

高考
试题研究

天利38套

常考基础题

状态保持训练

2011高考必备

- ◎必会基础知识
- ◎考点查漏补缺

数学
(理科)

图书在版编目(CIP)数据

高考研究. 数学/北京天利考试信息网编.
—拉萨:西藏人民出版社,2008.11(2010.7重版)
ISBN 978-7-223-02350-4
I. 高… II. 北… III. 数学课—高中—升学参考资料 IV. G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 205527 号

高考研究. 数学

——新课标常考难题新题训练(数学·理科)

作者 本书编写组

责任编辑 李海平 李娟

装帧设计 王晓坤

出版 西藏人民出版社

社址 拉萨市林廓北路 20 号 邮政编码 850000

北京发行部:100013 北京市东土城路 8 号林达大厦 A 座 13 层

电话:010—64466399(邮购)、64466473(批销)

打击盗版:13651009426

印刷

经销 全国新华书店

开本 16 开(787×1 092)

印张 5 字数 145 千

版次 2010 年 7 月第 7 版第 2 次印刷

标准书号 ISBN 978-7-223-02350-4

定价 8.50 元



编写说明

在高三复习过程中,研究高考真题,关注高考热点,强化特殊训练,对备战高考具有指导性的作用。为了让同学们不再受“学习时间紧,复习效率不高,学习成绩进步不明显”诸类问题的困扰,我们联合一线名师精心编写了这套《新课标常考难题新题训练》,以提升考生的解题能力,能举一反三,掌握各种题型的通性通法,提升考生在考试中的夺分能力,在高考中取得优异成绩。

本书含语文、数学(文科)、数学(理科)、英语、政治、历史、地理、物理、化学和生物10科册。

本书包括三部分:

试题探究 → 如何从高考试题中明确科学的复习方向,如何以一道高考题而达到举一反三的成效,解密各地高考新题难题命题玄机,试题探究部分对所选的每一道试题都进行了深入研究,探讨方法,传授技巧,指导考生突破高考复习过程中正确解题难、灵活运用难、有效得分难三大瓶颈,使考生的成绩再上一个新台阶。

特殊训练 → 近年来,创新试题频繁出现在高考中。从抽样调查结果看,考生得分率并不高;从高考考查的知识点看,很多内容都在重复考查,只不过考查的角度不同,命题者进行了创新设计而已。为方便广大考生更好地掌握这类题型,我们为考生准备了新颖的特殊训练专题,帮助考生查漏补缺、检测复习效果,以期大家能从中得到一些启示。

名校名题 → 名校名题为读者展示最新、最快、最优的全国各地名校联考试题。这些试题命制科学、立意新颖、答案详细,适合读者自测复习。

总之,强调训练、强调操作、强调实用是我们编写这套复习备考资料的指导思想,让考生用最少的的时间取得最大的学习效果是我们的追求目标。在编写过程中,尽管我们研究了最新的高考信息,分析了考生复习中存在的盲点和误区,但限于时间仓促,本书不可能涵盖所有类型的特殊训练,希望考生以此为契机,注意难易程度的合理搭配,思考难题与基本题型的演变关系,同时还要重视对题型的思考和总结。

当你手头备有这本书时,就会感到这一批经验丰富的特级、高级教师在关心你,呵护你,在暗暗为你加油鼓劲,为你增加动力、增添信心、增强实力,金榜题名非你莫属。

本书编写组

2010年7月

目录

试题探究

研究高考试题,轻松把握高考	(1)
---------------------	-----

特殊训练

新题探究训练与热点题训练(一)	(5)
新题探究训练与热点题训练(二)	(7)
新题探究训练与热点题训练(三)	(9)
新题探究训练与热点题训练(四)	(11)
新题探究训练与热点题训练(五)	(13)
难题夺分训练(一)	(15)
难题夺分训练(二)	(17)
难题夺分训练(三)	(19)

名校名题

江西省重点中学盟校联考	(21)
湖北省黄冈中学高三模拟考试	(25)
重庆市西南师大附中高三模拟考试	(29)
太原五中月考试题	(33)
石家庄市高中毕业班模拟考试	(37)

参考答案及解题提示

研究高考试题, 轻松把握高考

2010 年高考新题、难题探究

2010 年全国各地高考考试虽然已经结束,但是它却留给我们很多值得思考和回味的东西,尤其对全国各地的高三复习而言,值得探讨和交流的问题很多. 纵观 2010 年各地的高考试题,突出了能力立意的核心地位,体现了三角函数、概率、不等式、数列、立体几何、解析几何、导数与函数等主干知识重点考查的原则,命题者都努力在“新”字上作文章. 本文拟从 2010 年高考试题中的新题、难题的探究入手,追寻高考命题的意境,找到难题、新题的突破方法,希望对高三复习有帮助.

一、各地试题中的新、难题的特点

各地的高考对数学“三基”都作了充分的考查,强调了知识点的覆盖面. 主干知识仍是各地高考试题的主角,但除个别省份外,难度上都有所下降,如山东卷将数列题目前移就体现了命题者的这种想法. 另外无论是“新课标考区”还是“大纲考区”,在“新”字上都作足了文章,这个“新”主要体现在三个方面:(1)考查角度新颖;(2)命题立意深刻;(3)突出时代性和实践性.

(一)“即时定义”考查学生的学习能力

【例 1】(2010, 四川卷) 设 S 为复数集 C 的非空子集. 若对任意 $x, y \in S$, 都有 $x+y, x-y, xy \in S$, 则称 S 为封闭集. 下列命题:

①集合 $S = \{a+bi \mid a, b \text{ 为整数}, i \text{ 为虚数单位}\}$ 为封闭集;

②若 S 为封闭集, 则一定有 $0 \in S$;

③封闭集一定是无限集;

④若 S 为封闭集, 则满足 $S \subseteq T \subseteq C$ 的任意集合 T 也是封闭集.

其中真命题是_____ (写出所有真命题的序号).

