MULU 目录

第二十一章　二次根式

课标定位梳理 …… 1

1. 二次根式 …… 2

2. 二次根式的乘除 …… 13

3. 二次根式的加减 …… 26

思维整合升华 …… 41

第二十二章　一元二次方程

课标定位梳理 …… 50

1. 一元二次方程 …… 51

2. 降次——解一元二次方程 …… 64

3. 实际问题与一元二次方程 …… 82

思维整合升华 …… 101

第二十三章　旋　转

课标定位梳理 …… 109

1. 图形的旋转 …… 110

2. 中心对称 …… 128

3. 课题学习　图案设计 …… 146

思维整合升华 …… 156

第二十四章　圆

课标定位梳理 …… 167
1. 圆 …… 169
2. 与圆有关的位置关系 …… 190
3. 正多边形和圆 …… 209
4. 弧长和扇形面积 …… 219
思维整合升华 …… 234

第二十五章　概率初步

课标定位梳理 …… 252
1. 概率 …… 253
2. 用列举法求概率 …… 266
3. 利用频率估计概率 …… 289
4. 课题学习　键盘上字母的排列规律 …… 306
思维整合升华 …… 314
参考答案 …… 322

第二十一章 二次根式

课标定位梳理

一、本章目标定位

1. 知识目标定位

(1) 了解二次根式的概念及其加、减、乘、除运算法则(不要求分母有理化).

(2) 会用法则进行有关实数的简单四则运算.

(3) 能用有理数估计一个无理数的大致范围,即近似值.

2. 能力目标定位

(1) 对于二次根式,要明确被开方数必须是非负数.

(2) 能进行二次根式的化简及运算,并能解决实际问题.

(3) 进一步体会代数式在表示数量关系方面的作用.

(4) 能够比较两个无理数的大小.

二、本章学法指导

(1) 根据二次根式的意义解题.

(2) 利用公式进行二次根式的运算.

(3) 在进行二次根式的化简与运算时,一般遵循以下做法:

①先将式中的二次根式适当化简.

②二次根式的乘法可以参照多项式乘法进行,运算中要运用公式$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $(a\geqslant0,b\geqslant0)$.

③对于二次根式的除法,通常是先写成分式的形式.有时可以利用约分,有时可以利用公式$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ $(a\geqslant0,b>0)$.

④二次根式的加减法与多项式的加减法类似,是在化简的基础上去括号与合并被开方数相同的二次根式.

⑤运算结果一般要化成最简二次根式.

1. 二次根式

发散思维分析

二次根式的意义

1. 二次根式的定义

一般地,我们把形如$\sqrt{a}$ $(a\geqslant0)$的式子叫做二次根式.它是二次根式的描述性定义,可以从以下几个方面理解它:

(1) 从形式上来看,二次根式必须含有根号"$\sqrt{\ }$",如$\sqrt{3}$,$\sqrt{a^2+1}$,$\sqrt{3m}$ $(m\geqslant0)$等都是二次根式,像$\sqrt{4}$,$\sqrt{25}$,$\sqrt{a^2}$等仍然是二次根式.

(2) 被开方数 a 可以是数,也可以是代数式.a 如果是数,必须是非负数 如果 a 是代数式,则这个代数式的值必须是非负数,否则$\sqrt{a}$无意义.如$\sqrt{-2}$,$\sqrt{-x^2-1}$就不是二次根式.

(3) 式子$\sqrt{a}$ $(a\geqslant0)$既是二次根式,又表示非负数 a 的算术平方根,因此它一定是非负数,也就是说,式子$\sqrt{a}$包含两个非负数:①被开方数 a 是非负数,即$a\geqslant0$ (这是使$\sqrt{a}$有意义的条件);②$\sqrt{a}$本身是非负的,即$\sqrt{a}\geqslant0$ (这是算术平方根的意义所要求的).

形如 $b\sqrt{a}$ $(a\geqslant0)$的式子也是二次根式,它表示 b 与$\sqrt{a}$的乘积.

如 $5\sqrt{7}$表示$5\times\sqrt{7}$,$-\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$表示$-\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}$.

如果 b 是带分数,必须写成假分数的形式.

如$-2\dfrac{2}{3}\times\sqrt{5}$应写成$-\dfrac{8}{3}\sqrt{5}$,而不能写成$-2\dfrac{2}{3}\times\sqrt{5}$.

2. 二次根式中被开方数的取值范围的确定

根据二次根式的定义,式子$\sqrt{a}$中,被开方数 a 必须是非负数,即 $a\geqslant0$,由此,可以确定被开方数中字母的取值范围.

