目录

Contents

第一章　概率与统计

Contents

1.1　离散型随机变量的分布列 …… 1
1.2　离散型随机变量的期望与方差 …… 8
离散型随机变量的分布列、期望与方差习题课 …… 14
1.3　抽样方法 …… 16
1.4　总体分布的估计 …… 24
抽样方法和总体分布的估计习题课 …… 28
1.5　正态分布 …… 30
1.6　线性回归 …… 36
正态分布、线性回归习题课 …… 43
本章小结 …… 45

第二章　极　限

Contents

2.1　数学归纳法及其应用举例 …… 52
研究性学习课题:杨辉三角 …… 61
数学归纳法习题课 …… 64
2.2　数列的极限 …… 66
2.3　函数的极限 …… 69
2.4　极限的四则运算 …… 74
2.5　函数的连续性 …… 81
极限与函数的连续性习题课 …… 84
本章小结 …… 85

第三章　导　数

Contents

3.1　导数的概念 …… 89
导数的概念习题课 …… 95
3.2　几种常见函数的导数 …… 96
3.3　函数的和、差、积、商的导数 …… 98
几种常见函数的导数　函数的和、差、积、商的导数习题课 …… 103
3.4　复合函数的导数 …… 104
3.5　对数函数与指数函数的导数 …… 108

MATH

Contents

复合函数的导数、对数函数与指数函数的导数习题课 …… 111
3.6 函数的单调性 …… 112
函数的单调性习题课 …… 116
3.7 函数的极值 …… 117
3.8 函数的最大值与最小值 …… 121
3.9 微积分建立的时代背景和历史意义 …… 127
本章小结 …… 128

第四章 数系的扩充——复数

4.1 复数的概念 …… 133
4.2 复数的运算 …… 136
4.3 数系的扩充 …… 139
研究性学习课题：复数与平面向量、三角函数的联系 …… 141
本章小结 …… 144
期末测试题 …… 147
参考答案（另附）

第一章 概率与统计

1.1 离散型随机变量的分布列

第一课时

知识整理

- 试验与随机试验
  - 随机变量
    - 随机变量的定义
    - 离散型随机变量

1. ________________，那么这样的变量叫做随机变量，随机变量可用希腊字母______等表示.

2. ____，这样的随机变量叫做离散型随机变量.

3. 若 ξ 是随机变量，$\eta=a\xi+b$，其中 a、b 是常数，则 η 是________.

基础示例

1. 一个袋中装有红、黄、蓝球各一个，从中任取一球，可能出现几种结果？

答案：可能出现取出红球、黄球、蓝球三种结果.

2. 一个袋中装有红、黄、蓝球各一个，从中取一球，取出红球用 $\xi=1$ 表示，取出黄球用 $\xi=2$ 表示，取出蓝球用 $\xi=3$ 表示. 那么 ξ 等于 1 或 3 表示的结果是________.

答案：取出红球或取出蓝球

3. 袋中有 3 个白球，5 个黑球，从中任取两个，可以作为随机变量的是 ……………………………………………………………………………（　　）

A. 至少取到 1 个白球　　B. 至多取到 1 个白球

C. 取到白球的个数　　D. 至少取到 1 个白球的概率

答案：C

重难突破

本课时的重点是对随机变量、离散型随机变量的概念的正确理解，难点是这些概念的建立.

1. 正确理解试验与随机试验

凡是对现象的观察或为此而进行的实验，都称之为试验. 一个试验如果满足下述条件：

（1）试验可以在相同的情形下重复进行；

（2）试验的所有可能结果是明确可知的，并且不止一个；

（3）每次试验总是恰好出现这些结果中的一个，但在一次试验之前不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

它就被称为一个随机试验.

2. 随机变量的概念

所谓随机变量，即是随机试验的试验结果和实数之间的一个对应关系，这种对应关系是人为建立起来的，但又是客观存在的. 这与函数概念的本质是一样的，只不过在函数

活学巧用

【例1】判断下列问题是否构成随机试验.

（1）京武 Z38 次特快车到达北京西站是否正点；

（2）1976 年唐山大地震.

解：（1）是随机试验，因为它满足随机试验的三个条件：即在相同的情况下可重复进行（每天一次）；所有可能的结果是明确的（正点或误点）；试验之前不能肯定会出现哪种结果.

（2）不是随机试验，因为它不可重复进行.

【例2】投掷均匀硬币一次，随机变量为……………（　　）

A. 出现正面的次数　　B. 出现正面或反面的次数

C. 掷硬币的次数　　D. 出现正、反面次数之和

分析：描述随机试验的随机变量有多种形式，不论选取哪一种形式，随机变量都可以表示随机试验的所有可能结果，注意随机变量在选定标准之后，它是变化的.

概念中，函数$f(x)$的自变量x是实数，而在随机变量的概念中，随机变量ξ的自变量是试验结果.

例如，任意掷一枚硬币，可能出现正面向上、反面向上这两种结果，虽然这个随机试验的结果不具有数量性质，但仍可以用数量来表示它. 通常我们用ξ来表示这个随机试验的结果：

$\xi=0$，表示正面向上；

$\xi=1$，表示反面向上.

随机变量ξ的三个特征：

(1)随机试验的结果可用数来表示；

(2)试验前可以判断其可能出现的所有值；

(3)试验前不能确定取何值.

3. 离散型随机变量与非离散型随机变量

如果对于随机变量可能取的值，可以按一定次序一一列出，这样的随机变量叫做离散型随机变量.

如果随机变量可以取某一区间内的一切值或无法按次序一一列出来，这样的随机变量叫做非离散型随机变量.

4. 离散型随机变量的判定

离散型随机变量和非离散型随机变量都是用来刻画随机试验所出现的结果的，但二者之间又有着根本的区别：对于离散型随机变量而言，它可能取的值为有限个或至多可列个，或者说能将它的可取值按一定次序一一列出. 而非离散型随机变量可取某一区间内的一切值，我们无法对其中的值一一列举.

解：掷一枚硬币，可能出现的结果是正面向上或反面向上，以一个标准如正面向上的次数来描述这一随机试验，那么正面向上的次数就是随机变量ξ，ξ的取值是0、1，故选A；而B中标准模糊不清，C中掷硬币次数是1，都不是随机变量；D中对应的事件是必然事件.

所以应选A.

