

高中导学与探究丛书教师用书

数 学

高 二（下）（理科）

高中导学与探究丛书编写组 主编

四 川 出 版 集 团
天 地 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高中导学与探究丛书教师用书. 数学. 高二理科. 下/高中导学与探究丛书编写组编. —成都: 天地出版社, 2009. 10

ISBN 978-7-5455-0229-9

I. 高… II. 高… III. 数学课—高中—教学参考资料
IV. G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 186405 号

高中导学与探究丛书教师用书 数学 高二(理科下)

主 编: 高中导学与探究丛书编写组

责任编辑: 叶 健

封面设计: 二 马

出版发行□ 四川出版集团·天地出版社
(成都市三洞桥路 12 号 邮政编码: 610031)

网 址□ <http://www.tiandiph.com>

电子邮箱□ tiandicbs@vip.163.com

博 客□ <http://blog.sina.com.cn/tiandiph>

印 刷□ 德阳日报印刷厂

版 次□ 2009 年 10 月第一版

印 次□ 2009 年 10 月第一次印刷

开 本□ 787mm×1092mm 1/16

总 印 张□ 244.75

总 字 数□ 5474 千

总 定 价□ 300.00 元

书 号□ ISBN 978-7-5455-0229-9

版权所有, 违者必究, 举报有奖!

举报电话: (028)87734601(市场部) 87735269(营销部) 87734639(总编室)

前 言

《高中导学与探究丛书教师用书》在新的课程标准和教学理念的指导下，按照现行各学科教学大纲和教材编写而成。全套丛书共包括语文、数学、英语、物理、化学、生物、政治、历史、地理九个学科。

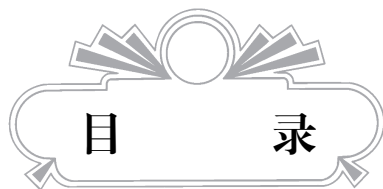
本丛书数学高二（下）（理科）每章由三部分构成。第一部分为“目标聚焦”，旨在使学生宏观地把握各章内容。第二部分为“分节学习”，每节内容包括“导学提要”和“题海冲浪”两部分，其中“导学提要”又包括“内容导读”“要点解析”“案例剖析”“思维拓展”“方法提炼”五个部分，旨在通过对教材的学习和探究，开启心智，加深对教材的理解和掌握。其中学生用书中的“案例剖析”无详细的解答过程，但留有足够的空白，旨在方便师生交流。通过“题海冲浪”，以达到学以致用，解决实际问题的目的。为方便教师教学，做到好用实用、易学易教，全书各节安排有一定数量的备选例题，可供教师根据本校学生实际情况选用。第三部分为“学习回顾”，包括“归纳整理”“练习平台”“学习感悟”三个方面的内容，旨在倡导一种个性化的学习方式。

本册书由王洪英、杨顺友、王少华、谭真会、蒋文平、杨善林、徐睿婧、刘元江、刘开林、曾祥元、吴晓东、邓伟民、先立树编写。

由于本书编写时间紧迫，书中难免存在不足之处，欢迎批评指正，以便改进。

高中导学与探究丛书编写组

2009年1月



第二册（下 B）

第十章 排列、组合和二项式定理	1
10.1 分类计数原理与分步计数原理	1
10.2 排 列	6
10.3 组 合	13
10.4 二项式定理	20
学习回顾	28
第十一章 概 率	32
11.1 随机事件的概率	32
11.2 互斥事件有一个发生的概率	38
11.3 相互独立事件同时发生的概率	46
学习回顾	56

第三册（选修 II）

第一章 概率与统计	60
1.1~1.2 随机变量	60
1.3~1.6 统 计	69
学习回顾	77
第二章 极 限	81
2.1 数学归纳法及其应用举例	81

2.2 数列的极限	88
2.3 函数的极限	95
2.4 极限的四则运算	101
2.5 函数的连续性	106
学习回顾	112
第三章 导 数	116
3.1 导数的概念	117
3.2 几种常见函数的导数	123
3.3 函数的和、差、积、商的导数	128
3.4 复合函数的导数	133
3.5 对数函数与指数函数的导数	137
3.6 函数的单调性	143
3.7 函数的极值	150
3.8 函数的最大值与最小值	156
学习回顾	165
专题 函数的最(或极)值、值域问题	169
第四章 复 数	186
4.1 复数的概念及数系的扩充	186
4.2~4.3 复数的运算	192
学习回顾	201



第十章 排列、组合和二项式定理

【目标聚焦】

1. 掌握分类计数原理与分步计数原理，并能用它们分析和解决一些简单的应用问题.
2. 理解排列与组合的意义，掌握排列数与组合数的计算公式，掌握组合数的两个性质，并能用它们解决一些简单的应用问题.
3. 掌握二项式定理和二项展开式的性质，并能用它们计算和证明一些简单的问题.

