全国高等教育自学考试指定教材

义务教育专业（独立本科段）

初中数学学科基础自学辅导书

全国高等教育自学考试指导委员会　组编

主　编　孔凡哲

副主编　张胜利　毕力格图　刘鹏飞

徐乃楠　钟士军

东北师范大学出版社

长　春

图书在版编目（CIP）数据

初中数学学科基础自学辅导书/孔凡哲主编．—长春：东北师范大学出版社，2010．10
ISBN 978－7－5602－6577－3

Ⅰ．①初… Ⅱ．①孔… Ⅲ．①数学课—教学研究—高等教育—自学考试—自学参考资料②数学课—教学研究—初中 Ⅳ．①G633．602

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 199964 号

□责任编辑：王宏志 □封面设计：张 然
□责任校对：曲 颖 □责任印制：张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春净月经济开发区金宝街 118 号（邮政编码：130117）
电话：0431—85687213
传真：0431—85691969
网址：http：//www．nenup．com
电子函件：sdcbs@mail．jl．cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版

印装
2010 年 11 月第 1 版 2010 年 11 月第 1 次印刷
幅面尺寸：185mm×260mm 印张：12．5 字数：286 千

定价：22．00 元

前　言

当前，初中教育教学改革深入开展，初中数学教师的专业发展逐渐被提上议事日程。具备怎样的素质和条件才能胜任初中数学教学，这是许多专家、学者和一线教师普遍关注的焦点话题。

毋庸置疑，良好的数学专业功底是构成合格初中数学教师重要的基本条件之一。而《初中数学学科基础》就是为了保障胜任初中数学教学而设置的初中数学教师教学资格的必要条件之一，这门课程主要解决初中数学教师“数学学科功底够用”的问题。

本书的编排依据《全日制义务教育数学课程标准》所规定的数学课程内容，略有拓展。全书内容分为两部分：

第一部分包含四章，依次为数与代数、空间与几何、统计与概率、综合与实践；

第二部分包含四章，依次为初中数学的逻辑基础、数学抽象、数学推理、基本活动经验。

第一部分围绕初中数学课程内容的学科基础，旨在从横向的视角将初中数学课程内容进行数学学科内涵的挖掘；第二部分围绕初中数学课程内容的学科本质，旨在从纵向的视角将初中数学的逻辑基础、基本思想、基本活动经验和数学推理、数学抽象等，进行系统的归纳、整理。两部分前后呼应，旨在全面揭示初中数学课程内容的学科内涵和学科本质。

本书作为《初中数学学科基础》配套的自学辅导书，采取统一编排、相互呼应、各有侧重的设计方案，本书侧重于剖析教材中的重点、难点和疑点，同时作适当拓展（因而，有些内容属于选学材料）。

全书的编写由全国高等教育自学考试指导委员会教育类委员会直接领导，由孔凡哲教授组织实施，编写组成员得到全国高等教育自学考试指导委员会教育类专业委员会的认可。编写工作得到中国教育学会副会长、著名的统计学家、国家义务教育阶段数学课程标准修改组组长、东北师范大学校长史宁中教授的直接指导，书稿的设计在史宁中教授的帮助下由编写组集体完成。

全国高等教育自学考试指导委员会教育类专业委员会组织国内有关专家对书稿进行了审定，审定组三位成员北京师范大学博士生导师曹一鸣教授、綦春霞教授与梁威教授对书

稿给出了充分肯定并提出中肯的修改建议，在此一并表示感谢。

第一章由徐乃楠撰写初稿，第二章、第八章由孔凡哲撰写初稿，第三章由毕力格图撰写初稿，第四章由张胜利、钟士军撰写初稿，第五章由张胜利撰写初稿，第六章、第七章由刘鹏飞撰写初稿。最后由孔凡哲通稿、定稿。