答案：A

点评：随机变量从本质上讲就是以随机试验的每一个可能结果为自变量的一个函数，即随机变量的取值实质上是试验结果对应的数，但这些数是预先知道所有可能的值，而不知道究竟是哪一个值.

【例3】写出下列随机变量可能取的值，并说明随机变量所取的值表示的随机试验的结果.

(1)一袋中装有5只同样大小的白球，编号为1，2，3，4，5. 现从该袋内随机取出3只球，被取出的球的最大号码数为ξ；

(2)某单位的某部电话在单位时间内收到的呼叫次数为η.

解：(1)ξ可取3，4，5.

$\xi=3$，表示取出的3个球的编号为1，2，3；

$\xi=4$，表示取出的3个球的编号为1，2，4或1，3，4或2，3，4；

$\xi=5$，表示取出的3个球的编号为1，2，5或1，3，5或1，4，5或2，3，5或2，4，5或3，4，5.

(2)η可取$0,1,2,\cdots,n,\cdots$.

$\eta=i$表示被呼叫i次，其中$i=0,1,2,3,\cdots$.

课时演练

1 下列选项中不能作为随机变量的是 ……（　　）

A. 投掷一枚硬币80次，正面向上的次数

B. 某家庭每月的电话费

C. 在n次独立重复试验中，事件发生的次数

D. 一个口袋中装有3个号码都为1的小球，从中取出2个球的号码的和

（考查明释：考查随机变量的概念及判定.）

2 有下列问题：

①某路口一天经过的车辆数为ξ；②某无线寻呼台一天内收到寻呼的次数为ξ；③一天之内的温度为ξ；④某人一生中的身高为ξ；⑤射击运动员对某目标进行射击，击中目标得1分，未击中目标得0分，用ξ表示运动员在射击中的得分.

上述问题中ξ是离散型随机变量的是……（　　）

A. ①②③⑤　　B. ①②④

C. ①　　D. ①②⑤

（考查明释：考查离散型随机变量的判定.）

3 一个袋中有大小相同的5个钢球，分别标有1，2，3，4，5五个号码. 现在在有放回抽取的条件下依次取出两个球，设两球号码之和为随机变量ξ，则ξ的所有可能值的个数是……（　　）

A. 5　　B. 9

（考查明释：考查随机变量ξ所有取值的求法，这是有放回的抽取，注意与下题的区别.）

C. 10　　D. 25

4 一个袋中有大小相同的 5 个钢球，分别标有 1、2、3、4、5 五个号码. 任意抽取 2 个球，设 2 个球号码之和为 ξ，则 ξ 所有可能值的个数是 …………（　　）

A. 25　　B. 10　　C. 7　　D. 6

← 考查离散型随机变量 ξ 所有可能取值的求法，这是不放回的抽取.

5 某人射击击中目标的命中率为 0.6，他向一目标射击，当第一次射中目标时停止射击，则射击次数的取值是 …………（　　）

A. 1，2，3，…，0.6n　　B. 1，2，3，…，n，…

C. 0，1，2，…，0.6n　　D. 0，1，2，…，n，…

← 考查离散型随机变量 ξ 所有可能取值的写法.

6 抛掷两枚骰子各一次，记第一枚骰子掷出的点数与第二枚骰子掷出的点数的差为 ξ，试问："$\xi>4$"表示的试验结果是 …………（　　）

A. 第一枚骰子点数为 6

B. 第二枚骰子点数为 5

C. 第一枚骰子点数为 6，第二枚骰子点数为 1

D. 两枚骰子的点数之差为 5 和 6

← 考查离散型随机变量所取得的值表示的随机试验的结果.

7 写出下列各随机变量可能取的值，并说明随机变量所取的值表示的随机试验的结果：

（1）盒中装有 6 支白粉笔和 8 支红粉笔，从中任意取出 3 支，其中含白粉笔的支数 ξ；

（2）从 4 张已编号（1 号 ~ 4 号）的卡片中任意取出 2 张，被取出的卡片号数之和 ξ；

（3）离开天安门的距离 η；

（4）袋中有大小完全相同的红球 5 个，白球 4 个，从袋中任意取出一球，若取出的球是白球，则过程结束；若取出的球是红球，则将此红球放回袋中，然后重新从袋中任意取出一球……直至取出的球是白球，此约定下的取球次数 ξ.

← 考查随机变量可能的取值以及表示的随机试验的结果.

8 连续向一目标射击，命中率为 0.8，直到命中目标为止，所需要的射击次数为 ξ，写出 $\xi=6$ 所表示的试验结果并求出 $\xi=3$ 时的概率.

← 考查随机变量所取的值表示的试验的结果及随机变量的概率求法.

9 某城市出租汽车的起步价为 10 元，行驶路程不超出 4 km，则按 10 元的标准收租车费. 若行驶路程超出 4 km，则按每超出 1 km 加收 2 元计费. 从这个城市的民航机场到某宾馆的路程为 15 km. 某司机常驾车在机场与此宾馆之间接送旅客，由于行车路线的不同以及途中停车时间要转换成行车路程（这个城市规定，每停车 5 分钟按 1 km 路程计费），这个司机一次接送旅客的行车路程 ξ 是一个随机变量，他收取旅客的租车费 η 也是一个随机变量.

（1）求租车费 η 关于行车路程 ξ 的关系式；

（2）已知某旅客实付租车费 38 元，而出租汽车实际行驶了 15 km，问出租车在途中因故停车累计最少几分钟？

← 随机变量 ξ 的函数仍是随机变量，自变量是实验的结果（对本例来说是行车路程）.

第二课时

知识整理

1. 一般地，设离散型随机变量 ξ 可能取的值为 $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots$，$\xi$ 取每一个值 $x_i(i=1, 2, \cdots)$ 的概率为 $P(\xi=x_i)=p_i$，则称表

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

为随机变量 ξ 的概率分布，简称为 ξ 的______.

2. 由概率的性质，可知任一离散型随机变量的分布列都具有下面两个性质：

(1)________________________;

(2)________________________.

3. 一般地，离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的______.

4. 如果在一次试验中某事件发生的概率是 p，那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率是________________. 其中 $k=0,1,\cdots,n$，$q=1-p$，于是得到随机变量 ξ 的概率分布如下：

ξ	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	n
P	$C_n^0p^0q^n$	$C_n^1p^1q^{n-1}$	$\cdots$	$C_n^kp^kq^{n-k}$	$\cdots$	$C_n^np^nq^0$

上面的随机变量 ξ 服从__________，记作__________，其中 n,p 为参数.