例如 求函数 $y=\sqrt{x-1}$中 x 的取值范围,就是把 $x-1$ 看作 a.$\therefore$ $x-1\geqslant0$,$x\geqslant1$.

3. 二次根式的基本性质 $(\sqrt{a})^2=a$ $(a\geqslant0)$,$\sqrt{a^2}=a$ $(a\geqslant0)$

二次根式的计算,离不开二次根式的基本性质.其性质应理解为:因为开方与乘方互为逆运算,当 $a\geqslant0$ 时,$\sqrt{a}$表示a 的算术平方根,因此有$(\sqrt{a})^2=a$.

如果把公式 $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$ 倒过来，就得到 $a=(\sqrt{a})^2\ (a\geqslant 0)$，运用公式，可以把任何一个非负数或式子写成一个数或式子的平方的形式.

与你探究

情景 2006 年教师节来临之际，市政府实施“安居工程”也提前竣工，数学李老师满怀欣喜购置了一套住房，圆了多年的住房梦. 李老师兴奋地对同学们说：“我家的住房正在装修，其中客厅是面积为 35 m^2 的长方形，宽和长的比为 5∶7，如图 21-1-1 所示. 准备铺设规格为 80 cm×80 cm 或 60 cm×60 cm的正方形瓷砖的其中一种，若要最大面积地铺设这种瓷砖，且不切割它，周围可用其他边角石材铺设，保持美观.”

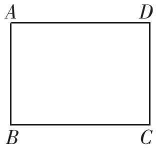

图 21-1-1

思考 应买哪种规格的瓷砖？共买多少块？

探究 由宽和长的比为 5∶7，设宽为 $5x$，长为 $7x$，则 $5x\cdot 7x=35$. $x^2=1$，$x=1$. 可求得客厅长为 7 m，宽为 5 m，将两种规格的瓷砖分别按要求最大面积地铺设 80 cm×80 cm地砖长满足 $80\times 8=640<700$，宽满足 $80\ \text{cm}\times 6=480<500$. 占面积 30.72 m^2，可铺设 $6\times 8=48$（块）. 而 60 cm×60 cm 瓷砖可铺设 $8\times 11=88$（块）. 占面积 31.68 m^2.

我的发现 应选择买 60 cm×60 cm 瓷砖，共买 88 块.

思维火花 要使铺设面积最大，而又不切割瓷砖，长和宽必须都最大. 探究问题既要抓住要点，又要面面俱到.

数学乐园

无理数是怎样发现的

公元前 585 到 400 年间，在希腊有一个毕达哥拉斯学派，创始人是毕达哥拉斯，他发现了直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方，这一性质西方都叫它毕达哥拉斯定理（我国叫作勾股定理）.

毕达哥拉斯学派十分关心能形成直角三角形三边的三个整数的组成，在研究中他们发现了有些比不能用整数比表达（例如：正方形对角线与其一边之比），他们把那些能用整数之比表达的称作可公度之比，即相比的两个量分别可用公共度量单位量尽；而把不能这样表达的比称作不可公度之比.

发散思维应用

一、根据二次根式的意义解题

典型例题

（2005·黑龙江）函数 $y=\sqrt{3-x}$ 中，自变量 x 的取值范围是________________.

解析 由 $\sqrt{a}$ 中 $a\geqslant0$，得到 $3-x\geqslant0$. 即 $x\leqslant3$. 此类题一般依据二次根式意义解决.

答案 $x\leqslant3$.

典例剖析 ⑴利用二次根式的意义 $\sqrt{a}$ $(a\geqslant0)$ 解题，必须抓住 $a\geqslant0$ 即 $3-x\geqslant0$. 这里的“a”是指一个代数式“$3-x$”. ⑵若改为 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ 还必须考虑 $3-x\neq0$. 总之要使一个式子有意义，哪怕有一个数使它无意义也要去掉. 所求范围应恰当.

题型发散

发散 1　看一看，你能选出正确答案吗？

（2005·湖北黄冈）已知实数 x，y，且 $\sqrt{x-1}+3(y-2)^2=0$，则 $x-y$ 的值为（　）

A. 3　　B. -3　　C. 1　　D. -1

解析 $\because$ $\sqrt{x-1}\geqslant0$，$3(y-2)^2\geqslant0$，而他们的和为零，

$\therefore$ 只有每一个式子为零，$\sqrt{x-1}=0$ 且 $3(y-2)^2=0$.