东北师范大学博士生崔英梅，硕士生刘帅、汲长艳、王玲娟等参加了校对等辅助工作。

尽管几易其稿，书稿中仍可能存在一定的纰漏和瑕疵，敬请读者批评指正，以使其更加完善。

作　者

2009 年 12 月 30 日星期三初稿于长春

2010 年清明时节修改定稿

目　　录

第一章

数 与 代 数

内容辅导

一、学习目标

1．初步识记数的发展历程和数系的扩充过程，领会负数、无理数和实数的意义。

2．初步识记函数概念的发展历程，领会函数的核心思想，领会函数的表示方法。

3．识记代数式、解析式的意义，能通过具体案例理解“式”的本质。

4．识记不等式的意义，能够通过实例领会不等式的性质。

5．领会方程的核心思想，借助初中案例体会方程的建模过程。

6．能结合初中数学课程内容实际，应用负数、实数、方程、函数的核心思想，分析和解决初中数学中的代数问题。

二、重点和难点

本章主要阐述初中数学学习最为基础的数与代数领域的基础知识，如数、式、等式与方程、不等式和函数。详细说明了数及其扩充历程、等式及其基本性质、方程的基本理论、不等式的基本概念和性质、函数的基本概念及基本性质。尤其是阐述了方程和函数的核心思想。举例说明了如何应用不等式、方程和函数的核心思想，通过案例体会数学建模的过程，解决具体的现实问题。有针对性地结合《全日制义务教育数学课程标准》（以下简称《数学课程标准》）中“数与代数”相应的课程目标，阐述相应的课程内容和教学建议，并通过具体的案例理解一些基本概念的核心思想。

三、重点难点讲解

（一）对自然数进制计数系统的理解

在记数的符号系统中，“0”这个符号是用来表示位置记数法的缺位而引进的，印度人不仅把“0”看做记数法中的空位，而且也视其为可施行运算的一个特殊的数。有了“0”我们就可以构造自然数的各类进制的记数系统。

最早出现的进制为二或三进制，随着人们对数的认识的不断深入，又产生了五进制和十进制。虽然产生较晚，但五进制和十进制基本上取代了当时的二进制和三进制。例如，有学者曾对数百个印第安部落进行调查表明，其中大约有三分之一的部落采用十进制，另

有三分之一采用五进制或五—十进制，采用二进制的少于三分之一，采用三进制的还不足百分之一。

巴比伦楔形数字采用六十进制，玛雅数字采用二十进制，除此之外，还曾经出现六进制、八进制、十二进制、十六进制等。

我们的祖先创造了最早的数字，并创造了最早的十进制位置制记数法，或许是因为人有十个手指头。由于“0”的引进，阿拉伯人把十进制数字符号系统建立起来：十个符号加位数准则。因此，人们习惯上称这个数字符号系统为阿拉伯数。

十进制的数码：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9。

十进制的计数单位：$10^0=1$，$10^1=10$，$10^2=100$，$10^3=1000$，……。

任意正整数均能被表示出来，如 $1234=1\times10^3+2\times10^2+3\times10^1+4\times10^0$。

二进制在计算机中使用，就是因为它是最简单的进位方式，满二进一，数码只有 0 和 1 两个。计数单位为：2^0，2^1，2^2，2^3，2^4，…。二进制在《周易》一书中最早出现，大约成书于春秋战国时期，是我国古代一部关于占卜之书，“阴阳说”认为万物是由阴阳相生的，“—”表示阳爻，“——”表示阴爻，可以得到 8 卦象和 64 别卦。将阳爻记为 0，阴爻记为 1，两千年之后的德国数学家、哲学家莱布尼兹对《周易》系统研究之后大为惊叹，发现《周易》和他正在研究的二进制有着密切的联系。

其他各种进制在我们的日常生活中也留有痕迹，如“一打”对应着“十二进制”，六十年一个甲子对应着“六十进制”，等等。

（二）对自然数重要性的理解

自然数产生过程中有两个最了不起的成果：一是从一类事物的共同属性中抽象出“数”。两匹马、两头驴、两个人都是 2，能抽象出 2 是非常了不起的。中国历史上对此的抽象非常差，几乎到了清朝都没有抽象出来，因而，中国古代数学总是带有名数。其实，世界上根本没有 2，只有两个具体思想的人、两瓶饮料等，能抽象出 2 是了不起的事情。二就是“位数”，这是数字非常了不起的一件事情。个位、十位、百位、千位……。你想想大小关系有了的话，数是无穷无尽的，你只能用无穷无尽的数才能把它表示出来。事实上，不用十个字母就能把所有的数表示出来。为什么呢？因为有位数，在个位的 2 与在十位的 2 是不一样的。中国过去有算盘，算盘体现了这种思想。但真正的表述是很困难的，一直到印度人，而后是阿拉伯人，最后是中国引入数位表示，可见，这个抽象是非常了不起的事情。

