases} \Delta > 0 \\ \Delta = 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$



综合延伸

例 5] 设集合 $A = \{a | a = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}^*\}$, 集合 $B = \{b | b = k^2 - 4k + 5, k \in \mathbb{N}^*\}$, 若 $a \in A$, 则 a 与 B 的关系是 ()

A. $a \in B$

B. $a \notin B$

C. $a \in B$ 或 $a \notin B$

D. 不能确定

解法 1 $\because a \in A$,

$$\begin{aligned} \therefore a &= n^2 + 1 = (n^2 + 4n + 4) - 4(n+2) + 5 \\ &= (n+2)^2 - 4(n+2) + 5. \end{aligned}$$

$\because n \in \mathbb{N}^*, \therefore n+2 \in \mathbb{N}^*, \therefore a \in B$.

解法 2 $\because A = \{2, 5, 10, 17, \dots\}, B = \{2, 1, 5, 10, 17, \dots\}$, 归纳后可得 $a \in B$.

随堂练习

1. 已知集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}, N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 若 $x_0 \in M$, 则 x_0 与 N 的关系是 ()

A. $x_0 \in N$

B. $x_0 \notin N$

C. $x_0 \in N$ 或 $x_0 \notin N$

D. 不能确定

要点记忆

1. 易忽略点: (1) 要确定好分类讨论的依据, 做到分类讨论不重复、不遗漏.

(2) 集合语言的转化要力求准确.

2. 解题技巧与规律: (1) 对于用集合语言叙述的问题, 求解时往往需要转译成一般的代数语言或几何语言.

(2) 集合问题中的分类讨论, 根据条件常常借助于方程和不等式的知识.



心得笔记

【问题探究】集合 A 表示使方程 $x^2 + 2(a-1)x + 1 = 0$ 在实数集内有解的 a 的取值范围. 由 $\Delta \geq 0$ 可得 $a \geq 2$ 或 $a \leq 0$, $\therefore A = \{a | a \geq 2 \text{ 或 } a \leq 0\}$, $\because x \in A$, $\therefore$ 由 $x \geq 2$ 或 $x \leq 0$ 可得 $y \geq 3$ 或 $y \leq -1$, 故 $y \in \{y | y \geq 3 \text{ 或 } y \leq -1\}$

例 2] $\{(x, y) | -1 \leq x \leq \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \leq y \leq 1, \text{ 且 } xy \geq 0\}$



[基础演练]

2. 下列命题：

A.0 ↑ B.1 ↑ C.2 ↑ D.3 ↑

- A.1 ↑ B.2 ↑ C.3 ↑ D.4 ↑

6. 集合 $\{x \mid x = \frac{a}{b}, a + b = 5, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N}^*\}$ 用列举法表示为 _____.

综合测试

- (2) 若 A 中至多有一个元素, 求实数 a 的取值范围.

自我评价



第二节 集合之间的关系与运算

第一讲 集合之间的关系 (一)



问题探知

写出集合 {农夫, 狼, 羊, 菜} 的所有子集, 由此设计一个方案: 农夫用船把狼、羊、菜从河的一岸送到另一岸, 农夫每次驾船只能运一种东西, 并且农夫不在场的情况下, 狼不能和羊在一起, 羊不能和菜在一起.

这里的“子集”指的是什么? 如何写出这个集合的子集?



教材全解

重点 1 子集的概念

如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素, 那么集合 A 叫做集合 B 的子集, 记作:

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A,$$

读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.



在线课堂

(1) 对子集概念的理解. “如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素, 那么集合 A 叫做集合 B 的子集.”即如果任一 $x \in A$, 可以推出 $x \in B$, 那么集合 A 就是集合 B 的子集. 例如 $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, 则 $A \subseteq B$.

(2) 子集的性质. 根据子集的定义可推知:

① $A \subseteq A$, 即任意一个集合 A 都是它本身的子集. 例如, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$.

② 对于集合 A, B, C , 如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$. 例如, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, 则 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.

③ 规定: 空集是任一集合的子集, 即对任意集合 A , 都有 $\emptyset \subseteq A$.

(3) 依照子集定义, 如果集合 P 中存在着不是集合 Q 的元素, 那么集合 P 不包含于 Q , 或 Q 不包含 P , 记作 $P \not\subseteq Q$, 或 $Q \not\supseteq P$. 例如, $Q = \{1, 3\}$, $P = \{1, 3, 4\}$, 显然有 $4 \notin Q$, 则 $P \not\subseteq Q$.

例 1 若集合 $A = \{1, 3, x\}$, $B = \{x^2, 1\}$ 且 $B \subseteq A$, 求满足条件的实数 x 的值.



思路导引

由于 $B \subseteq A$, A, B 都含有元素 1, 因此有两种情况可能, 但要注意检验.