本章教材共分为四部分：第一部分是分类计数原理与分步计数原理；第二部分是排列；第三部分是组合；第四部分是二项式定理.

本章重点：分类计数原理与分步计数原理，排列和组合的意义，以及排列数和组合数的计算公式，二项式定理.

本章难点：如何正确运用有关公式解决应用问题. 在解决问题时，由于问题本身和有关公式的理解不够准确，常常发生重复、遗漏计算和用错公式的情况. 为了突破这一难点，教学中应强调一些容易混淆的概念之间的联系与区别，强调运用各个公式的前提条件，并对学生计算中出现的一些典型错误进行认真剖析.

10.1 分类计数原理与分步计数原理

【导学提要】

一、内容导读

1. 分类计数原理

完成一件事，有 n 类办法，在第 1 类办法中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n$ 种不同的方法，这就是分类计数原理，也叫加法原理.

2. 分步计数原理

完成一件事，需要分成 n 个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种

不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times m_3 \times \cdots \times m_n$ 种不同的方法, 这就是分步计数原理.

二、要点解析

1. 教材中, 分类计数原理与分步计数原理都是在实例的基础上提出的, 两个原理都是涉及完成一件事的不同方法的种数. 它们的区别在于: 分类计数原理与“分类”有关, 各种方法相互独立, 用其中任何一种方法都可以完成这件事; 分步计数原理与“分步”有关, 各个步骤相互依存, 只有各个步骤都完成了, 这件事才算完成.

2. 分类计数原理与分步计数原理不仅是推导排列数、组合数计算公式的依据, 而且其基本思想方法贯穿于解决本章应用问题的始终. 事实上, 从思想方法的角度看, 分类计数原理的应用是将一个问题进行“分类”的思考, 分步计数原理是将问题进行“分步”的思考, 从而达到分解问题、解决问题的目的. 因此, 学生对这两个原理的掌握与运用, 成为学好本章内容的一个关键.

3. 多联系实例去理解分类计数原理与分步计数原理. 同理, 一定要明确两原理的区别, 可将它们对比学习.

4. 要在从理论到例题, 从例题理解理论的循环往复过程中提高对两原理的认识.

5. 从集合的角度看, 两个原理的意义及其区别就显得更加清楚.

完成一件事有 A, B 两类办法, 即集合 A, B 互不相交, 在 A 类办法中有 m_1 种方法, B 类办法中有 m_2 种方法, 即 $\text{card}(A) = m_1, \text{card}(B) = m_2$, 那么完成这件事的不同方法的种数是 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) = m_1 + m_2$, 这就是当 $n = 2$ 时的分类计数原理.

完成一件事需要分成 A, B 两个步骤, 在实行 A 步骤时有 m_1 种方法, 在实行 B 步骤时有 m_2 种方法, 即 $\text{card}(A) = m_1, \text{card}(B) = m_2$, 那么完成这件事的不同方法种数是 $\text{card}(A \cdot B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B) = m_1 \times m_2$, 这就是当 $n = 2$ 时的分步计数原理.

6. 在运用分步计数原理解决问题时, 当完成每一步的方法数均为 m (即 $m_1 = m_2 = \cdots = m_n$) 且 m 与 n 相近时, 所得结果常常发生 m^n 与 n^m 之间的混淆, 为了避免这种混淆, 教科书在习题 10.1 中安排了第 6 题, 这里我们又安排了例 4(2)(3) 及题海冲浪中的 5, 6 题. 正确解答这些题的关键在于弄清“谁选择谁”.

三、案例剖析

例 1 一个口袋内装有 5 个小球, 另一个口袋内装有 4 个小球, 所有这些小球颜色互不相同.

(1) 从两个口袋内任取一个小球, 有多少种不同的取法?

(2) 从两个口袋内各取一个小球, 有多少种不同的取法?

解: (1) 若从一口袋内任取一球有 5 种不同的方法, 从另一口袋内任取一球有 4 种不同的方法, 无论从哪个口袋中取出一球都算完成这件事, 根据加法原理, 共有 $5 + 4 = 9$ 种不同的方法.

(2) 各取一个小球, 就是从两个口袋中分别取一个球, 都取完才算完成这件事, 根据乘法原理, 共有 $5 \times 4 = 20$ 种不同的方法.

例 2 在所有的两位数中, 个位数字比十位数字大的两位数有多少个?

解: 分析个位数字, 可以分以下几类:

个位数字是9, 则十位数字可以是1, 2, 3, $\dots$, 8中的一个, 故有8个;

个位数字是8, 则十位数字可以是1, 2, 3, $\dots$, 7中的一个, 故有7个.

同理: 个位是7的有6个, 个位是6的有5个, $\dots$, 个位是2的有1个.

由分类计数原理知, 满足条件的两位数有 $1+2+3+\dots+8=36$ 个.

变式: 十位数字比个位数字大的两位数有多少个?