【答案】①②

【命题立意】本题考查了新定义型集合的性质探究问题, 考查分析问题与解决实际问题的能力.

【解题思路】任意两个复数的和、差、积仍然是复数, 即命题①正确; 若 S 为封闭集, 则其中元素自身的差必然是 S 中的元素, 即 S 中一定有 $0 \in S$, 即命题②正确; 封闭集中可以仅有一个元素 0 , 即 $S = \{0\}$, 则命题③不正确; 取 $S = \{0\}, T = \{0, 1\}$, 则集合 T 不是封闭集, 即命题④不正确. 综上可得真命题是①②.

【举一反三】新定义的题型往往不是难题, 理解定义的概念并能够利用概念去分析概念是解决这类问题的通法.

【例 2】(2010, 福建卷) 对于具有相同定义域 D 的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 若存在函数 $h(x) = kx + b$ (k, b 为常数), 对任给的正数 m , 存在相应的 $x_0 \in D$, 使得当

$x \in D$ 且 $x > x_0$ 时, 总有 $\begin{cases} 0 < f(x) - h(x) < m, \\ 0 < h(x) - g(x) < m, \end{cases}$ 则称直

线 $l: y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的“分渐近线”. 给出定义域均为 $D = \{x \mid x > 1\}$ 的四组函数如下:

① $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$;

② $f(x) = 10^{-x} + 2, g(x) = \frac{2x-3}{x}$;

③ $f(x) = \frac{x^2+1}{x}, g(x) = \frac{x \ln x + 1}{\ln x}$;

④ $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}, g(x) = 2(x-1-e^{-x})$.

其中, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 存在“分渐近线”的是 ()

- A. ①④ B. ②③ C. ②④ D. ③④

【答案】C

【命题立意】本题考查了函数的定义域、值域、图象, 考查综合运用知识分析解决问题的能力, 属于创新题, 高档题.

【解题思路】结合图象利用验证法进行判断, 由二次函数与幂函数的图象知①不符合题意; 在②中 $f(x) = 10^{-x} + 2$ 的图象大于 2 且无限接近 2, $g(x) = 2 - \frac{3}{x}$ 的图象小于 2 且无限接近 2, 故存在“分渐近线”

$y = 2$; ③中 $f(x) = x + \frac{1}{x}, g(x) = x + \frac{1}{\ln x}$, 随着 x 的

增加 $f(x) = x + \frac{1}{x}, g(x) = x + \frac{1}{\ln x}$ 都从 $h(x) = x$ 上方无限接近 $h(x) = x$, 故不存在“分渐近线”; 对于④, $f(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}, g(x) = 2x - 2 - 2e^{-x}$, 随着 x 的增加, $f(x), g(x)$ 的图象分别从 $h(x) = 2x - 2$ 的上方与下方无限接近 $h(x) = 2x - 2$, 因此存在分渐近线 $h(x) = 2x - 2$. 故存在分渐近线的是②④, 故 C 正确.

【题眼】解决本题的关键是抓住新定义, 利用数形结合方法或者利用函数的单调性求得两种曲线是否接近某直线.

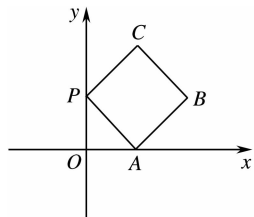
以上题目解决的关键在于读懂题中所给的“新概念”——“封闭集”“分渐近线”, 它们都属于即时定义的考题, 考查学生的学习能力、研究能力和思维能力等.

(二)运动变化 考查学生的研究能力

世间万物是运动的、不断变化的, 包括我们的高考试题内容、形式等也是在不断变化的. 能否从纷繁的运动变化中, 观察、体会出规律, 并把握规律, 应用到我们的生活实践中, 解决实际问题, 为社会发展做出贡献, 也是学生能力培养的一个重要方面. 在这方

面每年的高考都有所体现,今年更是如此,比较典型的几个题目如下:

【例 3】(2010,北京卷)
如图放置的边长为 1 的正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动. 设顶点 $P(x, y)$ 的轨迹方程是 $y=f(x)$, 则函数 $f(x)$ 的最小正周期为 _____; $y=f(x)$ 在其两个相邻零点间的图象与 x 轴所围区域的面积为 _____.

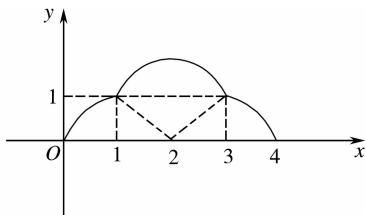


说明:“正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动”包括沿 x 轴正方向和沿 x 轴负方向滚动. 沿 x 轴正方向滚动指的是先以顶点 A 为中心顺时针旋转, 当顶点 B 落在 x 轴上时, 再以顶点 B 为中心顺时针旋转, 如此继续. 类似地, 正方形 $PABC$ 可以沿 x 轴负方向滚动.

【答案】 $4\pi+1$

【命题立意】 本题考查函数的周期性、圆的方程和分段函数等知识, 要求考生具备运动变化的思维和探究精神.

【解题思路】 据已知分析知每隔 4 个长度单位, 点 P 的轨迹重复出现, 由周期性定义可知函数的最小正周期为 4; 由图象的周期性, 不妨将 y 轴左移, 使得 $OA=1$. 则由其滚动过程知, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 当 $1 < x \leq 3$ 时, $(x-2)^2 + y^2 = 2$, 当 $3 < x \leq 4$ 时, $(x-3)^2 + y^2 = 1$, 即其在一个周期内函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示:



分别是由两个半径为 1 的圆的四分之一弧和半径为 $\sqrt{2}$ 的四分之一圆弧组成, 如图可得其相邻两个零点间的图象与 x 轴围成区域的面积 $S = \frac{1}{4} \times \pi \times 1^2 \times 2 + \frac{1}{4} \times \pi \times (\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 2 = \pi + 1$.