自然数产生之后，就有了自然数系，为了加法的封闭运算就产生了整数；然后，为了除法的封闭运算就产生了有理数；为了根号的运算产生了无理数，这样就产生了算术公理体系。一般来说，加法交换律、加法结合律、加法分配律、有 0 元素、有单位 1，还有逆元素，满足这六条，运算一旦封闭之后，就构成算术体系。

正是由于大小而产生了序的关系。序的关系很重要，有些时候数字本身并不重要，只需要知道序的关系就可以了，它就能够提供一定的信息。例如，评价几种酒的好坏，只是评价这种酒最好喝，那种酒其次，而其中的具体指标往往不需要知道。到近代数学之后，

序的关系变得越来越重要。

（三）对“数感”的理解

《数学课程标准》首次使用了“数感”这一概念。《数学课程标准》出版后，一些学者对数感的含义展开了一些讨论。

马云鹏等认为[①]，“数感是一种主动地、自觉地或自动化地理解数和运用数的态度与意识。数感是人的一种基本的数学素养。它是建立明确的数概念和有效地进行计算等数学活动的基础，是将数学与现实问题建立起来的桥梁”。

何小亚认为[②]，“数感”是对数的“感觉”。

郑毓信认为[③]，“数感”主要是指“感知”，或主要表现为“感知”。

汤福成认为[④]，“数感”包含感觉、知觉、观念、能力，可以用“知识”来统一解释。作为知识，数感是一种程序性知识；数感又主要是一种内隐性知识；数感主要是一种非结构性知识。

藤发祥认为[⑤]，“数感”是人们在数概念的扩展中产生的对数学的一种敏感与一般理解。

史宁中认为[⑥]，“数感”是对数的“感悟”。“感”是外界刺激作用于主体而产生的，是通过肢体（如感官等）而不是通过大脑思维，它含有原始的、经验的成分。“悟”则是主体自身的，是通过大脑思维而产生的。“感悟”既通过肢体又通过大脑，因此，既含有感知的成分，又含有思维的成分。

基于上述认识，我们可以认为，number sense 与“数感”（即对数的“感悟”）的含义基本相同，既有感知的成分又有思维的成分，用对数的“感悟”来解释其意义比较恰当。单纯地用“感知”、“观念”、“知识”似乎不能确切地表示它们的意义。所以用“感悟”这个词，是因为有许多的能力不仅仅是通过书本的学习就能获得的，而是需要实践并且在实践中有意识、有目的地反思，这就是一种感悟。把“数感”理解为对数的“感悟”，与《数学课程标准》强调实践、经历、过程的宗旨是一致的。

（四）对符号感的理解

符号感是《数学课程标准》中提出的一个重要概念，无论是在知识技能目标中，还是在数学思维目标中都表现出了对数学符号的重视。

符号是某种事物的代号，是把复杂的事物用简洁的形式加以表现。数学符号是人们进行数学的表示、运算、推理和解决问题的工具，也是数学文化的重要组成部分。正是由于数学符号等的产生才使数学具有一般性、教育性和传承性。

---

① 马云鹏，史炳星．认识数感与发展数感［J］．数学教育学报，2002（2）：46～49.

② 何小亚．全日制义务教育阶段数学课程标准（实验稿）刍议［J］．数学教育学报，2003（2）：45～49.

③ 郑毓信．“数感”、“符号感”与其他：《课程标准》大家谈［J］．数学教育学报，2002（3）：30～32.

④ 汤福成，郭海燕．“数感”与“数感”的习得：学习《课程标准》的一点体会［J］．广西右江民族师专学报，2003（3）：1～4.

⑤ 藤发祥．数感及其教育价值［J］．课程・教材・教法．2004（12）：47～50.

⑥ 史宁中．教育与数学教育［M］．长春：东北师范大学出版社，2006：215～216.