解法一: 个位、十位数字相等的有9个: 11, 22, 33, $\dots$, 99,

而个位比十位大的有36个, 所有两位数有 9×10 个,

故所求为 $90-9-36=45$ 个.

解法二: 个位数字取0时, 十位可取方法有9种

个位数字取1时, 十位可取方法有8种

个位数字取2时, 十位可取方法有7种

个位数字取3时, 十位可取方法有6种

个位数字取4时, 十位可取方法有5种

个位数字取5时, 十位可取方法有4种

个位数字取6时, 十位可取方法有3种

个位数字取7时, 十位可取方法有2种

个位数字取8时, 十位可取方法有1种

故所求为 $9+8+7+\dots+1=\frac{(9+1) \times 9}{2}=45$ 个

例3 如果把两条异面直线看成“一对”, 那么六棱锥的棱所在的12条直线中, 异面直线共有多少对?

解: 把六棱锥所有棱分成三类:

第一类: 底面上的六条棱所在的直线共面, 每两条之间不能构成异面直线.

第二类: 六条侧棱所在的直线共点, 每两条之间也不能构成异面直线.

第三类: 综合图可知, 只有底面棱所在直线与它不相交的4条侧棱所在的4条直线才能构成异面直线, 再由分步计数原理, 可构成异面直线 $6 \times 4 = 24$ 对.

四、思维拓展

例4 (1) 8本不同的书, 任选3本分给3个同学, 每人1本, 有多少种不同的分法?

(2) 将4封信投入3个邮筒, 有多少种不同的投法?

(3) 3位旅客到4个旅馆住宿, 有多少种不同的住宿方法?

解: (1) 分三步, 每位同学取书1本, 第1, 2, 3个同学分别有8, 7, 6种取法, 因而由乘法原理知不同分法共有 $N=8 \times 7 \times 6=336$ 种.

(2) 完成这件事可分作4个步骤, 第一步投第一封信, 可以在3个邮筒中任选一个, 因此有3种投法, 第二步投第二封信, 同样有3种投法, 第三步投第三封信, 也同样有3种投法, 第四步投第四封信, 仍然有3种投法, 由乘法原理, 可以得出投法有 $N=3 \times 3 \times 3 \times 3=81$ 种.

(3) 分三步, 每位旅客都有4种不同的住宿方法, 因此共有不同方法 $N=4 \times 4 \times 4=64$ 种

注：同学易将(2)(3)题的底数、指数弄反，解决这一难点的关键是“谁选择谁”。如(2)中是“信选择邮筒”还是“邮筒选择信”。

例5 在区间 $[1, 200]$ 内的自然数中，有多少个数位上都不含数字5的数？

解法一：一位数中不含数字5的数共有8个，两位数中不含数字5的数可分两步来确定，其个位数字除5以外，还有9种选法，十位数则还有8种选法，根据分步计数原理可知，共有 $9 \times 8 = 72$ 个。三位数中不含数字5的数可分为3步来确定，百位数字是1时，有 $9 \times 9 = 81$ 个，百位数字是2时，仅是200，即1个，所以有 $81 + 1 = 82$ 个。

因此满足条件的数共有 $N = 8 + 72 + 82 = 162$ 个。

解法二：个位含5且十位不含5的： $1 + 8 \times 1 + 1 \times 9 \times 1 = 18$ 个。

十位上含5且个位数不再含5的： $1 \times 9 + 1 \times 1 \times 9 = 18$ 个。

十位个位都含5的：只有55与155这两个。

而在区间 $[1, 200]$ 内共有自然数200个。所以所求为 $200 - 18 - 18 - 2 = 162$ 个。

五、方法提炼

1. 分类计数原理与分步计数原理的运用贯穿于全章学习的始终，实际上，这两个原理体现了解决问题时将其分解为两种常用方法：分类解决和分步解决。
2. 当题目中的每种方法都能独立完成要求的一件事时，用分类计数原理。
3. 当题目中的每步都不能独立完成一件事时，用分步计数原理。
4. 在分类计数原理和分步计数原理都用到时，一般是先“分类”后“分步”。
5. 在分类时一定要把握好分类标准，在分步时一步也不能少，顺序可以变化。

题海冲浪

一、基础训练

1. 书架上层放有5本不同的文学书，中层放有3本不同的工具书，下层放有6本不同的数学参考书，从中任取一本书的不同取法种数是 (A)

A. $5 + 3 + 6 = 14$ B. $5 \times 3 \times 6 = 90$ C. 1 D. 3

解：任取一本书需分类完成，由分类计数原理知选A。

2. 由数字1, 2, 3, 4, 5, 6可以组成没有重复数字的两位数的个数是 (C)

A. 11 B. 12 C. 30 D. 36

解：十位数字的选法为6种不同方法，个位数字的选法为5种不同选法，所以组成两位数的个数为 $6 \times 5 = 30$ 。

3. 高二(3)班4名学生参加数、理、化3个课外活动小组，每人限报一组，则不同的报名情况有 (A)