【举一反三】 在运动变化之中, 要抓住点 P 的不变量, 用以确定点 P 的轨迹, 确定轨迹方程或函数关系数形结合解答.

【例 4】(2010, 全国卷二) 与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB, CC_1, A_1D_1 所在直线的距离相等的点 ()

- A. 有且只有 1 个
- B. 有且只有 2 个
- C. 有且只有 3 个
- D. 有无数个

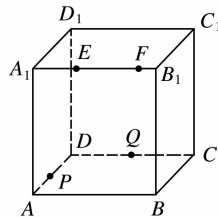
【答案】 D

【命题立意】 本题考查了空间点到直线的距离问题, 考查空间想象能力.

【解题思路】 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 DB_1 上所有的点到三条棱 AB, CC_1, A_1D_1 所在直线的距离都相等, 故应选 D.

【易错点】 考生多将问题想象特殊化为正方体的中心点, 属于对空间几何模型认识的思维定势.

【例 5】(2010, 北京卷) 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 动点 E, F 在棱 A_1B_1 上, 动点 P, Q 分别在棱 AD, CD 上. 若 $EF=1, A_1E=x, DQ=y, DP=z(x, y, z$ 大于零), 则四面体 $PEFQ$ 的体积 ()



- A. 与 x, y, z 都有关
- B. 与 x 有关, 与 y, z 无关
- C. 与 y 有关, 与 x, z 无关
- D. 与 z 有关, 与 x, y 无关

【答案】 D

【命题立意】 本题考查空间几何体体积的求解, 要求考生灵活选择底面和具备一定的分析推理能力.

【解题思路】 据题意对四面体 $PEFQ$, 将三角形 EFQ 视为底面, 此时其所在四边形 A_1B_1CD 为一矩形, 其中三角形 EFQ 的底 EF 长为定值 1, 而当点 Q 在 CD 上运动时, Q 到直线 EF 的距离为定值 $2\sqrt{2}$, 故四面体的底面 EFQ 的面积为定值, 而四面体的高即点 P 到平面 A_1B_1CD 的距离, 易知只需在平面 AA_1DD_1 内过点 P 作 A_1D 的垂线, 设垂足为 G , 则 $PG \perp$ 平面 A_1B_1CD , 在直角三角形 PGD 中, 易知 PG 的长随 PD 的长 z 的变化而变化, 故四面体的体积与 z 有关, 而与 x, y 无关.

【易错点】 若考生缺乏严谨的逻辑思维, 凭感觉认为各点均为动点, 相当然认为体积与各个量均有关, 从而产生错解, 注意应从变化中寻找不变量, 这才是数学研究的魅力所在, 另一方面如何过点 P 作平面 A_1B_1CD 的垂线也是难点, 考生思维易受阻.

以上三个题目, 虽不属于同一知识点, 但都从运动变化的角度考查学生的分析问题、解决问题的能力, 同时也对学生合理推理、优化设计解题方法的能力进行了考查.

(三) 突出通法 考查学生的基本数学素养

2010 年大部分地区的高考试题, 保留了数学传统高考重视“三基”的特点, 难度比较适中, 考查目的逐渐从考查考生“不会什么”转为考查考生“学会了什么”, 加大信息迁移题的个数和分值, 倡导理性思维, 突出通性通法, 又有所“创新”. 试卷不偏不怪, 起点不低, 落点不高, 难题不难, 易题不易, 突出了能力立意,

强调了学科内的综合,融知识、方法、思想、能力于一体,多题把关,达到了考查学生的数学基本素养——“基础、素质、能力、潜能”的目标,有利于高校选拔,呈现出积极稳妥,务实创新的面貌。

【例 6】(2010,安徽卷)动点 $A(x, y)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上绕坐标原点沿逆时针方向匀速旋转,12 秒旋转一周.已知时间 $t=0$ 时,点 A 的坐标是 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,则当 $0 \leq t \leq 12$ 时,动点 A 的纵坐标 y 关于 t (单位:秒)的函数的单调递增区间是 ()

- A. $[0, 1]$ B. $[1, 7]$
C. $[7, 12]$ D. $[0, 1]$ 和 $[7, 12]$

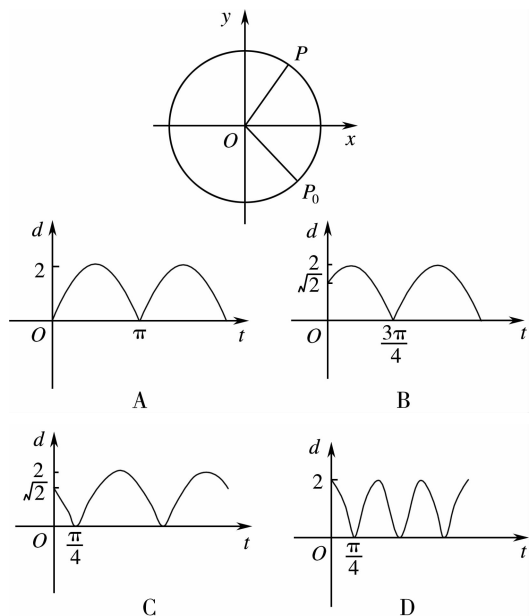
【答案】D

【命题立意】本题以圆为载体,考查了三角函数的定义、周期性、单调性.实际上是考查三角函数正弦函数的形成情况.

【解题思路】设 t 秒后点运动到 $B(x, y)$,由于周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 12$,故 $\omega = \frac{\pi}{6}$,起始点角度为 $\theta = \frac{\pi}{3}$,所以 $y = \sin(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3})$,显然当 t 在 $[0, 1]$ 和 $[7, 12]$ 时,函数 $y = \sin(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3})$ 都是单调增区间.

【题眼】解决本题的关键是写出点 A 运动的解析式,再根据三角函数的性质求解.