数学符号具有两种重要的属性。一是它的抽象性。符号代表了事物本质的特征，从而具有代表性和一般性。另一个重要属性在于它的形象性。数学符号赋予了抽象的数学概念以具体形象，这样就使得看不见、摸不到的抽象的数学思维能在看得见的形式下进行，通过具体符号的链接，使复杂的思维过程一步步具体显现出来。相反，不借助数学符号的思维只能前进有限步，并且很难深化。数学符号不但能精确地表示数学抽象，而且是抽象内涵的简约形式。英国数学家怀特海说："一个好的符号免除了大脑的不必要的工作，能使它自由地注意更重要的问题，实际上增强了人的智力。"这就是说，数学符号的使用加快了数学思维的速度，缩短了数学思维的进程，提高了数学思维的效率。它是表达结果、交流数学思想的重要工具，并推动了数学的发展。从这种意义上说，没有数学符号就没有今天的数学。

简而言之，数学符号的意义在于：有了数学符号才使得抽象的数学有了具体的表现形式，才使得具有一般意义的推理、运算和抽象的数学思维能以直观的、简约的形式表现出来。

（五）对方程建模思想的理解

方程建模的思想对人的教育价值主要体现在建模和转化两方面。建模是一个抽象的过程。方程的学习有两点特别重要：一是抽象，另一个是做事情的运筹和逻辑的条理——做一件事情，脑子里始终有一个比较清晰的思路和计划。方程的抽象在于围绕既定的目标进行有效地抽象，而不是进行漫无边际的抽象。如小民的爸爸现有 10 万元钱，可以买公债，可以储蓄，可以买股票。请你帮他设计一下，如何投资才能保值、增值。在抽象时，要紧紧围绕"保值、增值投资方案的设计"这个目标，开展建模过程，列出方程，而不是漫无边际地乱想。

学生学习方程，其意义在于：一是学习在生活中从错综复杂的事情中，将最本质的东西抽象出来，这个过程是非常困难的，也很有训练的价值；二是在运算中遵循最佳的途径，将复杂的问题简单化，这种优化思想转化的观念对人的思维习惯的影响是深远的。

（六）对函数、方程、不等式间的关系的理解

函数、方程、不等式是从不同角度刻画变量之间的数量关系，它们之间密切相关，但又有本质的区别。例如，令 $f(x)=x^2-3x-4$，这是一个函数，表面上看 $f(x)=0$ 与方程 $x^2=3x+4$ 是等价的，但两者所表达的意义是不相同的：前者表示函数取 0 值，后者表示变量之间的等量关系。同样，$f(x)>0$ 与不等式 $x^2>3x+4$ 所表达的意义也是不同的。但在解决具体问题时，应当注意它们之间的联系。例如，在求解不等式的过程中，可以先求出等式的解，借助等式的解画出函数图像，然后通过函数图像写出不等式的解。

（七）对分数和小数互化的理解

分数化小数最一般的方法是用分子除以分母，可化为有限小数、纯循环小数、混循环小数。分数能化为何种小数，只需观察最简分数的分母即可。

分数化小数可分三种情况讨论：

(1) 分数可化为有限小数的情形。如果最简分数的分母只含有 2 或 5 的质因数，那

么，这个分数能化成有限小数。

如，$\frac{1}{5}=0.2$，$\frac{1}{4}=0.25$，$\frac{1}{50}=0.02$，等等。

（2）分数可化为纯循环小数的情形。如果最简分数的分母只含有 2 和 5 以外的质因数，那么，这个分数能化成纯循环小数。

如，$\frac{1}{7}=0.14285\dot{7}$，$\frac{2}{3}=0.\dot{6}$，等等。

（3）分数可化为混循环小数的情形。如果最简分数的分母既含有质因数 2 或 5，又含有 2 和 5 以外的质因数，那么，这个分数能化成混循环小数。

如，$\frac{1}{6}=0.1\dot{6}$，$\frac{1}{15}=0.0\dot{6}$，等等。

小数化分数也可分为三种情况来讨论：

首先，有限小数可化分数的情形。先把有限小数改写成十进分数，然后化为最简分数。

如，$3.2=3\frac{2}{10}=3\frac{1}{5}$，$0.02=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$，等等。