基础示例

1. 从装有 3 个红球、2 个白球的袋中随机取出 2 个球，设其中有 ξ 个红球，则随机变量 ξ 的概率分布为__________.

答案：

ξ	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

2. 设离散型随机变量 ξ 的概率分布如下：

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	p

则 p 的值为 ……………………………………（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

答案：C

3. 已知随机变量 ξ 服从二项分布，$\xi \sim B\left(6, \frac{1}{3}\right)$，则 $P(\xi=1)$ 等于（　　）

A. $\frac{3}{16}$　　B. $\frac{16}{243}$　　C. $\frac{32}{243}$　　D. $\frac{64}{243}$

答案：D

4. 设随机变量 ξ 的概率分布为 $P(\xi=k)=\frac{a}{5^k}$，a 为常数，$k=1,2,\cdots$，则 $a=$______.

答案：4

5. 某批电子管正品率为 $\frac{3}{4}$，次品率为 $\frac{1}{4}$，现对该电子管进行测试，设第 ξ 次首次测得正品，则 $P(\xi=3)$ 等于 ……………………（　　）

A. $C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}$　　B. $C_3^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$

C. $\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}$　　D. $\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$

答案：C

重难突破

本课时的重点是离散型随机变量的分布列的求法及其性质应用，难点是求分布列时 ξ 的取值的确定及概率的求法及对二项分布和几何分布的正确理解.

1. 正确认识离散型随机变量的分布列

对于随机变量的研究，我们不仅要知道随机变量取哪些值、随机变量所取的值表示的随机试验的结果，而且需要进一步了解随机变量取这些值的概率.

对于离散型随机变量，它的分布列指出了随机变量 ξ 取这些值的概率. 掌握离散型随机变量的分布列，我们就对离散型随机变量取哪些值及取这些值的概率情况有了本质

活学巧用

【例1】将一颗骰子掷两次，求下列随机变量的分布列：(1)两次掷出的最大点数；(2)第一次掷出的点数减去第二次掷出的点数的差.

解：(1)分布列如下：

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

(2)分布列如下：

ξ	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

的认识，即掌握了随机变量取值的统计规律.

随机变量 ξ 的分布列具有以下两个本质特征：

(1) $p_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots$;

(2) $p_1+p_2+\cdots=1$.

这是确定分布列中参数值的依据，解题时，若给出分布列，要充分利用分布列的性质求解.

一般地，离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和.

2. 常见的离散型随机变量的分布列

(1) 二项分布是概率论中最重要的几种分布之一，在实际应用和理论分析中都有重要的地位. 引入二项分布，实际上只是对 n 次独立重复试验从概率分布的角度作了进一步的阐述. 此外要注意二项分布的表示法：$\xi \sim B(n,p)$，以及表示 $C_n^k p^k q^{n-k}$ 的另一种记法 $b(k;n,p)$，这里 n 是独立重复试验的次数，p 是每次试验中某事件发生的概率. 由于试验常常可以独立重复，研究独立重复试验及相关的二项分布就显得非常的自然，其重要性也是显而易见的.

在实际应用中往往出现数量"较大"、"很多"、"非常多"等字眼，这表明该试验可视为独立重复试验，则 n 次试验中 A 发生的次数 ξ 可视为独立重复试验.

(2) 几何分布：如果在一次试验中某事件发生的概率是 p，那么在 n 次独立重复试验中这个事件第一次发生时所做的试验次数 ξ 服从几何分布，记作 $g(k,p)=q^{k-1}\cdot p$.

其中 $k=0,1,2,\cdots,q=1-p$，在这里要注意是"第一次发生".

除了以上两种常见的分布外，还有

单点分布：它的分布列为

ξ	C
P	1

两点分布：它的分布列为

ξ	0	1
P	q	p

其中 $0<p<1$，且 $p+q=1$.

3. 求离散型随机变量的概率分布的方法步骤

(1) 找出随机变量 ξ 的所有可能的取值 $x_i\ (i=1,2,\cdots)$;

(2) 求出各取值的概率 $P(\xi=x_i)=p_i$;

(3) 列成表格.

注意：要求离散型随机变量 ξ 的分布列，就要求出概率 $P(\xi=x_i)\ (i=1,2,\cdots)$，而 $P(\xi=x_i)=P(A_i)$，要求基本事件 A_i 的概率就要运用等可能事件的概率、排列组合、分类计数原理、分步计数原理等知识和方法，二项分布中还要用到二项式定理. 因此，求解离散型随机变量分布列的问题往往需要综合运用排列组合、概率等知识和方法.

【例2】进行某种试验，设试验成功的概率为 $\frac{3}{4}$，以 ξ 表示试验首次成功所需试验的次数，试写出 ξ 的分布列，并写出 ξ 取偶数的概率（只列出式子）.

解：随机变量 ξ 的取值是 $1,2,3,\cdots,k,\cdots$ 并且有

$$P(\xi=1)=\frac{3}{4}, P(\xi=2)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right),$$

$$P(\xi=3)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

……

$$P(\xi=k)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1},$$

……

从而 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$	$\cdots$

ξ 取偶数的概率为

$$P=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{2m-1}+\cdots(m\in\mathbf{N}^*).$$

【例3】2006 全国高考Ⅱ，理 18　某批产品成箱包装，每箱 5 件. 一用户在购进该批产品前先取出 3 箱，再从每箱中任意抽取 2 件产品进行检验. 设取出的第一、二、三箱中分别有 0 件、1 件、2 件为二等品，其余为一等品.

(1) 用 ξ 表示抽检的 6 件产品中二等品的件数，求 ξ 的分布列；

(2) 若抽检的 6 件产品中有 2 件或 2 件以上为二等品，用户就拒绝购买这批产品，求这批产品被用户拒绝购买的概率.

