初中数学融通归一复习法

CHUZHONGSHUXUERONGTONGGUIYIFUXIFA

——初三数学专题复习

CHUSANSHUXUEZHUANTIFUXI

梁建辉 著

张晓娴 审

河北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学融通归一复习法·初三数学专题复习/梁建辉著.—石家庄:河北科学技术出版社,2012.12
ISBN 978-7-5375-5691-0

Ⅰ.①初… Ⅱ.①梁… Ⅲ.①中学数学课-初中-升学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 005035 号

初中数学融通归一复习法·初三数学专题复习
梁建辉 著

出版发行	河北科学技术出版社
地　　址	石家庄市友谊北大街 330 号
邮　　编	050061
印　　刷	石家庄市汇文印刷有限公司
经　　销	新华书店
开　　本	880×1230　1/16
印　　张	16.25
版　　次	2013 年 1 月第 1 版
印　　次	2013 年 1 月第 1 次印刷
定　　价	36.00 元

前　　言

本书曾用名

2013 年前叫《老梁中考之初中数学专题复习》，是石家庄市第 40 中学内部资料。

本书宗旨

帮助学生轻松、高效学数学，实现知识的系统化，达到“举一反三、融会贯通”的效果。

本书特点

1. **突出方法，按图索骥轻松学数学**

如：题中有中点怎么想、含角平分线的题怎么做…，按图索骥，一目了然。

2. **归类独特，容易实现“触类旁通”**

如：最值问题。初中“最值”有哪几种，看后一清二楚。这样有意识地归类，就能“触类旁通”！本书归类独特，一定对你有帮助。

3. **用法汇集，便于达到“融会贯通”**

经常体会、思考、感悟知识的不同用法，就能实现“融会贯通”！本书正在努力实现它。

4. **刻“一”于脑，“举一反三”**

多题归一、多解归一，本书旨在帮你建立那个“一”，实现“举一反三”！

5. **用词平等柔和、友善活泼、快乐学习**

“9 变 8”、“小虫爬爬”，形象、生动、活泼的比喻，让你过目不忘，快乐学习。

6. **实战性强**

本书就是平时上课、培优的整理，字里行间体现着实战特点，操作性强。

何时开始用这本书

· 初二下用，未雨绸缪、捷足先登；

· 初三一轮用，时间宽松，能实现夯实基础与提升能力的双丰收；

· 初三二轮用，时间紧，选择用；

· 适合自学、培优用。

感谢

首先感谢石家庄市第 40 中学，是 40 中这片沃土哺育了我，领导的关爱、指导、培养、扶助才使本书的成书有了前提和依托；

感谢石家庄市 40 中学数学组这个优秀的集体，这是我温暖的家，这本书是我们数学组集体智慧的结晶，不过是我执笔写成而已。我仅写出了我们家庭成员在初中数学教学实践中的点滴，由于我的悟性有限，可能还会有偏差。

感谢我的学生，特别是 2008 届的学生，他们说：老梁，把给我们上课的资料写成书吧，就叫《老梁中考》，我们给您写序！是他（她）们对我的要求、鼓励与企盼，才使我有勇气把自己的拙

思拙行见著于笔端。

感谢王洁敏老师、缴志清老师，以及所有中国教育学会“十一五”科研规划“数学考试评价的理解与实践研究”课题组的专家，你们的讲座给了我很多启示。

感谢河北省初中数学特级教师张晓娴老师，张老师不仅对本书提出了宝贵意见，并于百忙之中对本书进行了审查。

本书成书后，已经被石家庄市第40中学及部分友好学校2011年、2012年两届毕业生所用，并有幸得到了以下专家、教师的审阅、指导，根据这些专家、老师的建议又进行了修改、完善，较之前更有适应性。他（她）们是：王洁敏、李会芳、梁丽宾、刘建封、张晓娴、解淑丽、任立英、倪辉、孟勇惠、陈华、朱玉涛、赵冉、艾娜、孔晓峰、杨昱、张晓昀、解丽欣、李志远、李岸汾、王丽丽、丁绍山、李俊臣、靳淑燕、王化桥、王然等。