解: $\because A = \{1, 3, x\}, B = \{x^2, 1\}, B \subseteq A, \therefore x^2 \in A$, 故可分两种情况:

(1) 若 $x^2 = 3$, 解得 $x = \pm\sqrt{3}$ 符合条件;

(2) 若 $x^2 = x$, 解得 $x = 0$ 或 $x = 1$, 经检验, 当 $x = 1$ 时集合中元素出现重复, 应舍去, 故 $x = 0$.

综上所述, 所求实数 x 的值为 $\pm\sqrt{3}$ 或 0.



警示误区

解决集合中元素的问题, 应注意检验, 结果不应与题设矛盾或与元素的互异性相斥.

例 2 已知集合 $A = \{x \mid |x - a| = 4\}$, 集合 $B = \{1, 2, b\}$.

(1) 是否存在实数 a 的值, 使得对于任意实数 b 都有 $A \subseteq B$? 若存在, 求出对应的 a ; 若不存在, 试说明理由;

(2) 若 $A \subseteq B$ 成立, 试求 a, b 之值.



思路导引

集合 A, B 均为有限集, 可以直接根据元素间的相互关系来判断或求出对应的实数 a, b , 同时要注意展开必要的讨论.

解: (1) 假设满足条件的实数 a 存在, 由于对任意实数 b 都有 $A \subseteq B$, 则 1 $\in A$ 且 2 $\in A$.

$$\therefore A = \{a - 4, a + 4\},$$

$$\therefore \begin{cases} a - 4 = 1, \\ a + 4 = 2, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a - 4 = 2, \\ a + 4 = 1, \end{cases} \text{ 这都不可能,}$$

$\therefore$ 这样的实数 a 不存在.

(2) 由 (1) 易知欲 $A \subseteq B$, 当且仅当

$$\begin{cases} a - 4 = 1, \\ a + 4 = b, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a - 4 = 2, \\ a + 4 = b, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a - 4 = b, \\ a + 4 = 1, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a - 4 = b, \\ a + 4 = 2. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 5, \\ b = 9, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 6, \\ b = 10, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -3, \\ b = -7, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -2, \\ b = -6. \end{cases}$$



方法规律

要注意探索性问题的解法. 对探索性问题, 可先假设存在, 然后推理和计算, 看所得结果是否与题设或所学过的定理、公理等相符合, 最后下结论.

随堂练习

1. 设集合 $A = \{1, 3, a\}$, $B = \{1, a^2 - a + 1\}$, 且 $B \subseteq A$, 求 a 的值.

2. 已知 $A = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$, $B = \{x \mid 4x + a < 0\}$, 当 $B \subseteq A$ 时, 求实数 a 的取值范围.

重点 2 真子集概念

如果集合 A 是集合 B 的子集, 并且 B 中至少有一个元素不属于 A , 那么集合 A 叫做集合 B 的真子集, 记作:

$$A \subsetneq B \text{ 或 } B \supsetneq A,$$

读作“ A 真包含于 B ”, 或“ B 真包含 A ”.



在线课堂

(1) 对真子集概念的理解. $A \subsetneq B$ 要求满足两个条件 ① $A \subseteq B$;

② 至少存在一个元素 $x \in B$, 但 $x \notin A$.

(2) $A \subsetneq B$ 的图形表示 如图 1-2-1.

(3) 真子集的性质.

图 1-2-1

① 对于集合 A, B, C , 如果 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$;

② 空集是任何非空集合的真子集. 即 $A \neq \emptyset$ 时, 有 $\emptyset \subsetneq A$.

例 3] 已知 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}, B = \{x | ax = 1\}$, 若 $B \subsetneq A$, 求实数 a 的值构成的集合 M .



思路导引

由 $A = \{-1, 3\}$ 及 $B \subsetneq A$ 可知, B 集合可能的情形有: $\emptyset, \{-1\}, \{3\}$, 然后逐个求解.

解 $\because A = \{-1, 3\}, B \subsetneq A$, 于是分以下几种情况:

(1) 当 $B = \emptyset$ 时, 则方程 $ax = 1$ 无解, $\therefore a = 0$;

(2) 当 $B = \{-1\}$ 时, 则 $a \times (-1) = 1, \therefore a = -1$;

(3) 当 $B = \{3\}$ 时, 则 $a \times 3 = 1, \therefore a = \frac{1}{3}$,

综上所述, 所求实数 a 的值构成的集合 $M = \{0, -1, \frac{1}{3}\}$.



警示误区

在 $B \subseteq A$ 或 $B \subsetneq A$ 中, 含有 $B = \emptyset$ 这种情况, 解题时需注意, 防止疏漏.