答案 D.

发散 2　想一想，填什么最准确？

⑴（2005·福建厦门）已知函数 $y=\sqrt{-3x-1}-2\sqrt{2}$，则 x 的取值范围是__________，若 x 是整数，则此函数的最小值是__________.

解析 由二次根式意义，$-3x-1\geqslant0$，$x\leqslant-\dfrac{1}{3}$，若要函数值最小，必须 $\sqrt{-3x-1}$ 最小，而 x 为整数，$\sqrt{-3x-1}\geqslant0$，$\therefore$ $x=-1$.

答案 $x\leqslant-\dfrac{1}{3}$，$-\sqrt{2}$.

(2) 当 x 满足__________的条件时，$\sqrt{\frac{-2}{x}}$ 在实数范围内有意义.

解析 这里把 $-\frac{2}{x}$ 看作"a",那么 $-\frac{2}{x}\geqslant 0$,而 $x\neq 0$,$\therefore\ x<0$.

答案 $x<0$.

逆向发散

发散 1 已知 $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+2$,求 $\sqrt{xy}$.

解析 要求 $\sqrt{xy}$ 的值,必须分别求出 x 和 y 的值,但这里不能解方程,要从二次根式的意义入手,也就是说,y 要有意义,必须 $\sqrt{1-x}$ 和 $\sqrt{x-1}$ 均要有意义,从而求得 x 和 y.

答案 据题意 $\begin{cases}1-x\geqslant 0,\\ x-1\geqslant 0.\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases}x\leqslant 1,\\ x\geqslant 1.\end{cases}$ 即 $x=1$.

当 $x=1$ 时,$y=\sqrt{1-1}+\sqrt{1-1}+2=2$.

$\therefore\ \sqrt{xy}=\sqrt{1\times 2}=\sqrt{2}$.

发散 2 已知 $\sqrt{(2x-3)^2}=3-2x$,化简:$|2x-5|+|2-x|$.

解析 $\because\ \sqrt{(2x-3)^2}=|2x-3|=3-2x$,$\therefore\ x\leqslant\frac{3}{2}$

再由 $x\leqslant\frac{3}{2}$,判断 $2x-5$ 与 $2-x$ 的符号.

答案 由 $\sqrt{(2x-3)^2}=3-2x$,得到 $x\leqslant\frac{3}{2}$.

$\therefore\ 2x-5<0,2-x>0$.

$\therefore\ |2x-5|+|2-x|=5-2x+2-x=7-3x$.

梯度发散

发散题 (2005·湖北武汉) 已知 $a<b$,化简二次根式 $\sqrt{-a^3b}$ 的正确结果是 ( )

A. $-a\sqrt{-ab}$　　B. $-a\sqrt{ab}$

C. $a\sqrt{ab}$　　D. $a\sqrt{-ab}$

解析 解决本题的关键是找到 a 与 b 的符号,要使 $\sqrt{-a^3b}$ 有意义.必须 a 与 b 异号,而 $a<b$,$\therefore\ a<0,b>0,ab<0$.又根据 $\sqrt{-a^3b}$ 为非负数,故可排除 B、C、D.

答案 A.

二、根据二次根式的性质解题

典型例题

化简：$\sqrt{(-12)^2}+\sqrt{10^{-2}}$.

解析 由$\sqrt{a^2}=a\ (a\geqslant 0)$，可知$\sqrt{(-12)^2}=\sqrt{12^2}=12$.

而$10^{-2}=\left(\frac{1}{10}\right)^2$，$\sqrt{10^{-2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{1}{10}$.

答案 $\frac{121}{10}$.

典例剖析 二次根式的化简，必须依据二次根式的性质进行即$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$，$\sqrt{a^2}=a\ (a\geqslant 0)$.

梯度发散

发散 1 计算下列各式.

(1) $(\sqrt{13})^2$. (2) $\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2$. (3) $(\sqrt{2a+3})^2$.

解析 解本题的依据是应用性质$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$.

答案 (1) $(\sqrt{13})^2=13$. (2) $\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2=\frac{3}{7}$. (3) $(\sqrt{2a+3})^2=2a+3$.

发散 2 计算$\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2$的结果是 ( )

A. -3　　B. 3　　C. $-\frac{9}{2}$　　D. $\frac{9}{2}$

解析 本题应运用积的乘方$(ab)^2=a^2b^2$的性质，先将$\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2$化为$\left(-\frac{3}{2}\right)^2\times(\sqrt{2})^2$再计算. $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2\times(\sqrt{2})^2=\frac{9}{4}\times 2=\frac{9}{2}$.