在此对所有审阅过本书、使用过本书、指导过我的专家、教师致以诚挚的谢意！感谢您的信任与提出的宝贵意见。我水平有限，认知肯定有这样或那样的错误，欢迎您的指教。

感谢各省市的中考命题专家，本书几乎所有题目都精选于历年的中考题。

最后借助我的学生的话作为结束语：

“掌握良好的学习技巧，学好数学其实是很容易的事。梁老师的这本书与众不同之处正在于此，就是告诉你怎么复习、怎么整理，有什么方法、什么技巧，一个知识点有什么用、怎么用。”

您的朋友　老梁

2012年11月于石家庄

梁门立雪

接到梁老师请我为本书写序的电话后，我又是兴奋，又是忐忑，原因有四：一为老师的书出版而高兴；二为此书能把梁老师的教学思想与方法传播的更广，让更多的学生受惠，这也是实现了我们的夙愿；三为老师竟真让学生给他的书作序，并且捉刀人指定是我；四为作序者往往是大家名流，而我和我的同学们虽已不再是4年前那帮不知天高地厚的初中生，也仅是大二学生而已。

但我还是选择了接受这个任务，理由很简单："山高水长有时尽，唯我师恩日月长"；对这本书最有发言权的就是我们这些受教于老梁或者使用过此书的学生了；"恰同学少年"的我们虽然才疏学浅，但言出必行，敢为天下先，何况20年后我辈一定不乏名家；作为极力"怂恿"老梁出书的弟子代表，我当仁不让。

北宋时，杨时与游酢冒雪拜见当时著名理学家程颐。程颐正在休息，二人便侍立门外，等程颐醒时，积雪尺厚，二人仍站立门外。后人用"程门立雪"表示求学心切与尊师重道。第一次见到梁老师，是在刚升初二的开学典礼上。梁老师特地来到我们班见他的课代表们，作为数学课代表的我和全班同学一样，对这个新老师充满期待，一个照面、几句闲聊，梁老师给我们留下的和蔼可亲的印象，并且和蔼可亲的老梁伴我们走过了两年美好的初中生活。我从见到梁建辉老师那天起，便开始了"梁门立雪"的时光。

学生对老师，有一心向学求知欲无穷追老师的"学霸式"的，也有见了老师躲着走的"学怕式"的。在这两者之外，还有师生关系亲切、自然、和谐的"学友式"的，这种关系的形成不仅取决于学生，更取决于老师。读《论语》后我感觉孔子是这样的，现实中梁老师也是这样的。作为课代表，我能和梁老师有更多的接触，从问题的妙解到难题的探究、从国家大事到家长里短都是我们闲谈的内容。一段时间我刻意记下梁老师的"名言"，编成一篇《老梁语录》送给他。希望这些话他会对一届又一届学生强调叮嘱，为他们的成长提供自己的智慧。梁门立雪的目的，不单单在于对固定知识的渴求，还饱含着对更多智慧的期待。

仅是能和学生打成一片，教学中却没有简捷有效的方法，是不能称之为一个最优秀教师的。梁老师不仅是我们生活中的益友，更是我们学习中的良师，他的独具特色的教学思路和方法，让我们从畏惧数学，变成了一个个的数学迷。所以在初三的第二学期，我们一批人不停地"怂恿"梁老师把他上课所讲整理成书，并"霸道"地说："书名就叫《老梁中考》！书的序必须得由我们来写！"

下面我便简单介绍一下梁老师在百忙之中完成的这本数学宝典。

首先，它打破传统教辅的编排顺序，对解题方法论进行了系统的、极有针对性的梳理总结，学生对不会的题目完全可以按图索骥，经自己感悟后即可触类旁通。

其次，它是梁老师数十年教学的结晶，每一个方法都是在实际教学中经过千锤百炼、大浪淘沙的精华。许多方法乍一看匪夷所思，而学会后屡试不爽。一些名词虽然幽默奇特，实则提要钩玄，体现了梁老师一贯的课堂风格。

还有，全书最重要的思想方法便是在本书使用说明提到的"举一反三，融会贯通"八个字，这也是数学思维的核心所在，是梁老师在课堂上要实现的，这八个字也是我日常给他人讲解理科题时引用最多的词汇。