随堂练习

3. 已知集合 $A = \{x | -5 \leq x \leq 3\}$ 与 $B = \{y | y = a - 2x - x^2\}$, 若 $A \subsetneq B$, 求实数 a 的取值范围.

4. 集合 U, S, T, F 的关系如图 1-2-2 所示, 下列关系中哪些是对的, 哪些是错的?

(1) $S \subsetneq U$; (2) $F \subsetneq T$; (3) $S \subsetneq T$;

(4) $S \supsetneq F$; (5) $S \subsetneq F$; (6) $F \subsetneq U$.



图 1-2-2

重点 3 集合的相等

一般地, 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素, 反过来, 集合 B 的每一个元素也都是集合 A 的元素, 那么我们就说集合 A 等于集合 B , 记作 $A = B$.



在线课堂

(1) 对集合相等概念的理解.

“集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素”, 即 $A \subseteq B$;
“集合 B 的每一个元素都是集合 A 的元素”, 即 $B \subseteq A$. 该定义有两层意思:

① 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 那么 $A = B$;

② 若 $A = B$, 那么 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

例如, $A = \{x | x^2 = 1\}, B = \{-1, 1\}$, 则 $A = B$.

(2) 当 $A \subseteq B$ 时, 有 $A = B$ 与 $A \subsetneq B$ 两种可能, 且二者必居其一. 当 $A \subseteq B$ 时, 如果 $A \supsetneq B$, 那么 $A = B$; 当 $A \subseteq B$ 时, 如果 $A \not\supsetneq B$ 即 $A \neq B$ 时, 那么 $A \subsetneq B$.

例 4] 设集合 $A = \{x - y, x + y, xy\}, B = \{x^2 + y^2, x^2 - y^2, 0\}$, 且 $A = B$, 求实数 x 和 y 的值及集合 A, B .



思路导引

由 $A = B$ 可列方程组, 但注意到集合 B 中有一特殊元素 0, 故应以特殊元素 0 作为突破口.

解 $\because A = B, 0 \in B, \therefore 0 \in A$.

若 $x + y = 0$ 或 $x - y = 0$, 则 $x^2 - y^2 = 0$, 这样集合 $B = \{x^2 + y^2, 0, 0\}$, 根据元素的互异性知: $x + y \neq 0, x - y \neq 0$.

$$\therefore (I) \begin{cases} xy = 0, \\ x - y = x^2 - y^2, \text{ 或 } (II) \begin{cases} xy = 0, \\ x + y = x^2 + y^2, \end{cases} \end{cases}$$

由 (I) 得 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 1; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0; \end{cases}$

由 (II) 得 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 0, \\ y = -1; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$

$\therefore$ 当 $x = 0, y = 0$ 时, $x - y = 0$, 故应舍去;

当 $x = 1, y = 0$ 时, $x - y = x + y = 1$, 故也应舍去,

$\therefore \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 0, \\ y = -1, \end{cases} \therefore A = B = \{0, 1, -1\}$.



方法规律

若题设给出了两集合相等, 像这类问题应选择特殊元素作为突破口. 因为集合中的元素具有确定性、互异性、无序性, 解题时还应注意要满足集合的元素这三大特征.

随堂练习

5. 设集合 $A = \{1, a, b\}, B = \{a, a^2, ab\}$, 且 $A = B$, 求实数 a, b 的值.

例 5] 满足 $\{a\} \subseteq M \subsetneq \{a, b, c, d\}$ 的集合 M 共有 ()

A. 6 个 B. 7 个 C. 8 个 D. 15 个



思路导引

用子集及真子集的概念来解决.

$\because \{a\} \subseteq M, \therefore M$ 中至少含有一个元素 a ;

又 $\because M \subseteq \{a, b, c, d\}$,

$\therefore M$ 中至多含有三个元素.

由此可知满足条件的集合 M 有: $\{a\}$ 、 $\{a, b\}$ 、 $\{a, c\}$ 、 $\{a, d\}$ 、 $\{a, b, c\}$ 、 $\{a, b, d\}$ 、 $\{a, c, d\}$ 共 7 个.

解 选 B.



方法规律

区分符号“ $\subseteq$ ”“ $\subset$ ”“ $\subsetneq$ ”的不同含义.



体验探究

例 6] 填下表:

集 合	集合中元素的个数	子集的数目
$\{a\}$	1	
$\{a, b\}$	2	
$\{a, b, c\}$	3	
$\{a, b, c, d\}$	4	
$\{a, b, c, d, e\}$	5	
...	...	

(1) 试寻找“元素个数”与“子集数目”之间关系的规律.

(2) 如果一个集合中有 n 个元素, 试写出计算它的所有子集数目的公式 (用 n 表达).

解: (1) 当 n 分别为 1, 2, 3, 4, 5 时, 相应的子集数目依次为 2, 4, 8, 16, 32.