答案 D.

点评 $-\frac{3}{2}\sqrt{2}$表示$\left(-\frac{3}{2}\right)\times\sqrt{2}$，不同于带分数$3\frac{1}{5}=3+\frac{1}{5}$.

发散 3 已知长方形的面积为$54\ \text{cm}^2$，宽与长的比为$2:3$，求长方形的周长.

解析 在解题过程中，若遇到“比”可根据比值设k，通常叫“逢比设k”，可设长方形的宽为$2k$，长为$3k$. 那么由面积可求k的值，也就可求长方形的周长.

答案 据题意，设长方形的宽为$2k$，长为$3k$.

则$2k\cdot 3k=54$，$\therefore\ k^2=9$.

$\because\ k>0$,$\therefore\ k=3$.

$\therefore$ 长方形的长为$3\times3=9$.

宽为 $2\times3=6$,长方形的周长为 $(9+6)\times2=30$.

发散 4 $\triangle ABC$ 在如图 21-1-2 所示的直角坐标系内根据顶点在图中的位置.

(1) 写出 A、B、C 三点坐标.

(2) 求出$\triangle ABC$ 的周长.

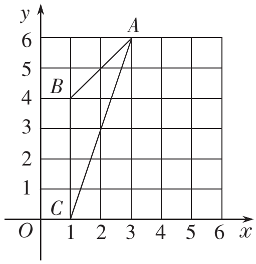

图 21-1-2

解析 (1) 直接观察 A、B、C 三点可写出三点坐标.

(2) 由勾股定理求出各边长.

答案 (1) $A(3,6)$,$B(1,4)$,$C(1,0)$.

(2) $AB=2\sqrt{2}$,$BC=4$,$AC=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$,

$\therefore$ $\triangle ABC$ 的周长为 $2\sqrt{2}+2\sqrt{10}+4$.

发散 5 $\sqrt{16-n}$是整数,求自然数 n 的值.

解析 若要$\sqrt{16-n}$为整数,必须满足 $16-n$ 为完全平方数,而 n 又为自然数,$\therefore$ $16-n=16,9,4,1$ 那么就可以求出相应的 n 的值.

答案 据题意:$16-n=16,9,4,1$.

$\therefore\ n=0,7,12,15$.

应用发散

发散 1 若 x、y 为实数且$y<\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+\frac{1}{2}$.化简:$\frac{|1-y|}{y-1}$.

解析 要化简$\frac{|1-y|}{y-1}$,关键在去掉分子中绝对值的符号,也就是说,要根据已知条件,确定出 $1-y$ 的正或负.

答案 对于实数 x、y,为使二次根式$\sqrt{x-1}$,$\sqrt{1-x}$有意义,

则有 $\begin{cases}x-1\geqslant0,\\1-x\geqslant0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant1,\\x\leqslant1.\end{cases}$

$\therefore\ x=1$,当 $x=1$ 时,不等式 $y<\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+\frac{1}{2}$中,$y<\frac{1}{2}$.

$\therefore\ 1-y>0$.

$\therefore\ \frac{|1-y|}{y-1}=\frac{1-y}{y-1}=-1$.

发散 2 已知实数 a、b、c 在数轴上的位置如图 21-1-3.求代数式$\sqrt{a^2}-|a+c|+\sqrt{(c-b)^2}-$

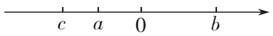

图 21-1-3

$|-b|$的值.

解析　从图中找出字母的符号是解答本题的关键.数形结合是数学的重要思想方法.

答案　根据 a、b、c 在数轴上的位置,得:$a<0$,$c<a$,$b>0$.

$\therefore$ $a+c<0$,$c-b<0$,$b>0$,$-b<0$.

$\therefore$ 原式$=|a|-|a+c|+|c-b|-|b|$

$=(-a)-(-a-c)+(b-c)-b$

$=-a+a+c+b-c-b$

$=0$.

发散 3　实验得知,跳水运动员跳下的高度 h (m) 与所用的时间 t (s) 之间的函数关系式为 $h=4.9t^2$,

(1) 若跳水运动员从 10 m 高台上跳下.求跳水运动员从起跳到入水所用的时间.

(2) 某著名跳水运动员能在 0.2 s 内完成一个动作,并且距水面 3.6 m 处开始入水准备,不能做动作,那么该跳水运动员在 10 m 高台跳水中能否完成 5 个动作?为什么?