其次，纯循环小数可化分数的情形。纯循环小数的小数部分化成分数，分子是一个循环节数字所组成的数；而分母是由数字 9 组成的数，9 的个数等于一个循环节的位数。

如，$0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，$1.\dot{2}\dot{5}=1\frac{25}{99}$，等等。

最后，混循环小数可化为分数的情形。混循环小数的小数部分化成分数，分子是小数点右边第一个数字到第一个循环节末位的数字组成的数（即第二个循环节以前的小数部分的数字组成的数），减去不循环数字组成的数所得的差；分母是由数字 9 后面带数字 0 组成的数，其中 9 的个数等于循环节的位数，0 的个数等于小数部分不循环部分的位数。

如，$0.3\dot{0}\dot{3}=\frac{303-3}{990}=\frac{300}{990}=\frac{10}{33}$，$3.12\dot{2}=3\frac{122-12}{900}=3\frac{110}{900}=3\frac{11}{90}$，等等。

（八）对不等式若干性质的理解

不等式是初中数学学习与教学中非常重要的内容，加强学生对“式”的理解尤为重要，尤其是不等式中反映的不等关系，以及最优化与极值问题都是日常生活中常用的思想和方法，这对于高中不等式的进一步学习起到奠基和铺垫作用。因此，很有必要对不等式的性质作进一步的推广和把握。详细的证明可参考相关资料，当然，对于一些简单性质的证明，读者也可以自行尝试着推证。

（1）$a>b$ 当且仅当 $b<a$。（反对称性）

（2）若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$；若 $a<b$，$b<c$，则 $a<c$。（传递性）

（3）$a>b$ 当且仅当 $a+c>b+c$。

（4）若 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$；若 $a>b$，$c<0$ 则 $ac<bc$。

若 $a<b$，$c>0$，则 $ac<bc$；若 $a<b$，$c<0$ 则 $ac>bc$。

（5）若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$；若 $a<b$，$c<d$ 则 $a+c<b+d$。

（6）若 $a<b$，$c>d$，则 $a-c<b-d$；若 $a>b$，$c<d$ 则 $a-c>b-d$。

（7）$a>b$，$c>d$，且 a，b，c，d 为正，则 $ac>bd$。

（8）若 $a>b$，$c<d$，且 a，b，c，d 为正，则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$。

（9）若 $a>b$，$ab>0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

（10）若 $a>b$，且 a，b 为正，则 $a^n>b^n$（n 为自然数）。

（11）若 $a>b$，且 a，b 为正，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（n 为自然数）。

含绝对值的不等式的性质：

（12）$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$。

（13）$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$，

$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$。

（14）$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$。

均值不等式：

（15）若 a_1，a_2，…，$a_n\in\mathbf{R}^+$，$n\geqslant1$，则 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$（当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号）。

注：初中阶段常用以下几个简单的均值不等式：

$a^2+b^2\geqslant2ab$（a，$b\in\mathbf{R}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号）。

$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$（a，$b\in\mathbf{R}^+$，当且仅当 $a=b$ 时取等号）。

$a^3+b^3+c^3\geqslant3abc$（a，b，$c\in\mathbf{R}^+$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号）。

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant2$（$a$，$b$ 同号且不为 0，当且仅当 $a=b$ 时取等号）。

（16）柯西（Cauchy）不等式：

对任意实数 a_1，a_2，…，a_n 及 b_1，b_2，…，b_n 有 $(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\leqslant(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2)$，当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时，等号成立。

（17）伯努利不等式：

已知 $x>-1$ 且 $x\neq0$，n 是不小于 2 的自然数，则称 $(1+x)^n>1+nx$ 为伯努利不等式。

（九）典型案例：函数、方程、不等式都是用来刻画变量之间关系的吗

如果我们令 $f(x)=x^2-2x-1$，那么这是一个函数。表面上看，$f(x)=0$ 与方程 $x^2=2x+1$ 是等价的，但两者所表达的意义是不同的：前者表示函数取 0 值，而后者表示变量之间的等量关系。同样，$f(x)>0$ 与不等式 $x^2>2x+1$ 所表达的意义也是不同的。但在解决具体问题时，应当注意它们之间的关联。例如，在求解不等式的过程中，可以先求出等式的解，借助等式的解画出函数图像，然后通过函数图像写出不等式的解。