(2) 由 $\begin{matrix} 1 \\ \downarrow \\ 2^1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ \downarrow \\ 2^2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ \downarrow \\ 2^3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4 \\ \downarrow \\ 2^4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 5 \\ \downarrow \\ 2^5 \end{matrix} \quad \dots$ 可发现: 若一个集合中有 n 个元素, 则它的所有子集数目为 2^n 个.



探究总结

若集合 A 有 n 个元素, 那么它有 2^n 个子集, 有 $2^n - 1$ 个真子集, 有 $2^n - 2$ 个非空的真子集 (其中 $n \in \mathbb{N}^*$). 这个结论以后可以证明.

随堂练习

6. 若集合 A, B, C 满足 $A \subseteq B \subseteq C$, 试填下表:

集合 A 中元素的个数	集合 C 中元素的个数	满足条件的集合 B 的个数
1	2	
1	3	
1	4	
2	3	
2	4	
...	...	

随堂练习

(1) 设有限集合 M 所含元素个数用 $n(M)$ 表示, 并且规定 $n(\emptyset) = 0$. 已知 $n(A) = m, n(C) = n (m < n, m, n \in \mathbb{N}^*)$, 试写出满足条件 $A \subseteq B \subseteq C$ 的所有集合 B 的个数, 并加以解释.

(2) 当 ① $A \subsetneq B \subseteq C$, ② $A \subseteq B \subsetneq C$, ③ $A \subsetneq B \subsetneq C$ 结果又如何?

要点记忆

1. 易错点 把 $A \subseteq B$ 理解为 A 是由 B 中部分元素组成的集合是错误的, 因为 $A \subseteq A$, 但是 A 由 A 中全部元素组成.

2. 易混淆点: (1) “ $\in$ ”表示元素与集合之间的关系, 而“ $\subseteq$ ”表示集合与集合之间的关系.

(2) a 与 $\{a\}$ 的区别: 一般地, a 表示一个元素, 而 $\{a\}$ 表示只有一个元素的集合.

3. 解题技巧与规律: 求解集合中的元素问题, 要检验是否满足题设条件和集合中元素的确定性、互异性、无序性这三条特征.



心得笔记

问题探知 $\emptyset, \{依夫\}, \{狼\}, \{羊\}, \{菜\}, \{依夫, 狼\}, \{依夫, 羊\}, \{依夫, 菜\}, \{狼, 羊\}, \{狼, 菜\}, \{羊, 菜\}, \{依夫, 狼, 羊\}, \{依夫, 狼, 菜\}, \{依夫, 羊, 菜\}, \{狼, 羊, 菜\}, \{依夫, 狼, 羊, 菜\}$ 共 $2^4 = 16$ 个. 设计方案: ① 农夫先把羊运到对岸, ② 返回后再把狼 (或菜) 又运到对岸, 返回时带上羊, ③ 再运送菜 (或狼), ④ 最后运羊.

例 2] (1) $\in; \subseteq$

例 3] $\emptyset; \emptyset$



课后作业

班级_____ 姓名_____ 分数_____

基础演练

- 下列各式中正确的是 ()
A. $\{1\} \in \mathbf{R}$ B. $\emptyset \in \{1\}$ C. $\emptyset = \{1\}$ D. $\emptyset \subseteq \{1\}$
- 已知集合 $M = \{1, a\}$, 集合 $P = \{x | x \in M\}$, 则集合 M 与集合 P 之间的关系是 ()
A. $M \subseteq P$ B. $P \subseteq M$ C. $M = P$ D. $M \in P$
- 集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, 则集合 M 的所有的非空真子集的个数是 ()
A. 7 B. 6 C. 5 D. 4
- 满足条件 $\{1, 2\} \subsetneq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的集合 M 的个数是 ()
A. 3 个 B. 6 个 C. 7 个 D. 8 个

5. 图 1-2-3 中的图象语言直观地表示一些四边形之间的关系, 改用集合的符号语言来表示它们之间的关系应是_____.



图 1-2-3

6. 已知集合 $P = \{x | x^2 = 1\}$, 集合 $Q = \{x | ax = 1\}$, 若 $Q \subseteq P$, 则 $a =$ _____.

综合测试

7. 已知 $A = \{x \in \mathbf{R} | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < a + 4\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

8. 已知集合 $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, 又知集合 C 是这样一个集合: 若各元素都加 2, 就变成 A 的一个子集, 若各元素都减 2, 就变成 B 的一个子集, 求集合 C .

探究升级

9. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq a, a > -1 \text{ 且 } a \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = 2x - 1, x \in A\}$, $C = \{z | z = x^2, x \in A\}$. 是否存在实数 a 的值, 使 $C \subseteq B$? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 则说明理由.

自我评价