解析　(1) 直接由关系式求出时间.

(2) 将 5 个动作所需时间算出,再看运动员完成这 5 个动作时所下落的距离.从而算出此时运动员跳水面的距离,若大于 3.6 m 就可以完成,若小于 3.6 m 则不能完成.

答案　(1) 当 $h=10$ 时,$t^2=\frac{h}{4.9}=\frac{100}{49}=\left(\frac{10}{7}\right)^2$,$t>0$,$\therefore$ $t=\frac{10}{7}$ (s).

(2) $\because$ 一个动作需要 0.2 s,$\therefore$ 5 个动作需要 $0.2\times5=1$ (s),当 $t=1$ 时,$h=4.9t^2=4.9$,$10-4.9=5.1>3.6$ (m).$\therefore$ 能完成 5 个动作.

探究发散

发散 1　当 x 满足什么条件时,$(\sqrt{1-2x})^2=\sqrt{(2x-1)^2}$成立?

解析　$(\sqrt{1-2x})^2$ 成立的条件是 $1-2x\geqslant0$,即 $x\leqslant\frac{1}{2}$,而$\sqrt{(2x-1)^2}$中,$(2x-1)^2\geqslant0$,即无论 x 取何值时,$\sqrt{(2x-1)^2}$总有意义.$\therefore$ 本题中,只需考虑式子 $(\sqrt{1-2x})^2$ 有意义即可.

答案　由$\sqrt{1-2x}$有意义,得 $1-2x\geqslant0$,$\therefore$ $x\leqslant\frac{1}{2}$.

当 $x\leqslant\frac{1}{2}$时,$(\sqrt{1-2x})^2=1-2x$,$\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|=1-2x$.

$\therefore$ 当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$(\sqrt{1-2x})^2=\sqrt{(2x-1)^2}$.

发散 2　一位养鱼专业户承包了一块正方形的鱼塘，鱼塘四角有四棵果树，他不想搬动果树，而想把鱼塘面积增加一倍，并使扩大后的鱼塘还是正方形，你能帮他设计吗？如果把原鱼塘面积看成 1，新的鱼塘边长是多少？

解析　若要原来的鱼塘四角的果树不搬动，那么这四棵果树只能在新正方形鱼塘的四边上，又要新正方形是原正方形面积的 2 倍，所以这四棵树必须为新正方形四边的中点.

答案　如图 21-1-4 所示，设原正方形鱼塘 $ABCD$，A、B、C、D 为四棵果树. 过 A、B、C、D 作正方形 $EFGH$，使 $EB=BF=FC=CG=GD=DH=HA=AE$. 则 $S_{EFGH}=2S_{ABCD}$.

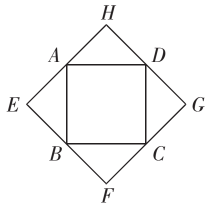

图 21-1-4

若 $S_{ABCD}=1$，则 $AB=BC=CD=AD=\sqrt{1}=1$.

又 $AE^2+BE^2=AB^2$

$\therefore AE^2=BE^2=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\therefore AE=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}$　$\therefore EF=FG=GH=HE=\sqrt{2}$.

$S_{EFGH}=(\sqrt{2})^2=2$.

点评　运用二次根式的意义 [$\sqrt{a}$ ($a\geqslant0$)] 和二次根式的性质 [$\sqrt{a^2}=a$ ($a\geqslant0$) 与 $(\sqrt{a})^2=a$. ($a\geqslant0$)] 是求范围和化简的基本方法，这里"a"是代表一个式子. 同时，要善于挖掘题中的隐含条件，注重数形结合思想.

自主达标演练

这些知识你应该掌握 —

题型发散

想一想，填什么最准确？

1.（2004·山东潍坊）函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ 的自变量 x 的取值范围是__________.

2.（2004·青海湟中）若 $|x+y+4|+\sqrt{(x-2)^2}=0$，则 $3x+2y=$__________.

3. 计算.

(1) $(\sqrt{b})^2=$__________. (2) $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2=$__________.

(3) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=$__________. (4) $\sqrt{(-0.2)^2}=$__________.

(5) $\sqrt{10^{-2}}=$__________. (6) $-\sqrt{(-\pi)^2}=$__________.

(7) $(3\sqrt{3})^2=$__________. (8) $(-2\sqrt{2})^2=$__________.

4. (2005·吉林长春) 如图 21-1-5 在数轴上点 A 和点 B 之间表示整数的点有__________个.