A. 3^4 B. 4^3 C. $3 \times 2 \times 1$ D. $4 \times 3 \times 2$

解：每名学生都有3种不同的报名方法，由分步计数原理知选A。

4. 若 $x \in \{1, 2, 3\}$, $y \in \{5, 7, 9\}$ ，则 $x \times y$ 的不同值的个数是 (C)

A. 2 B. 6 C. 9 D. 8

解： x 值有3种取法， y 值有3种取法，又乘积各不相同， $\therefore$ 共有 $3 \times 3 = 9$ 种。

5. 5名旅客在3家旅店投宿的方法种数是 (B)

A. 5^3 B. 3^5 C. 15 D. 8

解: 每位旅客都有3种不同的投宿方法, 因此共有不同方法 $N=3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3=3^5$ 种.

6. 某公共汽车上有10名乘客, 沿途有5个车站, 乘客下车的可能方式有 5^{10} 种.

解: 每名乘客均有5种下车方式, 10名乘客共有 5^{10} 种下车方式.

7. 已知集合 $A \subseteq \{1, 2, 3\}$, 且 A 中至少有一个奇数, 则这样的集合有 6 个.

解: 当 A 含有一个元素时, $A = \{1\}$ 或 $\{3\}$, 当 A 含有2个元素时, $A = \{1, 2\}$ 或 $\{2, 3\}$ 或 $\{1, 3\}$, 当 A 含有3个元素时, $A = \{1, 2, 3\}$, 所以共有6个集合.

8. 若 $x, y \in \mathbf{N}^*$, 且 $x+y \leq 6$, 则有序自然数对 (x, y) 共有 15 个.

解: 当 x 分别取1, 2, 3, 4, 5时, y 对应分别有5, 4, 3, 2, 1种取法, 由分类计数原理共可组成 $5+4+3+2+1=15$ 个有序数对.

9. 有3个袋子, 其中一个袋子装有红色小球20个, 每个球上标有1~20中的一个号码; 一个袋子装有白色小球15个, 每个球上标有1~15中的一个号码; 另一个袋子装有黄色小球8个, 每个球上标有1~8中的一个号码.

(1) 从袋子里任取一个小球, 有多少种不同的取法?

(2) 从袋子里任取红、白、黄色球各一个, 有多少种不同的取法?

解: (1) 任取一个小球的方法可分三类, 一类取红球, 有20种取法, 一类取白球, 有15种取法, 一类取黄球, 有8种取法, 由分类计数原理共有 $20+15+8=43$ 种不同的取法.

(2) 取三色小球各一个, 可分三步完成, 先取红球, 有20种取法, 再取白球, 有15种取法, 最后取黄球, 有8种取法, 由分步计数原理, 共有 $20 \times 15 \times 8=2400$ 种不同的取法.

10. 用0, 1, 2, 3, 4, 5可以组成多少个无重复数字的比2000大的4位偶数?

解: 分三类: 第一类用0作尾数的有 $4 \times 4 \times 3$ 个; 第二类用2作尾数的有 $3 \times 4 \times 3$ 个; 第三类用4作尾数的有 $3 \times 4 \times 3$ 个.

故符合条件的三位数共有 $4 \times 4 \times 3 + 3 \times 4 \times 3 + 3 \times 4 \times 3 = 120$ 个.

二、能力提高

11. 满足 $A \cup B = \{1, 2\}$ 的集合 A, B 共有多少组?

解: 分四类: (1) $A = \emptyset, B = \{1, 2\}$ 有1组; (2) $A = \{1\}$ 时, $B = \{2\}$ 或 $\{1, 2\}$ 有2组; (3) $A = \{2\}$ 时, $B = \{1\}$ 或 $\{1, 2\}$ 有2组; (4) $A = \{1, 2\}$ 时, $B = \emptyset$ 或 $\{1\}$ 或 $\{2\}$ 或 $\{1, 2\}$ 有4组, 故共有 $1+2+2+4=9$ 组.

12. 已知集合 $M = \{-3, -2, -1, 0, 2, 3\}$, $P(a, b)$ 是坐标平面上的点, $a, b \in M$.

(1) P 可表示多少个不同的点?

(2) P 可表示多少个坐标轴上的点?

(3) P 可表示多少个第二象限内的点?

(4) P 可表示多少个不在直线 $y=x$ 上的点?

解: (1) $6 \times 6 = 36$ 个; (2) $5+5+1=11$ 个; (3) $3 \times 2 = 6$ 个; (4) $36-6=30$ 或 $6 \times 5 = 30$ 个.

13. 教室里安装 6 盏日光灯, 6 个开关, 一个开关只控制一盏灯, 则开灯照明的方法有多少种?

解: 每盏灯有开与关 2 种可能性, 6 盏灯共有 $2^6 = 64$ 种, 6 盏灯全关只有一种可能, 故有 $64 - 1 = 63$ 种开灯方法.