函数、方程、不等式都是初中代数需要学习的重要内容，三者从不同角度来刻画变量

之间的数量关系，它们之间密切相关，但又有本质区别。理解这些概念的本质尤为重要。

（十）典型案例：费马数猜想中归纳推理所引发的认知矛盾

历史上很多数学猜想都是通过归纳或类比得到的，大家最熟悉的莫过于哥德巴赫猜想了：“任意不小于6的偶数都能分解成为两个奇素数之和。”在这个问题上，中国数学家陈景润作出了世界领先的成就，但是，这个问题至今尚未彻底解决。与之类似的费马数猜想也是数论中重要的内容之一。

1640年，数学家费马提出著名的费马数猜想：$F_n=2^{2^n}+1$ 是素数，因为当 n 取0，1，2，3，4时，这个式子的对应值分别为3，5，17，257，65537，费马发现这五个数都是素数。由此，费马提出一个猜想：形如 $2^{2^n}+1$ 的数一定为素数。在给朋友的一封信中，费马写道：“我已经发现形如 $2^{2^n}+1$ 的数永远为素数。很久以前我就向分析学家们指出了这个结论是正确的。”费马同时坦白承认，他自己未能找到一个完全的证明。费马是正确的吗？

进一步验证费马的猜想并不容易。因为随着 n 的增大，F_n 迅速增大。比如对后人来说第一个需要检验的 $F_5=4294967297$ 已经是一个十位数了。非常可能的是，由于这一数太大，所以费马在得出自己的猜想时并没有对它进行验证。那么，它到底是否如同费马所相信的那样是一个素数呢？1729年12月1日，哥德巴赫（哥德巴赫猜想的提出者）在写给欧拉的一封信中问道：“费马认为所有形如 $2^{2^n}+1$ 的数都是素数，你知道这个问题吗？他说他没能作出证明。据我所知，也没有其他任何人对这个问题作出过证明。”这个问题吸引了欧拉。1732年，年仅25岁的欧拉在费马死后67年得出 $F_5=641\times6700417$，其中 $641=5\times2^7+1$，这一结果意味着 F_5 是一个合数，因此，费马的猜想是错的！

随着计算机的发展，计算机成为数学家研究费马数的有力工具。但即使如此，在所知的费马数中竟然没有再添加一个费马素数。迄今为止，费马素数除了被费马本人所证实的那五个以外竟然没有再发现一个！

通过费马数猜想这个案例我们可以看出，即便是伟大的数学家通过归纳得到的结论或猜想也可能是错误的。通过本章的学习可以看到，数学理论的发现依赖于归纳能力，而一个数学理论的证明却依赖于演绎能力。

四、需要补充的资料*

（一）分数的意义

分数在小学数学课程内容中占有十分重要的位置，其内容的教学长达三四年的时间，因此，清楚地理解分数是重要的。

分数在历史上产生较早，公元前1700年前后埃及人阿赫姆斯已广泛地使用 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$ 等分数。尽管欧几里得研究了与今天的分数相同的“比”，但他并没有把这个“比”看成

* 即拓展性内容，属于选学内容，不作为考试要求。

是数。

第一个使用今天常见的分数的人大概是亚历山大的丢番图（公元300年左右），而今天这种书写分数的方法则由里昂纳多·封比萨（公元1200年前后）首先使用。

一般地，分数的定义有以下四种[①]：

份数定义：分数是一个单位平均分之后中的一份或几份。

商定义：分数是两个整数相除的商。

比定义：分数是整数 q 与 p 之比。

公理化定义：有序的整数对（p，q），其中 $p\neq 0$。

对于整个中小学来说，分数的主要作用有两个：一个是作为有理数出现的一种数，也就是作为在运算中出现的一种数，它能和其他数一样参与运算；另一个作用是以比例的形式出现的数。最主要的分数应该是真分数，它代表了一件事物的一部分，其本质在于它的“无量纲性”。如盘子大小的 $\frac{1}{2}$ 代表的实际意义与足球场大小的 $\frac{1}{2}$ 代表的实际意义是不同的，但在讨论分数的时候又是等价的。