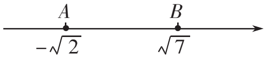

图 21-1-5

5. 观察下列各式 $\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$……请你将猜想到的规律用含自然数 n 的式子表示出来是________.

看一看,你能选出正确答案吗?

6. (2005·四川) 函数 $y=-\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ 中的自变量 x 的取值范围是 ( )

A. $x\geqslant0$ B. $x<0$ 且 $x\neq1$ C. $x<0$ D. $x\geqslant0$ 且 $x\neq1$

7. (2005·山东烟台) 如果等式 $(x+1)^0=1$ 和 $\sqrt{(3x-2)^2}=2-3x$ 同时成立,那么需要的条件是 ( )

A. $x\neq-1$ B. $x<\frac{2}{3}$ 且 $x\neq-1$

C. $x\leqslant\frac{2}{3}$ D. $x\leqslant\frac{2}{3}$ 且 $x\neq-1$

8. (2005·湖北荆门) 如果代数式 $\sqrt{-m}+\frac{1}{\sqrt{mn}}$ 有意义,那么直角坐标系中点 $P(m,n)$ 的位置在 ( )

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

9. 如图 21-1-6,是由两个正方形组成的长方形花坛 $ABCD$,小明从顶点 A 沿着花坛间小路走到长边中点 O,再从中点 O 走到正方形 $OCDF$ 的中心 O_1,再从中心 O_1 走到正方形 O_1GFH 的中心 O_2,又从中心 O_2 走到正方形 O_2IHJ 的中心 O_3,再从 O_3 走到正方形 O_3KJP 的中心 O_4,一共走了 $31\sqrt{2}$ m,则长方形花坛 $ABCD$ 的

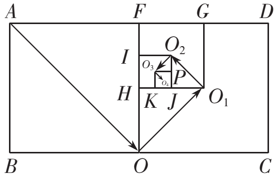

图 21-1-6

周长是 （　　）

A. 36 m　　B. 48 m　　C. 96 m　　D. 60 m

10.（2005·广东广州）用计算器计算 $\frac{\sqrt{2^2-1}}{2-1}$，$\frac{\sqrt{3^2-1}}{3-1}$，$\frac{\sqrt{4^2-1}}{4-1}$，$\frac{\sqrt{5^2-1}}{5-1}$，…，根据你发现的规律，判断 $P=\frac{\sqrt{n^1-1}}{n-1}$ 与 $Q=\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}}{(n+1)-1}$（$n$ 为大于 1 的整数）的值的大小关系为 （　　）

A. $P<Q$　　B. $P=Q$　　C. $P>Q$　　D. 与 n 的取值有关

11. 下列各式中，一定是二次根式的是 （　　）

A. $\sqrt{-4}$　　B. $3\sqrt{2a}$　　C. $\sqrt{x^2+2}$　　D. $\sqrt{x-1}$

12. 使式子 $\frac{\sqrt{m}}{4-|m|}$ 有意义的 m 值为 （　　）

A. $m\neq4$ 且 $m\neq-4$　　B. $m\geqslant0$ 且 $m\neq4$

C. $m\geqslant0$　　D. $m\geqslant0$，$m\neq4$，$m\neq-4$

应用发散

我们一起来解答！

13. 用代数式表示：

(1) 正方形面积为 S，用 S 表示边长.

(2) 矩形面积为 S，且两条邻边的比为 $2:5$，用 S 表示矩形边长.

(3) 圆的面积为 S，用 S 表示圆的半径.

14. 已知直角三角形的两直角边长为 a 和 b，斜边长为 c.

(1) 如果，$a=3$，$b=4$，求 c.

(2) 如果 $a=3$，$c=4$，求 b.

(3) 如果 $a=5$，$b=12$，求 c.

15. 若 $\sqrt{12n}$ 是整数，求正整数 n 的最小值.

16. 如图 21-1-7 在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 三个顶点坐标分别是 $A(-2,1)$、$B(-2,3)$、$C(-3,2)$.

(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状.

(2) 如果将 $\triangle ABC$ 沿着边 BC 旋转一周，求所得旋转体的体积.

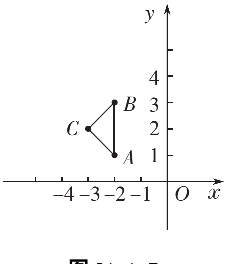

图 21-1-7

探究发散

17. 用长 8 cm，宽 6 cm 的长方形贺岁卡拼成一个正方形至少要多少张贺岁

卡?300个这样的贺岁卡能拼成一个正方形吗?