【备选例题】

1. 在编号为 1, 2, 3, 4 的四块土地上分别试种编号为 1, 2, 3, 4 的四个品种的小麦, 但 1 号地不能种 1 号小麦, 2 号地不能种 2 号小麦, 3 号地不能种 3 号小麦, 那么有多少种不同的试种方案?

解: 分两类: (1) 4 号地种 4 号小麦, 1 号地有 2 种试种方法, 2, 3 号地只有 1 种试种方法, 所以共有 2 种试种方法; (2) 土地编号与小麦编号都不相同, 第 1 号土地有 3 种试种方法, 若第 1 号地种的是第 i 号小麦, 则第 i 号土地有 3 种种法, 余下的两块地只有 1 种种法, 共有 $3 \times 3 = 9$ 种试种方法, 由分类计数原理, 试种方案共有 $2 + 9 = 11$ 种.

2. 集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 有 5 个元素, 集合 $B = \{m, n, f, g\}$ 有 4 个元素, 求:

- (1) 从集合 A 到集合 B 可以建立不同映射的个数;
- (2) 从集合 B 到集合 A 可以建立不同映射的个数.

解: 根据映射定义及分步计数原理可得

- (1) 可建立起 $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ 个不同映射;
- (2) 可建立起 $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ 个不同映射.

10.2 排 列

【导学提要】

一、内容导读

1. 排列

一般地, 从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素, 按照一定的顺序排成一列, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

2. 排列数

从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有排列的个数, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数, 用符号 A_n^m 表示.

3. 排列数公式

(1) $A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1}$, $m, n \in \mathbf{N}^*$, 且 $m \leq n$, 这个公式叫做排列数公式.

(2) 全排列、阶乘及排列数公式的阶乘表示

①全排列: n 个不同元素全部取出的一个排列, 叫做 n 个不同元素的一个全排列.

②阶乘: 自然数 1 到 n 的连续积, 叫做 n 的阶乘, 用 $n!$ 表示.

③ $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(n-m)\cdots\times 2\times 1}{(n-m)\cdots\times 2\times 1} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

④规定 $0! = 1$.

二、要点解析

本节知识的学习要在掌握上节中两个原理的基础上, 特别是运用分步计数原理来理解排列的定义、排列数的含义及排列数计算公式, 并理解和掌握排列应用问题的常用解法技巧.

1. (1) 排列的定义中包括两个基本内容, 一是“取出元素”, 二是“按一定顺序”.

(2) 排列的一个重要特征, 是每一个排列不仅与选取的元素有关, 而且与这些元素的排列顺序有关. 选取的元素不同, 或者元素相同但排列顺序不同, 都是不同的排列. 从定义知, 两个排列相同, 当且仅当这两个排列的元素完全相同; 而且元素的排列顺序也完全相同; 而元素完全不同, 或元素部分相同, 或元素相同而顺序不同的排列, 都不是同一排列, 叫不同排列.

2. 排列数定义的理解

(1) 从 6 个不同元素中, 取出 4 个元素的排列数表示为 A_6^4 ; 从 5 个不同元素中, 取出 3 个元素的排列数表示为 A_5^3 ; 从 7 个不同元素中, 取出 7 个元素的排列数表示为 A_7^7 .

(2) 排列和排列数是两个不同的概念. 排列是指“从 n 个不同元素中, 任取 m 个元素, 按照一定的顺序排成一排”, 它不是一个数, 而是具体的一个排列 (也就是具体的一件事); 排列数是指“从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的所有排列的个数”, 它是一个数.

如: 从 3 个元素 a, b, c 中每次取出 2 个元素, 按照一定的顺序排成一排, 有如下几种: ab, ac, ba, bc, ca, cb , 每一种都是一个排列, 共有 6 种, 而数字 6 就是排列数. 符号 A_n^m 表示排列数, 在此列中 $A_3^2 = 6$.

3. 关于排列数公式的几点注意

(1) 这个公式是在 $m, n \in \mathbf{N}^*$, $m \leq n$ 时成立, $m > n$ 时不成立.

(2) 这个公式右边是 m 个数的连乘积, 形式较复杂, 其特点是: 公式右边的第一个因数是 n , 后面的每一个因数都比它前面的因数少 1, 最后一个因数为 $n-m+1$, 共有 m 个因数相乘, 最后一个因数 $n-m+1$ 是由从第 m 步填空, 余下 $n-(m-1)$ 个元素中任取一个填空得到, 即 $n-(m-1) = n-m+1$. 要切记, 实际上这个公式有 3 个特点: 第一个因数是 n , 最后一个因数是 $n-m+1$, 共 m 个连续自然数的连乘积.

(3) 公式 $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ 主要有两个作用, 一是当 n, m 较大时, 由于从科学计算器上可直接按出相应的阶乘数, 因此用上面公式计算排列数较方便; 二是当对含有字母的排列数的式子进行变形和论证时, 常写成这种形式去互相沟通.