学好数学，仅掌握数学学习之"技"是不够的，更重要的是掌握数学学习之"道"，真正地把这种方法融入到自己的思维中。我想本书便是在做这样的工作。我们应当感谢这样的工作，

感谢为这项工作而付出的人。

关于这本书,关于梁老师,不仅我想说的很多,我的初中同学们也想说很多,限于篇幅,仅选下面几条分享:

老梁这本书的意义在于通过书中的引导和自己的思考形成一种属于自己的学习方法,让自己在学习数学的道路上走得更远。

——梁　爽(老梁 2008 届弟子)

我们的梁老师,我们一直亲切地称之为“老梁”,他永远都是一副和蔼可亲的样子,每天都是笑眯眯的。老梁很尊重同学们的发现与首创,他会很认真的备案并收藏。他对学生的尊重博得了大家对他的更多的尊敬。

——赵梦琪(老梁 2008 届弟子)

老梁的数学在于培养一种兴趣,一种分析数学的能力,这种兴趣和能力是可以收益良久的。老梁给我打下的基础让我在高中学习数学的路上走得轻松自在。

——马良华(老梁 2008 届弟子)

梁老师是对我影响最大的老师。在教学中,梁老师总是能把相似的题型总结到一起,概括出这类题的答题技巧,在生活中,老梁又是语重心长的教给我们如何去做人、做事,可以说梁老师是我们真正的良师益友。

——李梓兴(老梁 2008 届弟子)

我们学弟学妹们也有话说,他们或者为数学强手,或者在跟梁老师学习后成绩突飞猛进,写下寄语以示师恩:

在备战中考时,得到老梁的指导和帮助,我感到非常幸运。那时用着这本书最初的版本,用后感觉解题也很有思路,最终中考的成绩非常理想。作为这本书的受益者,我真心地想说,这本书真的很棒。

——廉　旭(老梁 2011 届弟子)

跟着梁老师,最大的收获当然是知道怎么学数学了!

——杜昊天(老梁 2011 届弟子)

跟梁老师学数学,效果不只体现在从六十到一百一十二分的成绩上,更体现在态度上,梁老师使我从恐惧数学到热爱数学,使我对数学有一种豁然开朗的感觉。

——王延琪(老梁 2011 届弟子)

数学是人类在与自然互动过程中,克服自然、顺应自然的伟大创造,无数先人焚膏继晷、兀兀穷年为之不懈探索。世界末日只是一个玩笑,历史没有终止在 2012 年,并且继续向未来延伸,而人类的探索也是无止境的,特别是对我们后学者来说,探索才刚刚开始……

最后,愿以我国著名数学家华罗庚先生的话作结,与求学路上的学子共勉:“做学问,做研究工作,必须持之以恒,不怕失败。摔倒了,爬起来想一想,再前进。”

是为序。

数学永远的学生:邓子琦

2012 年 12 月序于黑龙江哈尔滨

目　　录

第一部分　探究与证明

第二部分　代数综合

第三部分　运动与探究

第一部分　探究与证明

探究证明举例

通法:“照着做!”　　证明格式:“照着抄!”

解释

1.“照着做!”:即方法的不变,有4层意思.

A. 照题目提供的方法做,如阅读理解题、新定义类题、操作探究题等.

B. 照自己解决的题目前一问或前两问的方法做.

C. 转化为题目前面已解决问题的图形再去做.

D. 用前面的结论.

2.“照着抄!”:即格式、结论表现出稳定性.

A. 在证明中,前一问用哪两个三角形全等,后面一样,就用那两个三角形全等.

B. 在证明中,前一问证三角形全等用什么条件,后面基本一样,有变化也是细微的.

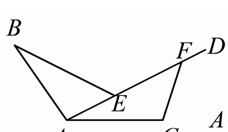
C. 即使结论有变,但有一致性,例如:如果三线段和的关系变成差的关系.

解法举例

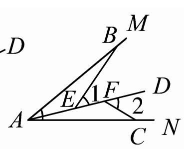
例1-1　(1)感知:已知,如图①,$AB=AC$,点E、F都在射线AD上,$\angle BEF=\angle CFD=\angle BAC$.
求证:$\triangle ABE\cong\triangle CAF$.