解：(1) ξ 可能的取值为 $0,1,2,3$.

$$P(\xi=0)=\frac{C_4^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{18}{100}=\frac{9}{50},$$

$$P(\xi=1)=\frac{C_4^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_5^2}+\frac{C_4^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\frac{12}{25},$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_4^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}+\frac{C_4^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{3}{10},$$

$$P(\xi=3)=\frac{C_4^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{25}.$$

ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{9}{50}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{25}$

(2) 所求的概率为

$$p=P(\xi\geqslant 2)=P(\xi=2)+P(\xi=3)=\frac{3}{10}+\frac{1}{25}=\frac{17}{50}.$$

课时演练

考查明释

1 已知随机变量 ξ 的概率分布如下:

ξ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3^2}$	$\frac{2}{3^3}$	$\frac{2}{3^4}$	$\frac{2}{3^5}$	$\frac{2}{3^6}$	$\frac{2}{3^7}$	$\frac{2}{3^8}$	$\frac{2}{3^9}$	m

则 $P(\xi=10)$ 等于 ……………………………………………………… (　　)

A. $\frac{2}{3^9}$　　B. $\frac{2}{3^{10}}$　　C. $\frac{1}{3^9}$　　D. $\frac{1}{3^{10}}$

← 考查分布列的性质.

2 2006 江西南昌二模,8 抛掷 2 颗骰子各一次,所得点数之和 ξ 是一个随机变量,则 $P(\xi\leqslant4)$ 为 ……………………………………………………… (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{6}$

← 考查随机变量在某一范围内概率的求法.
$P(\xi\leqslant4)=P(\xi=2)+P(\xi=3)+P(\xi=4)$.

3 设 ξ 是离散型随机变量,则下列不能够成为 ξ 的概率分布的一组数是 ……… (　　)

A. 0,0,0,1,0

B. 0.1,0.2,0.3,0.4

C. p,$1-p$(其中 p 是实数)

D. $\frac{1}{1\cdot2},\frac{1}{2\cdot3},\cdots,\frac{1}{(n-1)\cdot n},\frac{1}{n}$(其中 n 是大于 1 的正整数)

← 考查分布列的性质.

4 随机变量 ξ 的概率分布规律为 $P(\xi=k)=\frac{c}{k(k+1)}$,$k=1,2,3,4$,其中 c 是常数,则 $P\left(\frac{1}{2}<\xi<\frac{5}{2}\right)$的值为 ……………………………………………… (　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{5}{6}$

← 考查离散型随机变量在某一范围内概率取值的求法.

5 设 ξ 服从二项分布 $B(3,p)$,且 $P(\xi=2)=\frac{54}{125}$,则 p 等于 ……………………… (　　)

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{2}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

← 考查二项分布及方程思想.

6 一个袋中有 5 个白球,3 个红球,现从袋中往外取球,每次任取一个记下颜色后放回,直到红球出现 10 次时停止,设停止时共取了 ξ 次球,则 $P(\xi=12)$ 等于 ……… (　　)

A. $C_{12}^{10}\left(\frac{3}{8}\right)^{10}\left(\frac{5}{8}\right)^2$　　B. $C_{11}^{9}\left(\frac{3}{8}\right)^{10}\left(\frac{5}{8}\right)^2$　　C. $C_{11}^{9}\left(\frac{5}{8}\right)^{9}\left(\frac{3}{8}\right)^2$　　D. $C_{11}^{9}\left(\frac{3}{8}\right)^{9}\left(\frac{5}{8}\right)^2$

← $P(\xi=12)$ 表示第 12 次为红球,前 11 次有 9 次为红球. 此题应注意和二项分布的区别.

7 设随机变量 $\xi\sim B(2,p)$,随机变量 $\eta\sim B(3,p)$,若 $P(\xi\geqslant1)=\frac{5}{9}$,则 $P(\eta\geqslant1)=$ ________.

← 考查二项分布.

8 一个袋中装有大小相同的 5 个球,编号分别为 1、2、3、4、5,在袋中同时取 3 个球,以 ξ 表示取出的 3 个球中的最小号码,写出随机变量 ξ 的分布列.

← ξ 取 1,2,3,分三种情况讨论.

9 2006 天津高考,理 18 某射手进行射击训练,假设每次射击击中目标的概率为$\frac{3}{5}$,且各次射击的结果互不影响.

(1)求射手在 3 次射击中,至少有两次连续击中目标的概率(用数字作答);

(2)求射手第 3 次击中目标时,恰好射击了 4 次的概率(用数字作答);

(3)设随机变量 ξ 表示射手第 3 次击中目标时已射击的次数,求 ξ 的分布列.

← 考查互斥事件、相互独立事件的概率,离散型随机变量的分布列等基础知识及分析和解决实际问题的能力.

10 一辆汽车在前进途中要经过 4 个路口,汽车在每个路口遇到绿灯(允许通行)的概率为$\frac{3}{4}$,遇到红灯(禁止通行)的概率为$\frac{1}{4}$. 假定汽车只在遇到红灯或到达目的地时才停止前进,ξ 表示停车时已经通过的路口数,求:

(1)ξ 的分布列;

(2)停车时最多已通过 3 个路口的概率.

← 考查相互独立事件的概率的求法及离散型随机变量的分布列.

1.2　离散型随机变量的期望与方差

第一课时

知识整理

1. 一般地，若离散型随机变量 ξ 的概率分布为

ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

则称____________为 ξ 的数学期望或________，数学期望又简称为________. 它反映了离散型随机变量取值的________.

2. 若 ξ 是随机变量，$\eta=a\xi+b$，则 $E(a\xi+b)$ $=$______.

3. 若 $\xi\sim B(n,p)$，则______.

4. 若随机变量 ξ 服从几何分布，且 $P(\xi=k)=g(k,p)$，则 $E\xi=$________.

基础示例

1. 已知随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	0.2	0.3	0.5

则 $E\xi$ 等于 …………（　　）

A. 3　　B. 1.5　　C. 1.3　　D. 0

答案：C

2. 设 $E\xi=10$，则 $E(3\xi+5)$ 等于 …………（　　）

A. 3　　B. 8　　C. 35　　D. 53

答案：C

3. 抛掷两个骰子，至少有一个 4 点或 5 点出现时，就说这次试验成功，则在 10 次试验中，成功次数 ξ 的期望是 …………（　　）

A. $\frac{80}{9}$　　B. $\frac{55}{9}$　　C. $\frac{50}{9}$　　D. $\frac{10}{3}$

答案：C

4. 同时抛掷两枚相同的均匀硬币，随机变量 $\xi=1$ 表示结果中有正面向上，$\xi=0$ 表示结果中没有正面向上，则 $E\xi=$________.