【例 7】(2010,课程标准卷)如图,质点 P 在半径为 2 的圆周上逆时针运动,其初始位置为 $P_0(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$,角速度为 1,那么点 P 到 x 轴距离 d 关于时间 t 的函数图象大致为 ()



【答案】C

【命题立意】本题考查三角函数的定义应用及三

角函数的图象.

【解题思路】据点 P 的坐标可得 $\angle xOP_0 = \frac{\pi}{4}$,故 $\angle xOP = t - \frac{\pi}{4}$,设点 $P(x, y)$,则由三角函数的定义,可得 $\sin \angle xOP = \frac{y}{r}$,即 $\sin(t - \frac{\pi}{4}) = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2\sin(t - \frac{\pi}{4})$,因此点 P 到 x 轴的距离 $d = |y| = 2|\sin(t - \frac{\pi}{4})|$,据解析式可得 C 选项图象符合条件.

以上两题看似很难,但都能从基本的概念和方法入手使问题得以解决,体现了命题者对学生基本素养进行全面考查的命题思路,只要我们能抓住每个相关问题的基本解决方法,就很容易得到问题的答案.

(四)学以致用 考查学生的创新精神和实践能力
今年高考的另一个特点是从以往的“理论型”向“应用型”的转变.

【例 8】(2010,广东卷)为了迎接 2010 年广州亚运会,某大楼安装了 5 个彩灯,它们闪亮的顺序不固定.每个彩灯只能闪亮红、橙、黄、绿、蓝中的一种颜色,且这 5 个彩灯所闪亮的颜色各不相同.记这 5 个彩灯有序地各闪亮一次为一个闪烁,在每个闪烁中,每秒钟有且仅有一个彩灯闪亮,而相邻两个闪烁的时间间隔均为 5 秒.如果要实现所有不同的闪烁,那么需要的时间至少是 ()

- A. 1 205 秒 B. 1 200 秒
C. 1 195 秒 D. 1 190 秒

【答案】C

【命题立意】本题考查排列组合知识在实际生活中的应用,考查学生运用数学知识解决实际问题的实践能力.

【解题思路】要实现所有不同的闪烁需要的时间最少,只要所有闪烁连续地、不重复地依次闪烁一遍.而所有的闪烁共有 $A_5^5 = 120$ 个;因为在每个闪烁中,每秒钟有且仅有一个彩灯闪亮,即每个闪烁的时长为 5 秒,而相邻两个闪烁的时间间隔均为 5 秒,所以要实现所有不同的闪烁,需要的时间至少是 $120 \times (5 + 5) - 5 = 1 195$ 秒.

【题眼】要使实现所有不同的闪烁需要的时间最少,只要所有闪烁连续且不重复地依次闪烁一遍.

【易错点】闪烁间隔共 $120 - 1 = 119$ 个,而不是 120 个.

【例 9】(2010,重庆卷)某单位安排 7 位员工在 10 月 1 日至 7 日值班,每天安排 1 人,每人值班 1 天.若 7 位员工中的甲、乙排在相邻两天,丙不排在 10 月 1 日,丁不排在 10 月 7 日,则不同的安排方案共有 ()

- A. 504 种 B. 960 种
C. 1 008 种 D. 1 108 种

【答案】C

【命题立意】本题主要考查考生能否结合所学排

列组合知识,通过恰当地分类或分步,综合利用解决排列组合问题的各种方法求得相关的方法数的能力.

【解题思路】依题意,满足甲、乙两人值班安排在相邻两天的方法共有 $A_2^2 \cdot A_6^6 = 1\,440$ 种,其中满足甲、乙两人值班安排在相邻两天且丙在 10 月 1 日值班的方法共有 $C_3^1 \cdot A_2^2 \cdot A_4^4 = 240$ 种;满足甲、乙两人值班安排在相邻两天且丁在 10 月 7 日值班的方法共有 $C_3^1 \cdot A_2^2 \cdot A_4^4 = 240$ 种;满足甲、乙两人值班安排在相邻两天且丙在 10 月 1 日值班、丁在 10 月 7 日值班的方法共有 $C_1^1 \cdot A_2^2 \cdot A_3^3 = 48$ 种. 因此满足题意的方法共有 $1\,440 - 2 \times 240 + 48 = 1\,008$ 种,选 C.

【举一反三】在处理类似限制条件较多的计数问题时,通常可有两种方式考虑:一是结合限制条件的情况适当进行分类计数;二是可先暂时考虑部分约束条件,采用间接法求得相关的方法数.

以上两题,都是有限制条件的排列应用题,由于限制条件较多,所以在处理类似计数问题时,根据相关的限制条件恰当地进行分类和分步计数是解决问题的关键.这类问题通常有两种做法:(1)直接分类;(2)间接法(也称补集法,即先确定一个满足其中一部分条件的排列或组合的全集,从中减去不符合其他条件的排列或组合),这是通性通法,应有针对性地进行训练.

近年来高考应用题的难度适中,但数量和分值有明显增加,应用题的背景符合考生的心理成长和学习生活实际,有一定的时代气息,反映正确的价值取向,思路比较广,适合不同思维层次的考生.

二、突破高考新难题的几点启示

1. 变教数学为悟数学,加大课内外的探究力度

数学不仅仅是一种重要的“工具”,更重要的是知识向能力转化的桥梁.高考数学提出“以能力立意命题”就是为了更好地考查学生的基本数学素养——知识基础和思想方法,应用意识和创新精神等等,促进理性思维的发展,使学生在数学学习中学会感悟、思考、交流、探究,体验数学的对称美,和谐美等等,培养其对立统一等辩证观点.

2. 重视通性通法,培养数学实践能力

数学教学的基本出发点是促进学生全面、持续、和谐地发展,使每一位学生具有学习数学的自信心和持续学习数学的能力.数学是培养学生创新意识和实践能力的渠道之一,考查搜集、整理、处理信息等探究和解决实际问题的能力,这就要求平时要善于从教材内容和社会生活实际中提出问题,开设研究性课题,

营造自己探究和合作交流的空间,关心身边的数学问题,学会从中筛选有用的信息和数据,研究其数量关系或数形关系,建立数学模型,进而解决问题,并在解决问题的过程中提高数学表达和交流能力,增强创新意识和实践能力.