(2)拓展:如图②,点B、C在$\angle MAN$的边上,点E、F在$\angle MAN$内部的射线AD上,$\angle 1$、$\angle 2$分别是$\triangle ABE$、$\triangle CAF$的外角.已知$AB=AC$,$\angle 1=\angle 2=\angle BAC$.求证:$\triangle ABE\cong\triangle CAF$.

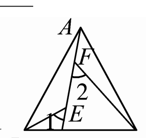
(3)应用:如图③,在等腰三角形ABC中,$AB=AC$,$AB>BC$.点D在边B上.$CD=2BD$.点E,F在线段AD上.$\angle 1=\angle 2=\angle BAC$.若$\triangle ABC$的面积为9,则$\triangle ABE$与$\triangle CDF$的面积之和为________.



图①



图②



图③

说明

请观察对比(1)、(2)的证明,体会“照着做”、“照着抄”.

(1)证明:$\because\angle BEF=\angle CFD$
$\therefore\angle BEA=\angle AFC$
又$\because\angle BEF=\angle BAC$
$\therefore\angle B+\angle BAE=\angle BAE+\angle FAC$
$\therefore\angle B=\angle FAC$
又$\because AB=AC$
$\therefore\triangle ABE\cong\triangle CAF$

(2)证明:$\because\angle 1=\angle 2$
$\therefore\angle BEA=\angle AFC$
又$\because\angle 1=\angle BAC$
$\therefore\angle ABE+\angle BAE=\angle BAE+\angle FAC$
$\therefore\angle B=\angle FAC$
又$\because AB=AC$
$\therefore\triangle ABE\cong\triangle CAF$

(3)6(提示:本问与(2)一样,通过证$\triangle ABE\cong\triangle CAF$,得$\triangle ABE$与$\triangle CDF$的面积之和等于$\triangle ACD$的面积.)

体验与感悟

原题

如图1,点E是$ABCD$的BC边中点,点F在线段AE上,BF的延长线交射线CD于点G,若$\frac{AF}{EF}=3$,求$\frac{CD}{CG}$的值.

(1)尝试探究:在图1中,过点E作$EH\parallel AB$交BG于点H,则AB和EH的数量关系是________,CG和EH的数量关系是________,$\frac{CD}{CG}$的值是________.

(2)类比延伸:如图2,在原题的条件下,若$\frac{AF}{EF}=m(m>0)$,则$\frac{CD}{CG}$的值是________(用含m的代数式表示),试写出解答过程.

(3)拓展迁移:如图3,梯形$ABCD$中,$DC\parallel AB$,点E是BC延长线上一点,AE和BD相交于点F,若$\frac{AB}{CD}=a$,$\frac{BC}{BE}=b(a>0,b>0)$则$\frac{AF}{EF}$的值是________(用含a,b的代数式表示).

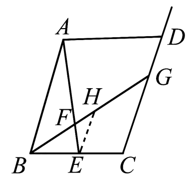


图1

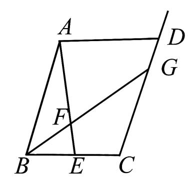


图2

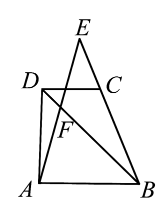


图3

第01单元 一题多解

说明:一题多解体现的是思维与方法的多样性,是开拓思路非常有效的途径,之所以把它放在开篇,就是要强调它的重要性,要常做这个功课.

例1-1 如图1-1,已知在菱形$ABCD$中,F为边BC的中点,DF与对角线AC交于点M,过M作$ME\perp CD$于点E,$\angle1=\angle2$.求证$AM=DF+ME$.

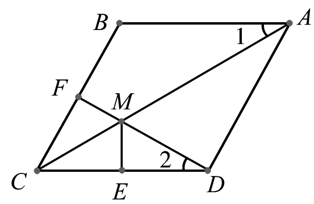


图1-1

交流:不同方法的共同点是都充分利用了菱形对角线平分对角、对边平行且相等的性质,再加$\angle1=\angle2$得$\triangle CDM$是等腰三角形,ME三线合一,$\triangle CEM\cong\triangle CFM$.法一:根据$F$是中点、$AB\parallel CD$造与$\triangle CDF$成中心对称的三角形.法二是推出$\triangle BCD$为等边$\triangle$.