答案：0.75

重难突破

本节重点研究了反映离散型随机变量分布的“平均”情况的期望 $E\xi$，这是反映随机变量概率分布的重要特征量.

1. 离散型随机变量的期望

(1) 随机变量的数学期望表示随机变量一切可能值的平均值或集中位置，所以随机变量的数学期望（期望）又常被称为随机变量的平均数、均值. 由于离散型随机变量的期望的计算是从它的概率分布出发的，因而期望就是随机变量的概率平均值. 期望与随机变量本身有相同的单位.

(2) 期望与分布列的关系：

可以看出，期望这一概念是建立在分布列的基础之上的，分布列中随机变量 ξ 的一切可能值 x_i 与对应的概率 $P(\xi=x_i)$ 的乘积的和就叫做随机变量 ξ 的数学期望.

离散型随机变量的分布列和期望虽然都是从整体和全局上刻画随机变量，但二者大有不同. 分布列只给出了随机变量取所有可能值的概率，而期望却反映了随机变量取值

活学巧用

【例1】在 5 件产品中含有 2 件次品，从这 5 件产品中选出 3 件，所含的次品数设为 ξ，求 ξ 的分布列，并求 ξ 的数学期望.

的平均水平.

(3)数学期望的性质:

$E(c)=c$,$E(a\xi+b)=aE\xi+b$(a、b、c为常数)对离散型随机变量的期望的几点说明:

①期望是算术平均值概念的推广,是概率意义下的平均.

②$E\xi$是一个实数,由ξ的分布列唯一确定,即作为随机变量ξ是可变的,可取不同的值,而$E\xi$是不变的,它描述ξ的取值的平均状态.

③$E(a\xi+b)=aE\xi+b$说明随机变量ξ的线性函数$\eta=a\xi+b$的期望等于随机变量ξ期望的线性函数,此式可有如下几种特殊形式:

当$b=0$时,$E(a\xi)=aE\xi$,此式表明常量与随机变量乘积的数学期望,等于这个常量与随机变量的期望的乘积.

当$a=1$时,$E(\xi+b)=E\xi+b$,此式表明随机变量与常量和的期望,等于随机变量的期望与这个常量的和.

当$a=0$时,$Eb=b$,此式表明随机变量的期望等于这个常量.

2. 解答基本问题的方法

(1)求离散型随机变量的期望,首先应明确随机变量的分布列,再按定义求解. 若分布列中的概率值是待定常数,应先求出这些待定常数后,再求其期望.

(2)已知随机变量ξ的期望,求$\eta=a\xi+b$的期望,可直接用ξ的期望的性质求解.

(3)分析所给随机变量,如是服从常见的二项分布,则$E\xi=np$;如是服从几何分布,则$E\xi=\frac{1}{p}$.

(4)对于应用问题,必须对实际问题进行具体分析. 先求出随机变量的概率分布,再按定义进行计算.

解:ξ可能取的值有0,1,2.

$$P(\xi=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10},P(\xi=1)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{6}{10},$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}.$$

∴ ξ的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$\therefore\quad E\xi=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}.$$

点评:(1)求ξ的数学期望$E\xi$,一般是先写出ξ的分布列,然后求出$E\xi$.

(2)若从本例中的5件产品中选1件,所含的次品数为ξ_1,选2件所含的次品数为ξ_2,选4件所含的次品数为ξ_4,则$E\xi_1=\frac{2}{5}$,$E\xi_2=\frac{2}{5}\times2=\frac{4}{5}$,$E\xi_4=\frac{2}{5}\times4=\frac{8}{5}$.

【例2】甲、乙两队进行一场排球比赛,根据以往经验,单局比赛甲队胜乙队的概率为0.6. 本场比赛采用五局三胜制,即先胜三局的队获胜,比赛就结束. 设各局比赛相互之间没有影响. 令ξ为本场比赛的局数,求ξ的概率分布和数学期望.(精确到0.000 1)

解:单局比赛甲队胜乙队的概率为0.6,乙队胜甲队的概率为$1-0.6=0.4$.

比赛3局结束有两种情况:甲队胜3局或乙队胜3局. 因而$P(\xi=3)=0.6^3+0.4^3=0.28$.

比赛4局结束有两种情况:前3局中甲队胜2局,第4局甲队胜;或前3局中乙队胜2局,第4局乙队胜,因而$P(\xi=4)=C_3^2\times0.6^2\times0.4\times0.6+C_3^2\times0.4^2\times0.6\times0.4=0.374\ 4$.

比赛5局结束有两种情况:前4局中甲队胜2局、乙队胜2局,第5局甲队胜或乙队胜,因而$P(\xi=5)=C_4^2\times0.6^2\times0.4^2\times0.6+C_4^2\times0.6^2\times0.4^2\times0.4=0.345\ 6$.

所以ξ的概率分布为

ξ	3	4	5
P	0.28	0.374 4	0.345 6

ξ的期望$E\xi=3\times P(\xi=3)+4\times P(\xi=4)+5\times P(\xi=5)=3\times0.28+4\times0.374\ 4+5\times0.345\ 6=4.065\ 6$.

点评:本题考查离散型随机变量分布列和数学期望等概念,考查运用概率知识解决实际问题的能力.

课时演练　　考查明释

1 在篮球比赛中运动员每次罚球命中得1分,罚不中得0分,已知某运动员罚球命中的概率为0.7,则他罚球5次的得分ξ的期望$E\xi$等于 ……………………………… (　　)

← 考查随机变量的期望的概念及计算.

A. 0.3　　B. 0.7　　C. 1　　D. 以上答案都不对

2 2006 甘肃兰州一模,7 设随机变量 ξ 的概率分布为 $P(\xi=k)=\frac{C}{2^k}, k=1,2,3$，其中 C 为常数，则 $E\xi$ 的值为 …………（　　）

A. $\frac{11}{7}$　　B. $\frac{7}{11}$　　C. $\frac{11}{8}$　　D. $\frac{8}{11}$

← 考查分布列的性质及期望的计算.

3 设导弹发射的事故率为 0.01，若发射 10 次，其出事故的次数为 ξ，则下列结论正确的是 …………（　　）

A. $E\xi=0.1$　　B. $E\xi=0.01$

C. $P(\xi=k)=0.01^k\cdot 0.99^{10-k}$　　D. $P(\xi=k)=C_{10}^k\cdot 0.99^k\cdot 0.01^{10-k}$

← 考查二项分布的期望.