3. 留足审题时间,重视“阅读理解”能力的培养

研究数学不做题是肯定不行的,但不能陷入题海不能自拔,要充分发挥教材中知识形成过程和例题的典型作用,能够举一反三,重视“一题多解”和“多题同解”.这样就必须要学会审题,学会清理知识脉络,在原有知识基础上建构自己的知识网络,留足思考的余地;另外要做好解題后的反思,做好方法的归类和总结,以不变应万变.

大家都知道外语、语文学好的关键环节是培养学生的阅读理解能力,这一点在数学学习中往往被我们所忽略,常见学生在读懂题目之前,仓促解答,不可能理解题目背后所蕴含的思想方法等内涵.长此以往造成不会审题,分不清问题中的关键语句,更读不懂问题中的“题眼”,看到题之后没有细读,有时连题目的条件和结论都没看清就开始做起来,这样是不可能解答我们前述的“即时定义”等新题,也更不可能解决关键词较抽象的难题.因此,平时一定要重视“阅读理解能力”的培养,经常寻找问题已知条件和所证(求)的关系,找到解决问题的最优途径.

4. 抓题眼逐步解答,运动变化特殊化归纳

对一个疑难问题,一定要注意审题后将题目中的题眼抓住,将其由文字语言向符号或图形语言转化,能画图的一定不要放过,能推(转化)一步推(转化)一步,同时由结论逆推,寻求已知和所求(证)的关系,以便在条件和结论之间建立起一架的桥梁,使问题获解.确实啃不动时,一个明智的选择应是:将它划分为一系列子问题或一些解题的步骤,先解决问题的一部分,能解决到什么程度就解决到什么程度,能演算几步就写几步,每进行一步就可得到这一步的分数.如从最初的把文字语言译成符号语言,把条件和目标译成数学表达式,设应用题的未知数,设轨迹题的动点坐标,依题意正确画出图形等,都能得分.

2010 年的高考已经落下帷幕,新一轮高考研究的热潮已经展开,以后的高考必然会更重视对学生知识学习过程中形成的数学思想方法的考查,以及信息处理、逻辑推理、形象及抽象思维等能力的考查,使各类知识逐步变成培养学生能力的载体.

新题探究训练与热点题训练(一)

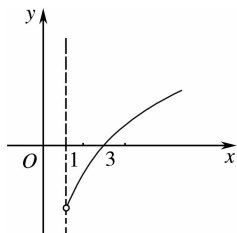
1. 若函数 $f(x) = \log_a(x^2 - ax + \frac{1}{2})$ 有最小值, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(0, 1) \cup (1, \sqrt{2})$
 C. $(1, \sqrt{2})$ D. $[\sqrt{2}, +\infty)$

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, +\infty)$, 且 $f(2) = f(4) = 1, f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 函数 $y = f'(x)$ 的

图象如图所示. 则不等式组 $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ f(2x+y) \leq 1 \end{cases}$ 所表示

的平面区域的面积是 ()



- A. 3 B. 4 C. 5 D. $\frac{15}{4}$

3. 已知实数 $a, b \in \mathbf{R}_+, a+b=1, M=2^a+2^b$, 则 M 的整数部分是 ()

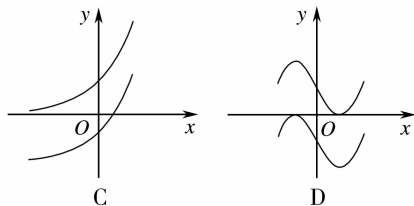
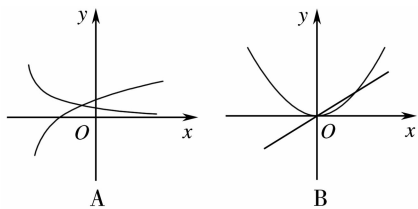
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和, $a_5 = 19, S_5 = 55$, 则过点 $P(3, a_3), Q(4, a_4)$ 的直线的斜率是

()

- A. 4 B. $\frac{1}{4}$ C. -4 D. -14

5. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 将 $y = f(x)$ 和 $y = f'(x)$ 的图象画在同一个直角坐标系中, 不可能正确的是 ()



6. 把一枚骰子投掷两次, 第一次出现的点数记为 a , 第二次出现的点数记为 b . 设事件 A 为“方程组 $\begin{cases} ax+by=5, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ 只有一组解”, 则事件 A 发生的概率等于 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{18}$ D. $\frac{1}{36}$

7. 设二元一次不等式组 $\begin{cases} x \geq 2, \\ y \geq 1, \\ x+2y-6 \leq 0 \end{cases}$ 所表示的平面

区域为 M , 若曲线 $x^2 - my^2 = 1$ 总经过区域 M , 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \frac{3}{4})$
 B. $[15, +\infty)$
 C. $(\frac{3}{4}, 15)$
 D. $[\frac{3}{4}, 15]$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 如果 a, b, c 成等差数列, $B = \frac{\pi}{6}, \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 则 $b =$ ()

- A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ B. $1+\sqrt{3}$
 C. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ D. $2+\sqrt{3}$

9. 已知定义在 \mathbf{R} 上的减函数 $f(x)$ 的图象经过点 $A(-3, 2), B(2, -2)$, 若函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则不等式 $|2f^{-1}(x^2-2)+1| < 5$ 的解集为_____.

10. $(x+y)^n$ 的展开式中, $x^{n-2}y^2$ 的系数与 x^2y^{n-2} 的系数之和为 30, 则 $n=$ _____.