18. 如图21-1-8所示,直角△ABC中,$\angle C=90°$.

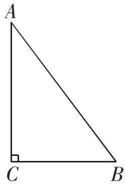

图21-1-8

(1)若$AC=5$,$BC=3$设以AC为半径的圆的面积为S_1,以BC为半径的圆的面积为S_2,以AB为半径的圆的面积为S_3,问S_1、S_2、S_3有怎样的数量关系,并说明理由.

(2)若$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,试问(1)中的结论还成立吗?并说明理由.

19. 请你将两个不同的物体自由落下,发现它们会同时落地,故称为自由落体运动.通过观察测量,可以得到物体下落的时间,与物体下落的高度有关,张明同学所在的数学课外活动小组,测试得到物体下落的时间与高度存在数据关系如下表:

物体高度h(m)	5	10	15	20	…
下落时间t(s)	1	1.4	1.7	2	…

同学们由此推出h与t的关系为$t\approx\sqrt{\dfrac{h}{5}}$.

(1)你认为这个关系式对吗?请你与你的伙伴协作,证实你的结论.

(2)若一武装直升机在离地500 m高空扔下炸弹,问炸弹落地时大约需要几秒钟?

课本课后习题答案,你需要吗?

习题21.1(课本第8~9页)

1. (1)$a\geqslant-2$;(2)$a\leqslant3$;(3)$a\geqslant0$;(4)$a\leqslant0$.

2. (1)5;(2)0.2;(3)0.6;(4)$\dfrac{2}{3}$.

3. (1)$r=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$;(2)提示 设矩形两条邻边的长为$2k$和$3k$,那么$2k\cdot3k=S$,$k=\sqrt{\dfrac{S}{6}}$,∴两条邻边的长分别是$2\sqrt{\dfrac{S}{6}}$和$3\sqrt{\dfrac{S}{6}}$.

4. (1)$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{13^2}=13$;

(2)$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$;

(3)$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{10^2-9^2}=\sqrt{19}$.

5. $\pi r^2=\pi\cdot2^2+\pi\cdot3^2$,∴ $r^2=2^2+3^2$,$r=\sqrt{13}$.

6. 当正方形的四个顶点均在圆周上时,这个正方形的面积最大,∴正方形的对角线长应等于圆的直径,设正方形边长为a,则$4^2=a^2+a^2$,$a^2=8$.∴ $a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

7. (1) ∵ $\sqrt{18-n}$是整数，∴ $18-n$ 为完全平方数.

又∵ $18-n\geqslant 0$，∴ $n\leqslant 18$，而 n 为自然数.

那么 $18-n=4^2,3^2,2^2,1^2,0$. ∴ $n=2,9,14,17,18$.

(2) ∵ $\sqrt{24n}$是整数，n 又为正整数，

∴ $24n$ 为完全平方数，那么 $24n=2^2\cdot 6\cdot n$，

∴ n 的最小值为 6.

8. (1) ∵ $A(2,3)$，$B(2,1)$，$C(3,2)$，

∴ $AB\parallel y$ 轴，$AB=|3-1|=2$，过 C 作$CD\perp AB$ 于D，则 D 点坐标为 $(2,2)$，

∴ $CD=|3-2|=1$，$BD=|2-1|=1$.

那么 $BC=\sqrt{2}$，而 $AD=|3-2|=1$. ∴ $AC=\sqrt{2}$，∴ $AC^2+BC^2=AB^2$，∴ $\triangle ABC$为等腰直角三角形.

(2) 如果将$\triangle ABC$ 沿着边AC 旋转，那么所得的旋转体为圆锥体，且底面半径为 $BC=\sqrt{2}$，高为 $AC=\sqrt{2}$，其体积为 $V=\frac{1}{3}\pi\cdot BC^2\cdot AC=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

2. 二次根式的乘除

发散思维分析

一、二次根式的乘法

1. 积的算术平方根的性质

积的算术平方根等于积中各因式的算术平方根的积. 用式子表示为$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0,b\geqslant 0)$.

(1) 在这个性质中，a、b 可以是数，也可以是代数式. 无论是数还是代数式，都必须满足 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，才能用此式进行计算或化简，如果不满足这个条件，等式右边就没有意义，等式也就不成立了.

如$\sqrt{(-3)(-5)}$，若写成$\sqrt{(-3)(-5)}=\sqrt{-3}\times\sqrt{-5}$，等式的右边就没有意义，而应写为$\sqrt{(-3)(-5)}=\sqrt{3\times 5}=\sqrt{3}\times\sqrt{5}$.