4 一射手对靶射击，直到第一次命中为止，每次命中的概率为 0.6，现在有 4 颗子弹，命中后尚余子弹数目 ξ 的期望为 …………（　　）

A. 2.44　　B. 3.376

C. 2.376　　D. 2.4

← 考查数学期望的概念及计算.

5 某渔船要对下月是否出海作出决策，如果出海后遇到好天气，可得收益 6 000 元；如果出海后天气变坏，将损失 8 000 元. 若不出海，无论天气如何都将承担 1 000 元损失费. 据气象部门的预测，下月好天气的概率为 0.6，天气变坏的概率为 0.4，则该渔船应选择______（填"出海"或"不出海"）.

← 数学期望的实际应用.

6 一个袋子里装有大小相同的 3 个红球和 2 个黄球，从中同时取出 2 个，则其中含红球个数的数学期望是________.（用数字作答）

← 考查等可能事件概率的求法及数学期望.

7 2006 福建高考,理 15 一个均匀小正方体的六个面中，三个面上标以数 0，两个面上标以数 1，一个面上标以数 2. 将这个小正方体抛掷 2 次，则向上的数之积的数学期望是________.

← ξ 的可能值为 0,1,2,4，先求分布列，再求 $E\xi$.

8 2006 河北保定模拟 将数字 1,2,3,4 任意排成一列，如果数字 k 恰好出现在第 k 个位置上，则称之为一个巧合，求巧合数的数学期望.

← 新定义试题，$\xi=0,1,2,3,4$.

9 2006 浙江温州检测 一个盒子中有大小相同的球 10 个，其中标号为 1 的球 3 个，标号为 2 的球 4 个，标号为 5 的球 3 个. 第一次从盒子中任取 1 个球，放回后第二次再任取 1 个球（假设每次取到每个球的可能性都相同），记第一次与第二次取到球的标号之和为 ξ.

（1）求随机变量 ξ 的分布列；

（2）求随机变量 ξ 的期望 $E\xi$.

← ξ 的可能取值为 2,3,4,6,7,10.

10 2006 江西高考,理 18 某商场举行抽奖促销活动,抽奖规则是:从装有 9 个白球、1 个红球的箱子中每次随机地摸出一个球,记下颜色后放回,摸出一个红球可获得奖金 10 元,摸出两个红球可获得奖金 50 元. 现有甲、乙两位顾客,规定:甲摸一次,乙摸两次. 令 ξ 表示甲、乙两人摸球后获得的奖金总额. 求:

(1) ξ 的分布列;

(2) ξ 的数学期望.

← ξ 的可能取值为 0,10,20,50,60,考查分布列及期望的计算.

第二课时

知识整理

1. 如果离散型随机变量 ξ 所有可能取的值是 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 且取这些值的概率分别是 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ 那么把____________叫做随机变量 ξ 的均方差,简称______. $D\xi$ 的算术平方根 $\sqrt{D\xi}$ 叫做随机变量 ξ 的______,记作______. 随机变量的方差与标准差都反映了随机变量取值的____________. 其中标准差与随机变量本身有__________________.

2. $D(a\xi+b)=$______.

3. 如果 $\xi \sim B(n,p)$,那么 $D\xi=$______,这里 $q=1-p$.

4. 如果随机变量 ξ 服从几何分布,且 $P(\xi=k)=g(k,p)$, $q=1-p$,那么 $D\xi=$______.

基础示例

1. 下列说法中正确的是 …………………………………………（　　）

A. 离散型随机变量 ξ 的期望 $E\xi$ 反映了 ξ 取值的概率的平均值

B. 离散型随机变量 ξ 的方差 $D\xi$ 反映了 ξ 取值的平均水平

C. 离散型随机变量 ξ 的期望 $E\xi$ 反映了 ξ 取值的波动水平

D. 离散型随机变量 ξ 的方差 $D\xi$ 反映了 ξ 取值的波动水平

答案:D

2. 某牧场的 10 头牛因误食疯牛病毒污染的饲料被感染,已知疯牛病发病的概率为0.02. 若发病的牛数为 ξ,则 $D\xi$ 等于 ……………（　　）

A. 0.2　　B. 0.196　　C. 0.8　　D. 0.812

答案:B

3. 已知随机变量 ξ, $D\xi=\frac{1}{9}$,则 ξ 的标准差是______.

答案:$\frac{1}{3}$

4. 设投掷 1 个骰子的点数为 ξ,则 …………………………………（　　）

A. $E\xi=3.5, D\xi=3.5^2$　　B. $E\xi=3.5, D\xi=\frac{35}{12}$

C. $E\xi=3.5, D\xi=3.5$　　D. $E\xi=3.5, D\xi=\frac{35}{16}$

答案:B

重难突破

本节重点是方差的概念及计算,难点是利用期望与方差的大小解决实际问题.

1. 离散型随机变量的方差、标准差

(1)随机变量 ξ 的方差与标准差都反映了随机变量 ξ 取值的稳定与波动,集中与离散的程度. $D\xi$ 越小,稳定性越高,波动越小. 显然 $D\xi \geqslant 0$,标准差与随机变量本身有相同单位.

活学巧用

【例1】设 ξ 是一个离散型随机变量,其分布列如下表,试求 $E\xi$、$D\xi$.

ξ	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$1-2q$	q^2

（2）期望与方差的关系：

方差是随机变量的另一个重要的数学特征，它反映了随机变量所取的值相对于它的期望的集中与离散的程度，因此二者的关系是十分密切的.

由方差的定义

$D\xi=(x_1-E\xi)^2p_1+(x_2-E\xi)^2p_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2p_n+\cdots$

可知，方差是建立在期望这一概念之上的.

（3）方差的性质：

①设 a、b 为常数，则 $D(a\xi+b)=a^2D\xi$；

②$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$.

说明：（1）$D\xi$ 与 $E\xi$ 都是实数，由 ξ 的分布列唯一确定.

（2）对于公式：$D(a\xi+b)=a^2D\xi$，在记忆和使用此结论时，请注意 $D(a\xi+b)\neq aD\xi+b$，$D(a\xi+b)\neq aD\xi$.

2. 解答基本问题的方法

（1）求 $D\xi$ 的步骤：①求 ξ 的分布列；②求 $E\xi$；③求 $D\xi$.