11. 已知函数 $y=f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 对于 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x-6)=f(x)+f(3)$ 成立, 且 $f(0)=-2$, 当 $x_1, x_2 \in [0, 3]$, 且 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$. 则给出下列命题: ① $f(2010) = -2$; ② 函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴为 $x=-6$; ③ 函数 $y=f(x)$ 在 $[-9, -6]$ 上为增函数; ④ 方程 $f(x)=0$ 在 $[-9, 9]$ 上有 4 个根. 其中所有正确命题的序号是 _____.

12. 有一种数字推理游戏, 游戏规则如下: ① 在 9×9 的九宫格子中, 分成 9 个 3×3 的小九宫格, 用 1 到 9 这 9 个数填满整个格子; ② 每一行与每一列都有 1 到 9 的数字, 每个小九宫格里也有 1 到 9 的数字, 并且一个数字在每行每列及每个小九宫格里只能出现一次, 既不能重复也不能少, 那么 A 处应填入的数字为 _____; B 处应填入的数字为 _____.

		4						
9	A	3	5					7
2			6			3	5	4
	4	2	8		6			
	1						7	
		6	9		3	5	4	2
	2	8				B		5
1	3				8	7	6	
						4		

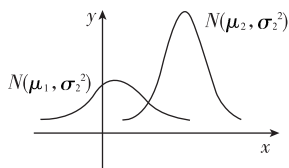
13. “上海世博会”将于 2010 年 5 月 1 日至 10 月 31 日在上海举行. 世博会“中国馆·贵宾厅”作为接待中外贵宾的重要场所, 陈列其中的艺术品是体现兼容并蓄、海纳百川的重要文化载体. 为此, 上海世博会事务协调局将举办“中国 2010 年上海世博会‘中国馆·贵宾厅’艺术品方案征集”活动. 某地美术馆从馆藏的中国画、书法、油画、陶艺作品中各选一件代表作参与应征, 假设代表作中中国画、书法、油画入选“中国馆·贵宾厅”的概率均为 $\frac{1}{4}$, 陶艺入选“中国馆·贵宾厅”的概率为 $\frac{1}{3}$.

(I) 求该地美术馆选送的四件代表作中恰有一件作品入选“中国馆·贵宾厅”的概率;

(II) 设该地美术馆选送的四件代表作中入选“中国馆·贵宾厅”的作品件数为随机变量 ξ , 求 ξ 的数学期望.

新题探究训练与热点题训练(二)

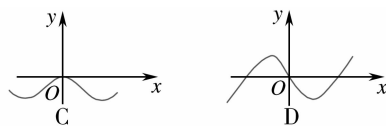
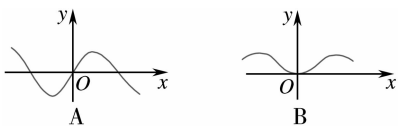
1. 设两个正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ($\sigma_1 > 0$) 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ($\sigma_2 > 0$) 曲线如图所示, 则有 ()



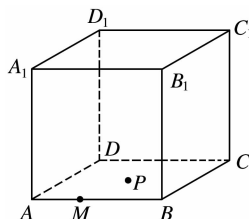
- A. $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$
 B. $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$
 C. $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$
 D. $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$
2. M 是 $\triangle ABC$ 内一点, 过 M 的任一直线交 AB 边于点 P , 交 AC 边于点 Q , 且满足 $\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} = 3$, 那么 M 一定是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 重心 B. 垂心
 C. 内心 D. 外心
3. 设数列 $\{a_n\}$ 是项数为 20 的等差数列, 公差 $d \in \mathbb{N}^*$, 且关于 x 的方程 $x^2 + 2dx - 4 = 0$ 的两个实数根 x_1, x_2 满足 $x_1 < 1 < x_2$, 则数列 $\{a_n\}$ 的偶数项之和减去奇数项之和的结果为 ()
- A. 15 B. 10
 C. 5 D. -20
4. 已知 α, β, γ 是三个不同的平面, 命题“ $\alpha // \beta$, 且 $\alpha \perp \gamma \Rightarrow \beta \perp \gamma$ ”是真命题. 如果把 α, β, γ 中的任意两个换成直线, 另一个保持不变, 在所得的所有新命题中, 真命题有 ()
- A. 0 个 B. 1 个
 C. 2 个 D. 3 个

5. 设函数 $y = x \sin x + \cos x$ 的图象上的点 (x_0, y_0) 的切线的斜率为 k , 若 $k = g(x_0)$, 则函数 $k = g(x_0)$ 的图象大致为 ()



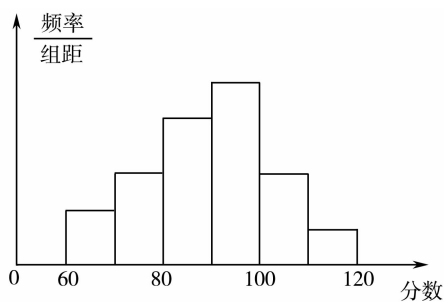
6. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 点 M 在棱 AB 上, 且 $AM = \frac{1}{3}$. 点 P 是平面 $ABCD$ 上的动点, 且动点 P 到直线 A_1D_1 的距离与点 P 到点 M 的距离的平方差为 1, 则动点 P 的轨迹是 ()



- A. 圆
 B. 双曲线
 C. 抛物线
 D. 直线
7. 过抛物线 $y^2 = ax$ ($a > 0$) 焦点 F 作斜率为 1 的直线交抛物线于 P_1, P_2 两点, 以 P_1P_2 为直径的圆的圆心 M 到准线的距离为 8, 则此圆的方程是 ()
- A. $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 64$
 B. $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 64$
 C. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$
 D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$
8. 已知正四面体 $A-BCD$, 动点 P 在 $\triangle ABC$ 内, 且点 P 到平面 BCD 的距离与点 P 到点 A 的距离相等, 则动点 P 的轨迹为 ()
- A. 一条线段
 B. 双曲线的一部分
 C. 抛物线的一部分
 D. 椭圆的一部分

9. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 交于点 O, E 是线段 OD 的中点, AE 的延长线与 CD 交于点 F , 若 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AC} + \mu \overrightarrow{BD}$, 则 $\lambda + \mu =$ _____.