例1-2 如图1-2,在一、三象限的平分线l:$y=x$上确定一点Q,使点Q到$D(1,-3)$、$E(-1,-4)$的距离之和最小,并求出Q点的坐标.

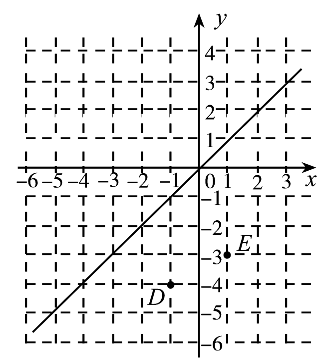


图1-2

交流:作出E关于l的对称点E'.法一,借助EE'与l两直线的交点求出Q点坐标,法二借助相似求出Q点坐标.用几何法求交点坐标在函数题中,特别一次函数图象信息题中运用,常有美妙之感.

体验与感悟 01

1. 甲、乙两人沿相同的路线由 A 地到 B 地匀速前进，他们前进的路程为 s(km)，甲行走的时间为 t(h)函数图象如图 1－3，则是乙出发________小时后追上甲.

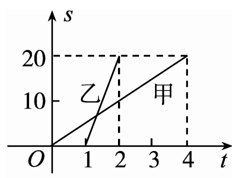


图 1－3

2. 如图 1－4，已知△ABC 中 $AB=AC$，在线段 CA 上截线段 CE，在 AB 的延长线上截线段 $BD=CE$，连结 DE 交 BC 于 M，请你通过观察、测量判断出线段 MD 与线段 ME 的数量关系，并证明你的结论.

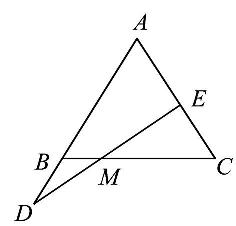


图 1－4

提醒：此题有不少于 5 种方法，再试试.

3. 如图 1－5，在 Rt△ABC 中，$\angle ABC=90°$，$BA=BC$，点 D 为 BC 边的中点，$BE\perp AD$ 于点 E，交 AC 于点 F. 求$\dfrac{AF}{FC}$的值.

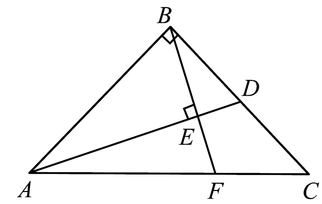


图 1－5

提醒：此题至少有 2 种方法哟！

4. 等腰△ABC 中 $AB=AC$，$CG\perp BA$ 交 BA 的延长线于点 G. 如图 1－6，将一把等腰直角三角尺的一条直角边与 AC 边放在同一条直线上，另一条直角边交 BC 边于点 D，过点 D 作 $DE\perp BA$ 于点 E.

请你猜想并写出 $DE+DF$ 与 CG 之间满足的数量关系，然后证明你的猜想.

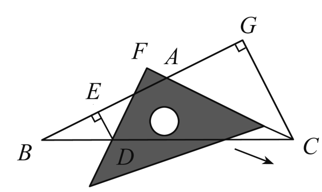


图 1－6

提醒：此题有不少于 6 种方法，再试试.

第 02 单元　平行线类

☞**试试看:**与平行有关的知识与题目能想起多少?

平行是两直线最基本的位置关系之一、最常见背景图形、最常用的辅助线。在初中几何中,一般用平行可求角、进行等积转换、进行平移、结合角平分线得等腰三角形、得相似(含全等)、得特殊四边形(如平行四边形矩形菱形正方形梯形)等.本单元只对通过平行求角、进行等积转换、由面积等得平行三类题目进行研究,其他题型在后面的课里遇到时再详细研究.

一、知平行求角构造三线八角

☞**通法:**利用平行线这个背景,构造三线八角,再结合三角形内角和等于 180 度解决.