（2）求 $\sigma\xi$ 的方法：$\sigma\xi=\sqrt{D\xi}$.

（3）已知 $D\xi$，求 $\eta=a\xi+b$ 的方差，可直接利用方差的性质求解.

（4）分析所给的随机变量，若是服从二项分布的，即 $\xi\sim B(n,p)$，则 $D\xi=npq$，这里 $q=1-p$；若是服从几何分布，且 $P(\xi=k)=g(k,p)$，$q=1-p$，则 $D\xi=\frac{q}{p^2}$.

（5）根据随机变量的方差值、期望值求随机变量取某个值时的概率，要注意逆向思维能力的运用.

（6）利用期望与方差的大小解实际应用题时，一般应先分清题意，明确题目欲求的是期望还是方差，在此基础上，将题中考查的数量指标用随机变量表示，把实际问题转化为求随机变量的期望与方差.

判断两种实际情况优越性的方法：

①分别求出 $E\xi_甲$、$E\xi_乙$、$D\xi_甲$、$D\xi_乙$.

②若 $E\xi_甲>E\xi_乙$，在均值意义下，甲优于乙；

若 $D\xi_甲>D\xi_乙$，表明甲的波动大于乙；

若 $E\xi_甲=E\xi_乙$，且 $D\xi_甲>D\xi_乙$，则甲劣于乙.

准确算出 $E\xi_甲$、$E\xi_乙$、$D\xi_甲$、$D\xi_乙$ 是解决此类实际问题的基础，再利用比较大小来判别优越性.

试一试：设在 15 个同类型的零件中有两个是次品，每次任取 1 个，共取 3 次，并且每次取出后不再放回，若以 ξ 表示取出次品的个数，求 ξ 的期望 $E\xi$ 和方差 $D\xi$.

解：$P(\xi=0)=\frac{C_{13}^3}{C_{15}^3}=\frac{22}{35}$，$P(\xi=1)=\frac{C_2^1C_{13}^2}{C_{15}^3}=\frac{12}{35}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_2^2C_{13}^1}{C_{15}^3}=\frac{1}{35}$.

故 ξ 的分布列是

ξ	0	1	2
P	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$E\xi=0\times\frac{22}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{1}{35}=\frac{2}{5}$，$D\xi=\left(0-\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{22}{35}+\left(1-\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{12}{35}+\left(2-\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{1}{35}=\frac{52}{175}$.

点评：本例中“从 15 个零件中每次任取 1 个，共取 3 次”和“从 15 个零件中任取 3 个”的意义相同.

分析：依题意，先应按分布列的性质，求出 q 的数值后，再计算出 $E\xi$ 与 $D\xi$.

解：由于离散型随机变量的分布列满足

（1）$p_i\geqslant0$，$i=1,2,3,\cdots$；

（2）$p_1+p_2+p_3+\cdots=1$.

故 $\begin{cases}\frac{1}{2}+(1-2q)+q^2=1,\\0\leqslant1-2q\leqslant1,\\q^2\leqslant1.\end{cases}$ 解得 $q=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故 ξ 的分布列为

ξ	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{3}{2}-\sqrt{2}$

$$\therefore\quad E\xi=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times(\sqrt{2}-1)+1\times\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\sqrt{2}=1-\sqrt{2}.$$

$$D\xi=[-1-(1-\sqrt{2})]^2\times\frac{1}{2}+(1-\sqrt{2})^2\times(\sqrt{2}-1)+[1-(1-\sqrt{2})]^2\times\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$$
$$=(\sqrt{2}-2)^2\times\frac{1}{2}+(\sqrt{2}-1)^3+2\times\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$$
$$=3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1+3-2\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{2}-1.$$

点评：（1）解本题时，要防止机械地套用期望与方差的计算公式，即 $E\xi=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times(1-2q)+1\times q^2=q^2-\frac{1}{2}$.

$$D\xi=\left[-1-\left(q^2-\frac{1}{2}\right)\right]^2\times\frac{1}{2}+\left(q^2-\frac{1}{2}\right)^2\times(1-2q)+\left[1-\left(q^2-\frac{1}{2}\right)\right]^2\times q^2.$$

这是由于忽略了随机变量分布列的性质所出现的误解.

（2）求离散型随机变量的期望与方差，应明确随机变量的分布列，若分布列中的概率值是待定常数，应先求出这些待定常数后，再求其期望与方差.

【例2】现要从甲、乙两个技工中选派一人参加技术比武赛，已知他们在同样的条件下每天的产量相等，而出现次品个数的分布列如下：

次品数 ξ_1	0	1	2
P	0.1	0.5	0.4

甲

次品数 ξ_2	0	1	2	3
P	0.3	0.3	0.2	0.2

乙

根据以上条件，选派谁去合适？

解：$E\xi_1=0\times0.1+1\times0.5+2\times0.4=1.3$，

$E\xi_2=0\times0.3+1\times0.3+2\times0.2+3\times0.2=1.3$.

由于 $E\xi_1=E\xi_2$，所以甲技工与乙技工出现次品数的平均水平基本一致，因而还需考查稳定性.

$D\xi_1=(0-1.3)^2\times0.1+(1-1.3)^2\times0.5+(2-1.3)^2\times0.4=0.41$；

$D\xi_2=(0-1.3)^2\times0.3+(1-1.3)^2\times0.3+(2-1.3)^2\times0.2+(3-1.3)^2\times0.2=1.21$.

因为 $D\xi_1<D\xi_2$，所以技工乙波动较大，稳定性较差.

综上所述，应选派技工甲去参加比赛.

课时演练　　考查明释

1 2006 江苏高考,3 某人 5 次上班途中所花的时间(单位:分钟)分别为 $x,y,10,11,9$,已知这组数据的平均数为 10,方差为 2,则 $|x-y|$ 为 …………( )

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

← 考查方差的计算公式及方程思想.

2 下面给出了四个命题,其中正确的命题有 …………( )

①$Ec=0$;②$Dc=0$;③$E(k\xi)=kE\xi$;④$D(k\xi+c)=k^2D\xi$(其中 k、c 为常数).

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

← 考查期望与方差的性质.

3 进行某种试验成功的概率为 $\frac{3}{4}$,用 ξ 表示试验首次成功所需试验的次数,则 $D\xi$ 等于 …………( )

A. 4　B. $\frac{4}{3}$　C. $\frac{4}{9}$　D. $\frac{1}{3}$

← 考查几何分布的方差计算.