10. 为了解高三学生的数学学习情况, 现抽取某班 60 名学生的数学成绩进行分析, 将所得数据整理后, 画出其频率分布直方图(如图). 已知从左到右各长方形高的比为 $2 : 3 : 5 : 6 : 3 : 1$, 则该班学生数学成绩在 $(80, 100)$ 之间的学生人数是 _____.



11. 设函数 $f(n) = k$ (其中 $n \in \mathbf{N}^*$), k 是 $\sqrt{2}$ 的小数点后第 n 位数, 则 $f\{f\{\dots f[f(8)]\}$ 的值为 _____.

2 010 个 f

$(\sqrt{2} = 1.414\ 213\ 562\ 37\dots)$

12. 设 m 为实数, 若 $\{(x, y) \mid \begin{cases} x - 2y + 5 \geq 0, \\ 3 - x \geq 0, \\ mx + y \geq 0 \end{cases} \quad x, y \in \mathbf{R}\} \subseteq \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$, 则 m 的取值范围是 _____.

13. 在进行一项掷骰子放球游戏中, 规定: 若掷出 1 点, 甲盒中放一球; 若掷出 2 点或 3 点, 乙盒中放一球; 若掷出 4 点或 5 点或 6 点, 丙盒中放一球, 前后共 3 次, 设 x, y, z 分别表示甲、乙、丙 3 个盒中的球数.

(I) 求 x, y, z 依次成公差大于 0 的等差数列的概率;

(II) 记 $\xi = x + y$, 求随机变量 ξ 的概率分布列和数学期望.

11. 汉诺塔问题是印度的一个古老的传说:开天辟地的神勃拉玛在一个庙里留下了三根金刚石的棒,第一根上面套着 64 个圆的金片,最大的一个在底下,其余一个比一个小,依次叠上去,庙里的众僧不倦地把它们一个个地从这根棒搬到另一根棒上,规定可利用中间的一根棒作为帮助,但每次只能搬一个,而且大的不能放在小的上面.后来这个传说演变为汉诺塔游戏:有三根相邻的柱子,标号为 A, B, C , A 柱子上从下到上按金字塔状叠放着 n 个不同大小的圆盘,现在把所有盘子一个一个搬到柱子 B 上(可利用柱子 C 作为帮助),并且每次搬动后同一根柱子上不能出现大盘子在小盘子上方的情况,当 $n=3$ 时,至少需要搬动的次数为 _____; 当 $n=64$ 时,至少需要搬动的次数为 _____.
12. 如果函数 $f(x)$ 同时满足下列条件:①在闭区间 $[a, b]$ 内连续,②在开区间 (a, b) 内可导且其导函数为 $f'(x)$,那么在区间 (a, b) 内至少存在一点 $\xi(a < \xi < b)$,使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 成立,我们把这一规律称为函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有“Lg”性质,并把其中的 ξ 称为中值.有下列命题:
- ①若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 具有“Lg”性质, ξ 为中值,点 $A(a, f(a)), B(b, f(b))$, 则直线 AB 的斜率为 $f'(\xi)$;
- ②函数 $y = \sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}$ 在 $(0, 2)$ 内具有“Lg”性质且中值 $\xi = \sqrt{2}, f'(\xi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- ③函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-1, 2)$ 内具有“Lg”性质,但中值 ξ 不唯一;
- ④若定义在 $[a, b]$ 内的连续函数 $f(x)$ 对任意的 $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$, 有 $\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 恒成立,则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有“Lg”性质,且必有中值 $\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
- 其中你认为正确的所有命题的序号是 _____.
13. 某中学举办“上海世博会”知识宣传活动,现场的“抽卡有奖游戏”特别引人注目,游戏规则是:盒子中装有 8 张形状大小相同的精美卡片,卡片上分别印有“世博会吉祥物海宝”或“世博会会徽”,要求 4 人一组参加游戏,参加游戏的 4 人从盒子中轮流抽取卡片,一次抽 2 张,抽取后不放回,直到 4 人中某人一次抽到 2 张“世博会吉祥物海宝”卡才能获奖,当某人获奖或者盒中卡片抽完时游戏终止.
- (I) 游戏开始之前,一位高中生问:“盒子中有几张‘世博会会徽’卡?”主持人说:“若从盒中任抽 2 张卡片不都是‘世博会会徽’卡的概率为 $\frac{25}{28}$.”请你回答有几张“世博会会徽”卡呢?
- (II) 在(I)的条件下,甲、乙、丙、丁 4 人参加游戏,约定甲、乙、丙、丁依次抽取.用随机变量 ξ 表示游戏终止时总共抽取的次数(注意,一次抽取的是 2 张卡片),求 ξ 的分布列和数学期望.

新题探究训练与热点题训练(四)

1. 若复数 $\frac{a+3i}{1+2i}$ ($a \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位) 是纯虚数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty}$

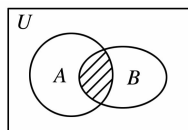
$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n} \right) = \quad (\quad)$$

A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{5}{7}$

C. $-\frac{1}{7}$ D. $-\frac{5}{7}$

2. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid y = \sqrt{\log_2(2x-3)}\}$, $B = \{x \mid x < 3\}$, 则下图中阴影部分表示的集合为

()



A. $\left(\frac{3}{2}, 2 \right]$

B. $[2, 3)$

C. $(-\infty, 3)$

D. $\left(\frac{3}{2}, 2 \right)$

3. 若 $f(x) = (x-a)(x-b) - 2$, $a < b$, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 (m, n) , 则有

()

A. $a < m < n < b$

B. $m < a < b < n$

C. $m < a < n < b$

D. $a < m < b < n$

4. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 与函数 $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 2^x$ 的图象分别交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1^2 + x_2^2$ 等于

()