分数的无量纲性是国内外首次出现的观点，它的意义在于，能够把事物的许多不可比状态变成可比的状态[②]。这一点，有时候对于数学活动特别是数学建模来说是有意义的。例如：一个小国家的老百姓的生活质量和富有程度，与一个大国家的老百姓的生活质量和富有程度，在很多情况下并不是可比的。但是，一旦转换成人均GDP得到GDP指数，或者得到“恩格尔系数”，就可以进行相互间的比较了。

总之，在理解分数时，不能只考虑它是有理数，还要考虑它是一种无量纲的数。从分数的无量纲性，可以更清楚地把握小学分数教与学的核心要点，以及分数课程教学设计的侧重点。

（二）F. 克莱因. 高观点下的初等数学［M］. 上海：复旦大学出版社，2008.

《高观点下的初等数学》共分3卷。第一卷：算术、代数、分析；第二卷：几何；第三卷：精确数学与近似数学。菲利克斯·克莱因是19世纪末20世纪初世界最有影响力的数学学派——哥廷根学派的创始人，他不仅是伟大的数学家，也是现代国际数学教育的奠基人，杰出的数学史家和数学教育家，在数学界享有崇高的声誉和巨大的影响。克莱因认为，函数是数学的“灵魂”，应该成为中学数学的“基石”，应该把算术、代数和几何方面的内容，通过几何的形式用以函数为中心的观念综合起来；强调要用近代数学的观点来改造传统的中学数学内容，主张加强函数和微积分的教学，改革和充实代数的内容，倡导“高观点下的初等数学”意识。

（三）王仁发. 高观点下的中学数学：代数学［M］. 北京：高等教育出版社，2001.

该书旨在帮助高等师范院校数学系学生与中学数学教师，运用最新的数学观点来理解初等数学中代数学部分的内容，具体包括代数运算与自然数、多项式与环、排列组合与几

---

① 张奠宙，孔凡哲等. 小学数学研究［M］. 北京：高等教育出版社，2009：78～82.

② 史宁中. 教育与数学教育［M］. 长春：东北师范大学出版社，2006：229.

何难题、伽罗华理论等。

（四）高夯．高观点下的中学数学：分析学［M］．长春：东北师范大学出版社，2001．

该书旨在帮助高等师范院校数学系与中学数学教师，通过“居高”来培养学生的数学素质和未来的执教能力，运用最新的数学观点来理解初等数学中分析学的内容，具体包括集合与映射、数集、函数、对数函数与指数函数、三角函数、极值问题。

（五）［俄］柯斯特利金．代数学引论［M］．北京：高等教育出版社，2006．（共三册）

《代数学引论》是作者总结了在莫斯科大学几十年来代数课程的教学经验而写成的，全书分成三卷：第一卷：基础代数；第二卷：线性代数；第三卷：基本结构。它们分别对应于莫斯科大学数学力学系代数教学的三学期的内容。作者在书中把代数、线性代数和几何统一处理成一个教程，并力图把《代数学引论》写成有利于培养学生创造性思维的教材。书中配置了大量难度不同的习题，并介绍了一些专题中尚未解决的问题。第三卷的内容包括群论的一些基本理论、群的结构、表示论基础、环、代数与模、伽罗瓦理论初步。

同步练习

一、单项选择题

1. 著有《算术》的丢番图是哪个民族的人？（　　）

A．埃及　　B．中国　　C．印度　　D．希腊

2. 下列说法正确的是（　　）。

A．$\sqrt{81}$的平方根是± 3　　B．1 的立方根是± 1

C．$\sqrt{1}=\pm 1$　　D．$-\sqrt{5}$是 5 的算术平方根的相反数

3. 下列计算正确的是（　　）。

A．$a^3+a^2=a^5$　　B．$a^3\cdot a^2=a^5$　　C．$(a^3)^2=a^9$　　D．$a^3-a^2=a$

4. 单项式$-\frac{1}{3}x^{a+b}y^{a-1}$与$3x^2y$是同类项，则$a-b$的值为（　　）。

A．2　　B．0　　C．-2　　D．1

5. 下列关于不等式的性质中错误的项是（　　）。

A．$a-b>0$，则$a>b$　　B．$a>b$，$c>0$，则$ac>bc$

C．$a>b$，$c>d$，则$a+c>b+d$　　D．$a>b$，$ab<0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