(4) “排列”这一节研究的主要问题, 就是导出从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数公式, 并运用这个公式去解决有关排列数的应用问题.

三、案例剖析

例 1 计算下列各题:

(1) A_{15}^2 ;

(2) A_6^6 ;

(3) $\frac{A_{n-1}^{m-1} \cdot A_{n-m}^{n-m}}{A_{n-1}^{n-1}};$

$$(4) 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n!; \quad (5) \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{(n-1)}{n!}.$$

解: (1) $A_{15}^2 = 15 \times 14 = 210$.

(2) $A_6^6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

(3) 原式 $= \frac{(n-1)!}{(n-m)!} \times (n-m)! \times \frac{1}{(n-1)!} = 1$.

(4) 原式 $= (2! - 1) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots + [(n+1)! - n!] = (n+1)! - 1$.

(5) $\therefore \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$,

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$.

例2 一条铁路原有 n 个车站, 为了适应客运需要, 增加了 m 个车站 ($m > 1$), 客运车票增加了 62 种, 问原有多少个车站? 现有多少个车站?

解: $\because$ 原有车站 n 个, $\therefore$ 原有客运车票 A_n^2 种,

又现有 $(n+m)$ 个车站, $\therefore$ 现有客运车票 A_{n+m}^2 种.

$\therefore A_{n+m}^2 - A_n^2 = 62$,

$\therefore (n+m)(n+m-1) - n(n-1) = 62$,

$\therefore n = \frac{31}{m} - \frac{m-1}{2} > 0, \frac{62-m(m-1)}{2m} > 0$,

即 $m(m-1) < 62$,

又 $m > 1$,

$\therefore 1 < m \leq 8$,

当 $m=2$ 时, $n = \frac{31}{2} - \frac{2-1}{2} = 15$,

当 $m=3, 4, 5, 6, 7, 8$ 时, n 均不为整数,

故只有 $n=15, m=2$, 即原有 15 个车站, 现有 17 个车站.

例3 (1) 有 5 本不同的书, 从中选 3 本送给 3 名同学, 每人各一本, 共有多少种不同的送法?

(2) 有 5 种不同的书, 要买 3 本送给 3 名同学, 每人各一本, 共有多少种不同的送法?

解: (1) 从 5 本不同的书中选出 3 本分别送给 3 名同学, 对应于从 5 个元素中任取 3 个元素的一个排列, 因此不同的送法有 $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ 种.

(2) 由于 5 种不同的书, 送给每个同学 1 本书都有 5 种不同的选购方法, 因此送给 3 名同学每人各一本书的不同送法种数是 $5 \times 5 \times 5 = 125$ 种.

四、思维拓展

例4 4 个男生和 3 个女生排成一排, 满足下列条件分别有多少种站法?

(1) 甲不站在两端;

(2) 甲、乙两人不能站在两端;

(3) 甲、乙两人之间间隔两人;

(4) 4 名男生站在一起, 3 名女生站在一起;

(5) 男、女互相间隔开;

(6) 3 名女生排列顺序一定.

解: (1) 解法一: “从位置着手”, 甲不站两端, 分两步排列, 首先从甲以外的 6 个人任选两人站在左右两端, 有 A_6^2 种方法, 然后让剩下的 5 个人站中间 5 个位置, 有 A_5^5 种方法, 因此共有 $A_6^2 \times A_5^5 = 3600$ 种方法.

解法二: “从元素着手”, 甲不站两端, 分两步排列, 首先排甲, 有 A_5^1 种方法, 第二步让其他 6 个人站其他 6 个位置, 有 A_6^6 种方法, 共有 $A_5^1 \times A_6^6 = 3600$ 种.

解法三: “插空法”, 第一步让甲以外的人站队, 有 A_6^6 种方法, 第二步让甲插入这 6 个人之间的空当中, 有 A_5^1 种方法, 共有 $A_6^6 \times A_5^1 = 3600$ 种.

解法四: “间接法”, 在排队时, 对 7 个人不考虑甲的站法任意排, 有 A_7^7 种方法, 但其中包括甲在两端的情况有 $2A_6^6$ 种, 因此共有 $A_7^7 - 2A_6^6 = 3600$ 种.

(2) 解法一: $A_5^2 \times A_5^5 = 2400$.

解法二: $A_7^7 - A_2^2 \times A_5^5 - 2A_2^1 \times A_5^1 \times A_5^5 = 2400$.

(3) $A_5^2 \times A_2^2 \times A_4^4 = 960$. 分三步, ①从甲乙以外的 5 个人中任选 2 人排在甲乙之间的两个位置上, 有 A_5^2 种; ②把甲乙及中间 2 人看做一个元素与剩下的 3 人进行全排列, 有 A_4^4 种; ③对甲乙进行全排列.

(4) 解法一: $2A_4^1 \times A_3^3 = 288$.