例 2-1-1　图 2-1-1 所示是赛车跑道的一段示意图,其中 $AB /\!/ DE$,测得 $\angle B = 140°$,$\angle D = 120°$,则 $\angle C$ 的度数为　(　　)

A. 120°　　B. 100°　　C. 140°　　D. 90°

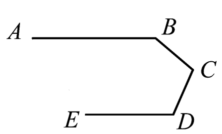
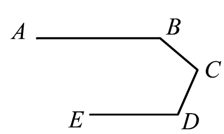


图 2-1-1



备用图

☞**交流:**法一是通过延长 BC 来构造三线八角,法二是通过作平行线构造三线八角.

例 2-1-2　同一平面内两条直线有相交和平行两种位置关系.

(1)如图 2-1-2①,若 $AB /\!/ CD$,点 P 在 AB、CD 外部,则 $\angle BPD$、$\angle B$、$\angle D$ 的数量关系是________.

(2)如图 2-1-2②,$AB /\!/ CD$,$\angle BPD$、$\angle B$、$\angle D$ 的数量关系为________.

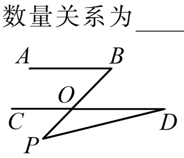


图 2-1-2①

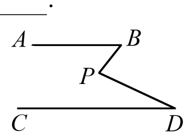


图 2-1-2②

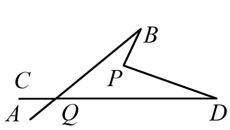


图 2-1-2③

(3)在图 2-1-2②中,将直线 AB 绕点 B 逆时针方向旋转一定角度交直线 CD 于点 Q,如图 2-1-2③,则 $\angle BPD$ 、$\angle B$ 、$\angle D$ 、$\angle BQD$ 之间有何数量关系?(不需证明).

(4)根据(3)的结论,求图 2-1-2④中 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ 的度数.

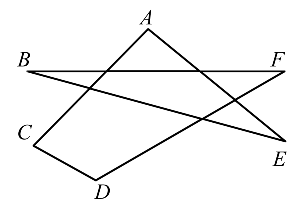


图 2-1-2④

☞**交流:**前三问造三线八角、找内外角关系,第四问最重要是:找出类图 2-1-2③的凹四边形,再"用结论!".

体验与感悟 2-1

1. 如图 2-1-3,将三角尺的直角顶点放在直线 a 上,$a /\!/ b$,$\angle 1 = 50°$,$\angle 2 = 60°$,则 $\angle 3 =$　(　　)

A. 50°　　B. 60°　　C. 70°　　D. 80°

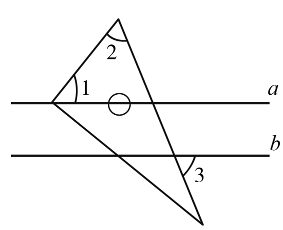


图 2-1-3

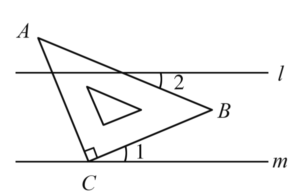


图 2-1-4

2. 如图 2-1-4,直线 $l /\!/ m$,将含有 45°角的三角板 ABC 的直角顶点 C 放在直线 m 上,若 $\angle 1 = 25°$,则 $\angle 2$ 的度数为　(　　)

A. 20°　　B. 25°　　C. 30°　　D. 35°

3. 如图 2-1-5,$AB /\!/ CD$,直线 EF 与 AB、CD 分别相交于 E、F 两点,EP 平分 $\angle AEF$,过点 F 作 $FP \perp EP$,垂足为 P,若 $\angle PEF = 30°$,则 $\angle PFC =$ ________.

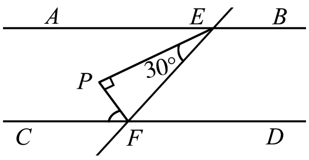


图 2－1－5

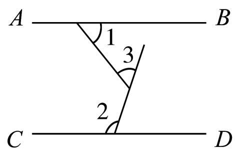


图 2－1－6

4. 如图 2－1－6，$AB /\!/ CD$，$\angle 1=50°$，$\angle 2=110°$，则 $\angle 3=$________.