4 若 $\xi\sim B(n,p)$ 且 $E\xi=6$,$D\xi=3$,则 $P(\xi=1)$ 的值为 …………( )

A. $3\cdot2^{-2}$　B. 2^{-4}　C. $3\cdot2^{-10}$　D. 2^{-8}

← 考查服从二项分布的随机变量的取值概率及取值的期望与方差,考查二项分布的性质及方程的思想.

5 设一次试验成功的概率为 p,现进行 16 次独立重复试验. 当 $p=$________时,成功次数的标准差最大,其最大值为________.

← 考查二项分布的方差及基本不等式、函数法求最值.

6 把 4 个球随机地投入 4 个盒子中去,设 ξ 表示空盒子的个数,求 $E\xi$、$D\xi$.

← 考查随机变量的分布列、期望与方差计算.

7 一盒中装有 12 个零件,其中有 9 个正品,3 个次品,从中任取一个,如果每次取出次品后就不再放回去,再取一个零件,直到取得正品为止. 求在取得正品之前已取出次品数的期望.

← 考查随机变量的概率分布及数学期望,考查分类讨论的思想.

8 甲、乙两名射手在一次射击中的得分为两个相互独立的随机变量 ξ 和 η,且 ξ、η 的分布列分别为

ξ	1	2	3
P	a	0.1	0.6

η	1	2	3
P	0.3	b	0.3

求:(1)a、b 的值;

(2)计算 ξ、η 的期望与方差,并以此分析甲、乙的技术状况.

← 考查随机变量分布列的性质、期望与方差的实际应用.

离散型随机变量的分布列、期望与方差习题课

能力提高

1 2006 北京东城高三 5 月份模拟,7　设随机变量 ξ 的概率分布如表所示：

ξ	0	1	2
P	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$F(x)=P(\xi\leqslant x)$，则当 x 的范围是 $[1,2)$ 时，$F(x)$ 等于 ……………………（　）

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{1}{6}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{5}{6}$

2 2006 山西临汾高三二模,6　某处有水龙头 5 个，调查表明每个水龙头被打开的可能性为 $\frac{1}{10}$，随机变量 ξ 表示同时被打开的水龙头的个数，则 $P(\xi=3)$ 为 ……（　）

A. 0.008 1　B. 0.072 9

C. 0.052 5　D. 0.009 2

3 一袋内装有 m 个白球，$(n-m)$ 个黑球，连续不放回地从袋中取球，直到取出黑球为止. 设此时取出的白球数为 ξ，则 $\frac{(n-m)\cdot A_m^2}{A_n^3}$ 等于 ……………（　）

A. $P(\xi=3)$　B. $P(\xi\geqslant 2)$　C. $P(\xi\leqslant 3)$　D. $P(\xi=2)$

4 从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗，假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 $\frac{2}{5}$，设 ξ 为途中遇到红灯的次数，则随机变量 ξ 的方差为 ……………………（　）

A. $\frac{6}{5}$　B. $\frac{18}{25}$　C. $\frac{6}{25}$　D. $\frac{18}{125}$

5 设 l 为平面上过点 $(0,1)$ 的直线，l 的斜率等可能地取 $-2\sqrt{2},-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{5}}{2},0,\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{3},2\sqrt{2}$，用 ξ 表示坐标原点到 l 的距离，则随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi=$________.

6 某公司有 5 万元资金用于投资开发项目，如果成功，一年后可获利 12%；一旦失败，一年后将丧失全部资金的 50%. 下表是过去 200 例类似项目开发的实施结果：

投资成功	投资失败
192 次	8 次

则该公司一年后估计可获收益的期望是__________元.

7 一盒中放有大小相同的红色、绿色、黄色三种小球，已知红球个数是绿球个数的两倍，黄球个数是绿球个数的一半．现从该盒中随机取出一个球，若取出红球得 1 分，取出黄球得 0 分，取出绿球得 -1 分，试写出从该盒中取出一球所得分数 ξ 的分布列．

8 抛掷两个骰子，取其中一个的点数为点 P 的横坐标，另一个的点数为点 P 的纵坐标，求连续抛掷这两个骰子三次，点 P 在圆 $x^2+y^2=16$ 内次数 ξ 的概率分布．

9 2006 全国高考Ⅰ，理 18　A、B 是治疗同一种疾病的两种药，用若干试验组进行对比试验．每个试验组由 4 只小白鼠组成，其中两只服用 A，另两只服用 B，然后观察疗效．若在一个试验组中，服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多，就称该试验组为甲类组．设每只小白鼠服用 A 有效的概率为 $\frac{2}{3}$，服用 B 有效的概率为 $\frac{1}{2}$．

（1）求一个试验组为甲类组的概率；

（2）观察 3 个试验组，用 ξ 表示这 3 个试验组中甲类组的个数．求 ξ 的分布列和数学期望．

10 在一次购物抽奖活动中，假设某 10 张券中有一等奖券 1 张，可获价值 50 元的奖品；有二等奖券 3 张，每张可获价值 10 元的奖品；其余 6 张没有奖．某顾客从此 10 张券中任抽两张，求：

（1）该顾客中奖的概率；

（2）该顾客获得的奖品总价值 ξ（元）的概率分布和期望 $E\xi$．

施展才华

1 2006 陕西西安高三二模，18　已知某车站每天 8:00～9:00、9:00～10:00 都恰好有一辆客车到站；8:00～9:00 到站的客车 A 可能在 8:10、8:30、8:50 到，其概率依次为 $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$．9:00～10:00 到站的客车 B 可能在 9:10、9:30、9:50 到，其概率依次为 $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$．今有甲、乙两位旅客，他们到站的时间分别为 8:00 和 8:20，甲旅客选择 A 车，乙旅客可选 A 或 B 车，试问他们候车时间的平均值哪个更多？

2 袋中装有黑球和白球共 7 个，从中任取 2 个球都是白球的概率为 $\frac{1}{7}$．现有甲、乙两人从袋中轮流摸取 1 球，取后不放回，甲先取，乙后取，然后甲再取……直到两人中有一人取到白球时即终止．每个球在每一次被取出的机会是等可能的．

（1）求袋中原有白球的个数；

（2）用 ξ 表示取球终止时的取球次数，求随机变量 ξ 的概率分布；

（3）求甲取到白球的概率．