A. 16

B. 8

C. 4

D. 2

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x & (x \geq 1) \\ x-c & (x < 1) \end{cases}$ ($c \in \mathbf{R}$), 则“函数

$f(x)$ 在 \mathbf{R} 上连续”是“函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上递增”的

()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $(1, +\infty)$ 上, 且存在反函数. 若函数 $f(2x+1)$ 与 $f^{-1}(x+1) - 1$ 互为反函数, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) =$ ()

A. 1 B. $\frac{1}{2}$

C. 2 D. $\frac{3}{2}$

7. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 点 (n, S_n) 均在函数 $y = ax^2 + x$ ($a \in \mathbf{N}^*$) 的图象上, 则

()

A. n 与 a_n 的奇偶性相异

B. n 与 a_n 的奇偶性相同

C. a 与 a_n 的奇偶性相异

D. a 与 a_n 的奇偶性相同

8. 已知直线 $a^2x + y + 2 = 0$ 与直线 $bx - (a^2 + 1)y - 1 = 0$ 相互垂直, 则 $|ab|$ 的最小值为_____.

9. 已知函数 $f(x) = |x^2 - 2ax + b|$ ($x \in \mathbf{R}$), 给出下列命题:

① $f(x)$ 必是偶函数;

② 当 $f(0) = f(2)$ 时, $f(x)$ 的图象必关于直线 $x = 1$ 对称;

③ 若 $a^2 - b \leq 0$, 则 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上是增函数;

④ $f(x)$ 有最大值为 $|a^2 - b|$.

其中正确命题的序号是_____.

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1, \end{cases}$ 若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上

连续, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{an-1}{n} + \frac{2a}{3n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 将一颗骰子投掷两次, 第一次出现的点数记为 m , 第二次出现的点数记为 n , 则两直线 $mx + ny = 2$, $x + y = 2$ 相交的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 在计算“ $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1)$ ”时, 某同学用到了如下方法:

先改写第 k 项: $k(k+1) = \frac{1}{3} [k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)]$

由此得: $1 \times 2 = \frac{1}{3} (1 \times 2 \times 3 - 0 \times 1 \times 2)$

$2 \times 3 = \frac{1}{3} (2 \times 3 \times 4 - 1 \times 2 \times 3)$

.....

$n(n+1) = \frac{1}{3} [n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)]$

相加得: $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)$

$(n+2)$

类比上述方法, 请你计算: $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 已知函数 $f(x) = 2a \sin \omega x \cos \omega x + b(2 \cos^2 \omega x - 1)$

$(\omega > 0)$ 在 $x = \frac{\pi}{12}$ 时取最大值 2. x_1, x_2 是集合 $M =$

$\{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = 0\}$ 中的任意两个元素, $|x_1 - x_2|$ 的

最小值为 $\frac{\pi}{2}$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 若 $f(\alpha) = \frac{2}{3}$, 求 $\sin(\frac{5\pi}{6} - 4\alpha)$ 的值.

新题探究训练与热点题训练(五)

1. 把函数 $y = 2\sqrt{x} + \sqrt{x(x-1)}$ 的图象按向量 $\mathbf{a} = (-1, 2)$ 平移得到 $y = f(x)$ 的图象, 则 $y = f(x)$ 的定义域为 ()
- A. $\{x | x \geq -1\}$
 B. $\{x | x \geq 0\}$
 C. $\{x | x \geq 0\} \cup \{-1\}$
 D. $\{x | -1 \leq x \leq 0\}$

2. 设 $(1+2x)^n$ 展开式的各项系数的和为 a_n , 各二项式系数的和为 b_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - a_n}{a_{n+1} + b_n} =$ ()
- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$
 C. -1 D. 0

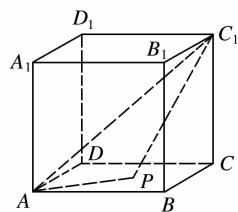
3. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 1, \\ x + y \leq 4, \\ ax + by + c \leq 0, \end{cases}$ 且目标函数 $z = 2x + y$ 的最大值为 7, 最小值为 1, 则 $\frac{a+b+c}{a} =$ ()
- A. 2 B. -2
 C. 3 D. -3

4. 已知 θ 是三角形的一个内角, 且 $\sin\theta, \cos\theta$ 是关于 x 的方程 $2x^2 + px - 1 = 0$ 的两根, 则 θ 等于 ()
- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$
 C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $|AB| = 3, |AC| = 4, |BC| = 5$. 点 D 是边 BC 上的动点, $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, 当 xy 取最大值时, $|\vec{AD}|$ 的值为 ()
- A. 4 B. 3
 C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{12}{5}$

6. 已知在函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{\pi x}{R}$ 的图象上, 相邻的一个最大值点与一个最小值点恰好在圆 $x^2 + y^2 = R^2$ ($R > 0$) 上, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ()
- A. 1 B. 2
 C. 3 D. 4

7. 如图所示, AC_1 是棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体对角线, P 为底面正方形 $ABCD$ 内的一动点. 若三角形 APC_1 的面积 $S_{\triangle APC_1} = \frac{1}{2}$, 则动点 P 的轨迹为 ()



- A. 圆的一部分
 B. 椭圆的一部分
 C. 双曲线的一部分
 D. 抛物线的一部分

8. 已知 $f(x) = x^2 - \cos x$, 对于 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的任意变量 x_1, x_2 , 有如下条件:
 ① $x_1 > x_2$; ② $x_1^2 > x_2^2$; ③ $|x_1| > |x_2|$.
 其中能使 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立的条件序号为 _____.

9. 若 $(x+1)^n = x^n + \dots + ax^3 + bx^2 + \dots + 1$, 且 $a = 3b$, 则 $n =$ _____.

10. 某校在 2010 年的“八校第一次联考”中有 1 000 人参加考试, 数学考试的成绩 $\xi \sim N(90, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$, 试卷满分 150 分), 统计结果显示数学考试成绩在 70