解法二: 捆绑法: $A_2^2 \times A_4^4 \times A_3^3 = 288$.

(5) $A_4^4 \times A_3^3 = 144$.

(6) 7 个位置上任意排 7 个学生, 有 A_7^7 种排法, 由于女生的顺序一定, 而在 A_7^7 中每一种情况均以 A_3^3 计算, 故 3 名女生顺序一定的排法有 $\frac{A_7^7}{A_3^3} = 840$ 种.

例 5 用 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 这 7 个数字组成没有重复数字的四位数.

(1) 如果组成的四位数必须是偶数, 那么这样的四位数有多少个?

(2) 如果组成的四位数必须大于 6500, 那么这样的四位数有多少个?

解: (1) 个位: A_3^1 , 千, 百, 十位上的数有 A_6^3 种, 共有 $A_3^1 \times A_6^3 = 360$ 个.

(2) 分类: 千位取 6 或 7, 共有 $A_3^3 + A_2^1 \times A_5^3 = 160$ 个.

五、方法提炼

1. 解答排列问题的理论依据是排列的定义, 主要工具是排列数公式以及两个基本原理, 在合理分类、分步时常用的有效方法有:

(1) 部分元素要排在某些特殊位置时要优先予以考虑, 即用“优先法”, 可优先考虑“特殊位置”, 也可优先考虑“特殊元素”.

(2) 反面情形比较简单时, 可先计算反面情形, 再从所有情形中减掉, 即用逆向思考方式(或间接法).

(3) 部分元素要排在一起时, 可将它们排列后视为一个元素, 再和其他元素排列, 即为“捆绑法”.

(4) 某些元素要求隔开(不相邻)或顺序有规定时, 可先排其余元素, 再用“插空法”.

2. 有限制条件的排列问题, 大多需要分类讨论. 掌握解决排列应用题的三大主要方

法:直接法(正向思考)、间接法(逆向思考)、分类法.

3. 解决应用问题时,要做到“不重不漏”,考虑全面,谨防重复或遗漏.

题海冲浪

一、基础训练

1. $100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times 89 =$ (C)

A. A_{100}^{10}

B. A_{100}^{11}

C. A_{100}^{12}

D. A_{100}^{13}

解:由排列数公式知道选 C.

2. $\frac{(A_7^6 - A_6^5)}{A_5^4}$ 的值为 (A)

A. 36

B. 30

C. 24

D. 12

解:原式 $= (7! - 6!)/5! = 7 \times 6 - 6 = 36$.

3. 不等式 $A_{n-1}^2 + n \leq 10$ 的解为 (C)

A. $n = 3$

B. $n = 4$

C. $n = 3$ 或 $n = 4$

D. $n = 3$ 或 $n = 4$ 或 $n = 5$

解:运用排列数公式并检验知道选 C.

4. 7 名学生站成一排,其中甲不能站在排头的不同排法种数是 (B)

A. $A_6^1 A_7^6$

B. $A_6^1 A_6^6$

C. A_7^6

D. $A_7^7 - 2A_6^5$

5. 有 8 个大小相同的球,上面分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 现任取 3 个球,则恰有两个球的序号相邻的取法有 (D)

A. 24 种

B. 28 种

C. 35 种

D. 30 种

解:联号 2 球取 1, 2 号或 7, 8 号时,第 3 个球就只有 5 种取法;联号 2 球取 2, 3 号或 3, 4 号或 4, 5 号或 5, 6 号或 6, 7 号时,第 3 个球只有 4 种取法. 故所求取法数为 $5 \times 2 + 4 \times 5 = 30$. 所以选 D.

6. 4 名男生和 4 名女生站成一排,若男、女相间,则有 1152 种不同的站法.

解:先排男生有 A_4^4 种方法,由于 4 男产生的 5 个空隙(含两端)去排女生有 2 种方法,靠左插与靠右插,都有 A_4^4 种不同排法,如女男女男女男女男或男女男女男女男女,故所有排法为 $2A_4^4 \times A_4^4 = 1152$.

7. 由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的六位数,其中个位数字小于十位数字的共有 300 个.

解:个位数字小于十位数字与个位数字大于十位数字的六位数个数相等,而组成的六位数共有 $A_6^6 - A_5^5 = 600$ 个,所以符合条件的六位数有 300 个.

8. 2 个男生和 4 个女生排成一排,其中男生既不相邻也不排两端的不同排法有 144 种.

解:先排 4 个女生有 A_4^4 种,然后让 2 个男生插入中间三个空中的两个位置有 A_3^2 种排法,据分步计数原理知有 144 种.

9. (1) 求下列各式中的 n 值:

① $A_{2n+1}^4 = 140A_n^3$;

② $3A_8^n = 4A_9^{n-1}$.

(2) 求证: ① $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$;

② $A_n^m = mA_{n-1}^{m-1} + A_{n-1}^m$.

解: (1) ① $n=3$; ② $n=6$.