二、判断题*

1. 等式可以分成严格不等式和非严格不等式。（　　）

2. 函数解析式法，就是明确写出函数的对应关系 $y=f(x)$，以及 x，y 所属的数集 A 和

* 判断题、填空题题型不属于本章考试范围，但本大题所涉及的内容属于考试范围。下文同。

B，进而刻画出函数关系。　　　　（　　）

三、填空题*

1. 有理数和无理数统称为________。
2. 数字、字母、运算符号按照一定规律有意义地结合而成的符号组合叫做________。
3. 算术运算、开方运算总称________。
4. 没有加、减运算的整式称为________，否则称为多项式。
5. 元代数学家朱世杰使用的“________”（1303年）能够求解一大类的高次联立方程，使中国传统数学达到了顶峰。
6. 两个实数或代数式用符号“＞”或“＜”连接起来所得到的式子叫做________。
7. 函数符号 $f(x)$ 由瑞士数学家________于1724年首次使用。
8. 指数函数用 $f(x)=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）来表示，对数函数用________（$a>0$，$a\neq1$）。
9. 最终完成一般二次方程的求根公式这项工作的是被誉为“代数学”之父的________。
10. 1859年李善兰和伟烈亚力合译的第一部微积分著作《________》，首次引进了函数的概念。
11. 代数式可以分为有理式和________。
12. 我国古代李冶创立的“________”可以用来解决方程问题。
13. 用符号“＞”或“＜”写出的不等式称为________不等式，而用符号“≥”或“≤”写出的不等式称为________不等式。
14. 包含初等超越运算的解析式统称为初等超越式，简称超越式，它包括指数式、对数式、三角函数式、________。
15. 毕达哥拉斯学派首先发现了________，并引发第一次数学危机。
16. 写出一个无理数，使它与$\sqrt{3}$的积是有理数________。
17. 如果 $a^2+a+1=0$，那么 $a^{2008}+a^{2007}+a^{2006}=$________。

四、简答题

1. 简述解析式可以划分为哪些类别。
2. 已知 $0<a\leqslant b$，判断下列各式的大小，并按从小到大的顺序排列。

$$a,\ b,\ \sqrt{ab},\ \frac{a+b}{2},\ \frac{2ab}{a+b},\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

3. 简述不等式解集的三种常用表示法。
4. 简述复数的引进。
5. 简述函数的三种表示方法。

五、论述题

如何把握中学数学“负数”教学的深广度？

第二章

图形与几何

内容辅导

一、学习目标

1．识记初中几何课程内容的组成及其特点，领会初中几何课程从经验几何发展为演绎几何的发展变化的基本特点。

2．识记直观几何、实验几何、度量几何、变换几何、演绎几何的设计特点。

3．在比较分析中，领会经验几何、变换几何、演绎几何（欧几里得《几何原本》）、度量几何各自的研究侧重点。

4．初步识记《数学课程标准》下的初中几何课程各主要部分编排的基本思路，领会各部分内容研究侧重点的变化和发展的缘由。

二、重点和难点

本章主要分析初中几何学所涉及的各分支领域，以及各分支领域具体的数学内涵，讨论初中几何的学科特点及其在不同领域中的侧重点，研究经验几何（即直观几何、实验几何的统称）、度量几何、变换几何、演绎几何的学科属性和基本特点，旨在深刻揭示初中几何课程内容的几何学内涵。

三、重点难点讲解

本章内容涉及几何学的不同分支学科领域，这些几何分支学科领域对多数初中数学教师来说是陌生的，因此，相对系统地学习每个分支学科领域就变得十分重要。不仅如此，还需要结合初中几何课程的主要模块，正确认识其课程目标的侧重点。

（一）如何理解人类几何学发展的基本脉络

由于人类生产和生活的需要，产生了几何学。在希腊语中，“几何学”是由“地”与“测量”合并而来的，本来有测量土地的含义，意译就是“测地术”。“几何学”这个名词，是我国明代数学家徐光启根据读音译出的，沿用至今。

在原始社会，人类在生产和生活中，积累了许多有关物体的形状、大小和相互之间位置关系的知识。例如，古代人认识他们的猎物的形状、大小，记住他们的居住地与打猎地