(2) 这个公式的作用是化简二次根式. 如果一个二次根式的被开方数中有的因式(或因数)能开得尽方，可以利用积的算术平方根的性质及公式$\sqrt{a^2}=a\ (a\geqslant 0)$，将这些因式(或因数)开出来，从而将二次根式化简. 因此化简二次根式

时,一般先将被开方数进行因式分解或因数分解.

如:$\sqrt{1008}=\sqrt{4^2\times3^2\times7}=\sqrt{4^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{7}=12\sqrt{7}$,

又如:$\sqrt{(x+1)^3\cdot x^3}$ $(x>0)$,$\sqrt{(x+1)^3\cdot x^3}=\sqrt{(x+1)^2\cdot(x+1)\cdot x^2\cdot x}=\sqrt{(x+1)^2}\cdot\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{(x+1)x}=x(x+1)\sqrt{x(x+1)}$.

特别注意的是$\sqrt{x^2+1}$不能写成$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2}+\sqrt{1}=x+1$.这样做就错了.

2.二次根式的乘法

把积的算术平方根的性质:$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ $(a\geqslant0,b\geqslant0)$倒过来,便可得到二次根式的乘法运算的公式:$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $(a\geqslant0,b\geqslant0)$.

如:$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}$,$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}=\sqrt{x\cdot x^3}=\sqrt{x^4}=x^2$.

二、二次根式的除法

1.商的算术平方根的性质

(1)商的算术平方根的性质为:$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a\geqslant0,b>0)$.

这就是说,商的算术平方根等于被除式的算术平方根除以除式的算术平方根.

(2)利用商的算术平方根的性质,进行二次根式的计算或化简.

(3)化去二次根号内的分母.

例如:$\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{1\times3}}{\sqrt{3\times3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.二次根式的除法

二次根式相除,把被开方数相除,根指数不变,用式子表示为$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ $(a\geqslant0,b>0)$.

三、最简二次根式

1.最简二次根式的定义

满足下列条件的二次根式,叫最简二次根式.

(1)被开方数的因数是整数,因式是整式;

(2)被开方数中不含开得尽方的因数或因式.

2.对最简二次根式定义的理解

(1)被开方数中不含分母;

(2)被开方数中每一个因数或因式的指数都小于根指数2,即每个因数或因式的指数都是1.

例如：$\sqrt{2}$、$\sqrt{x}$、$\sqrt{ab}$、$\sqrt{x^2+2}$等都是最简二次根式，但$\sqrt{4}$，$\sqrt{\frac{1}{2}}$，$\sqrt{8x^3}$，$\sqrt{\frac{x}{y}}$、$\sqrt{x^2y}$.$\sqrt{(a-b)^2}$等都不是最简二次根式.

3.化最简二次根式的步骤

⑴ 把根号下的带分数或绝对值大于 1 的小数化成假分数.把绝对值小于 1 的小数化成分数.

⑵ 被开方数是多项式的要进行因式分解.

⑶ 使被开方数不含分母.

⑷ 将被开方数中能开得尽方的因数或因式用它的算术平方根代替后移到根号外面.

⑸ 化去分母中的根号.

⑹ 约分.

与你探究

情景 观察下列各式：

⑴ $2\sqrt{\frac{2}{3}}$与$\sqrt{2+\frac{2}{3}}$.　　⑵ $3\sqrt{\frac{3}{8}}$与$\sqrt{3+\frac{3}{8}}$.

⑶ $4\sqrt{\frac{4}{15}}$与$\sqrt{4+\frac{4}{15}}$.　　⑷ $5\sqrt{\frac{5}{24}}$与$\sqrt{5+\frac{5}{24}}$.

思考 请你通过计算判断各个式子的大小关系.

探究 针对上述各式反映的规律，写出用 n（n 为任意自然数，且 $n\geqslant2$）表示的关系式，并给出证明.

我的发现 上述各式都是相等的关系，用 n 表示的关系式为 $n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$.

证明 右边$=\sqrt{\frac{n(n^2-1)}{n^2-1}+\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}}$

$$=\sqrt{n^2\cdot\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}\ (n\geqslant2).$$

∴ 左边＝右边，原等式成立.

思维火花 此类问题是通过特殊的几个关系式而发现出一般规律，从而推出一般关系式.这就要求学生掌握观察问题和思考问题的能力，以及演绎归纳能力.