(2) 证明: ① $nA_{n-1}^{m-1} = n \frac{(n-1)!}{(n-1-m+1)!} = \frac{n!}{(n-m)!} = A_n^m$;

$$\begin{aligned} \text{② 右边} &= m \frac{(n-1)!}{(n-1-m+1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-m)!} = \frac{m(n-1)!}{(n-m)!} + \frac{(n-m)(n-1)!}{(n-m)!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!} \\ &= A_n^m. \end{aligned}$$

10. 某小组 6 人排队照相.

(1) 若分成两排, 前排 2 人, 后排 4 人, 有多少种不同的排法?

(2) 若排成一排, 其中甲必须排在乙的右边(可以不相邻), 有多少种不同的排法?

解: (1) 6 个人站成两排, 就是 6 个人站在 6 个位置上, 所以不同排法总数为 $A_6^6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ 种.(2) 因为甲在乙的右边和甲在乙的左边一样多, 所以甲在乙的右边的不同的排法是 A_6^6 的一半, 即 360 种.

二、能力提高

11. 用五种不同颜色给图中四个区域涂色, 每个区域涂一种颜色.

(1) 不同的涂色方法共有多少种?

(2) 若要求相邻(有公共边)的区域不同色, 则不同涂色方法共有多少种?

1	4
2	3

11 题图

解: (1) 5^4 .(2) $5 \times 4 \times (1 \times 4 + 3 \times 3) = 260$ 种.

12. 由 0, 1, 2, 3, 4, 5 这 6 个数字组成没有重复数字的六位数, 其中小于 50 万又不是 5 的倍数的数有多少个?

解法一: 因为首位和个位上均不能排 0 和 5, 所以先从 1, 2, 3, 4 中任选 2 个排在首位和个位, 有 A_4^2 种排法, 再排中间 4 位数有 A_4^4 种排法, 因此共有 $A_4^2 \cdot A_4^4 = 288$ 个符合要求的六位数.解法二: 先排 0, 5 有 A_4^2 种方法, 再排其他数字有 A_4^4 种排法, 所以有 $A_4^2 \cdot A_4^4 = 288$ 个符合要求的六位数.解法三: 6 个数字的全排列共有 A_6^6 个, 其中 0 排在首位或个位上的有 $2A_5^5$ 个, 还有 5 排在首位或个位上也有 $2A_5^5$ 个, 它们都不合要求应舍去, 但这两种情况都包含 0 和 5 分别在首位或个位上的排法 $2A_4^4$ 种, 所以有 $A_6^6 - 4A_5^5 + 2A_4^4 = 288$ 个符合要求的六位数.

13. 某工程队有 6 项工程需要先后单独完成, 其中工程乙必须在工程甲完成后才能进

行,工程丙必须在工程乙完成后进行,又工程丁必须在工程丙完成后立即进行,那么安排这6项工程的不同排法有多少种?

解:据题意,由于丁必须在丙完成后立即进行,故可把两个视为一个大元素,先不管其他限制条件,使其与其他四项进行排列,共有 A_5^5 种排法,在所有的这些排法中,甲、乙、丙对排顺序共有 A_3^3 种,故满足条件的排法总数共有 $\frac{A_5^5}{A_3^3}=20$ 种.

【备选例题】

1. 7名学生按下列要求排成一排,分别有多少种排法?

- (1) 甲必须站在正中,且乙与甲相邻;
- (2) 甲、乙、丙必须相邻;
- (3) 甲、乙不能相邻;
- (4) 甲、乙必须相邻,而丙不在排头或排尾;
- (5) 甲、乙必须相邻,丙、丁不能相邻;
- (6) 7名学生中有4男3女,3名女生必须按身高从高到矮排列.

解:(1) 先排乙有2种方法,再排其余5位同学有 A_5^5 种方法,故共有 $2A_5^5=240$ 种排法.

(2) $A_3^3 \times A_5^5=720$ 种.

(3) $A_5^5 \times A_6^2=3600$ 种.

(4) $A_2^2 \times A_4^1 \times A_5^5=960$ 种.

(5) $A_2^2 \times A_4^4 \times A_5^2=960$ 种.

(6) 7个学生的所有排列中,3名学生交换顺序得到的排列只对应一个符合题意的排队方式,故共有 $\frac{A_7^7}{A_3^3}=840$ 种排法.

2. 用一颗骰子连掷三次,投掷出的数字顺序排成一个三位数,此时:

- (1) 各位数字互不相同的三位数有多少个?
- (2) 可以排出多少个不同的三位数?
- (3) 在三位数字中恰好有两个相同的数有多少个?

解:(1) $A_6^3=120$ 个.

(2) 每掷一次,出现的数字均有6种可能性,故有 $6 \times 6 \times 6=216$ 个.

(3) 两个数字相同有三种可能性,分别为第一、二位,第二、三位,第三、一位相同,而每种情况有 6×5 种,故有 $3 \times 6 \times 5=90$ 个.