5. 珠江某段江水流向经过 B、C、D 三点拐弯后与原来方向相同，如图 2－1－7，若 $\angle ABC=120°$，$\angle BCD=80°$，则 $\angle CDE=$________度.

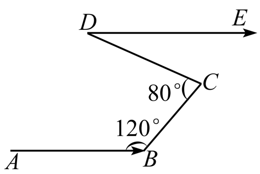


图 2－1－7

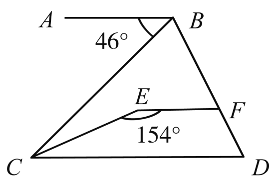


图 2－1－8

6. 如图 2－1－8，$AB /\!/ EF /\!/ CD$，$\angle ABC=46°$，$\angle CEF=154°$，则 $\angle BCE$ 等于（　　）

A. 23°　　B. 16°　　C. 20°　　D. 26°

7. 如图 2－1－9，直线 $AC /\!/ BD$，连结 AB，直线 AC，BD 及线段 AB 把平面分成①、②、③、④四个部分，规定：线上各点不属于任何部分. 当动点 P 落在某个部分时，连结 PA，PB 构成 $\angle PAC$，$\angle APB$，$\angle PBD$ 三个角.（提示：有公共端点的两条重合的射线所组成的角是 0°角.）

(1) 当动点 P 落在第①部分时，
求证：$\angle APB=\angle PAC+\angle PBD$.

(2) 当动点 P 落在第②部分时，$\angle APB=\angle PAC+\angle PBD$ 是否成立（直接回答成立或不成立）？

(3) 当动点 P 在第③部分时，全面探究 $\angle PAC$，$\angle APB$ 及 $\angle PBD$ 之间的关系，并写出动点 P 的具体位置和相应的结论. 选择其中一种结论加以证明.

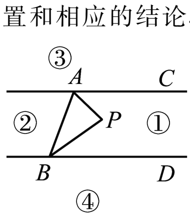
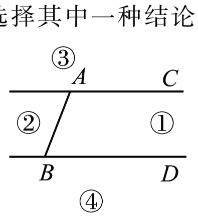
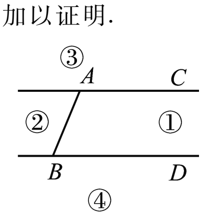


图 2－1－9



备用图 1



备用图 2

提醒：请回味与感悟一下已知平行线求角的一般方法.

二、找（或造）平行进行等积转换

通法：利用背景图形的特点，找到平行线，再构造同底等高对三角形进行面积转化；

注意：在大题中，一般地，(1) 前面怎么做，后面参照怎么做，方法不变；(2) 化成前面问题中的图形，或和前面问题类似的图形，再按前面的方法做；(3) 后面可以用前面的结论. 即：照着做、用结论！

例 2－2－1　（2013 模拟，老梁原创）

探究规律

如图 2－2－1①，已知 $AB /\!/ MN$，点 C 在 MN 上，请在直线 AB 的上方，找出一个不同于 C 的点 D，画出 $\triangle ABD$，并使得 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 的面积相等.

①点 D 在________________，

AB 与 CD 的位置关系：____________；

②$\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 的面积相等的理由是：____________________________.

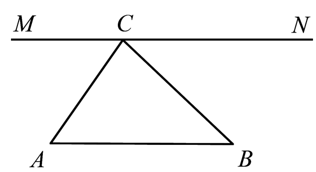


图 2－2－1①

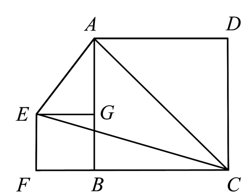


图 2－1－2②

解决问题

③如图 2－2－1②，点 B 在线段 FC 上，在线段 FC 同侧作正方形 $ABCD$ 及正方形 $EFBG$，连接 AC、EC、AE 得到 $\triangle AEC$. 如果设 $FB=a$，$BC=b$，则 $\triangle AEC$ 的面积等于________；

④请你在图 2－2－1③中作出一个和四边形 $ABCD$ 面积相等的三角形，作法是：

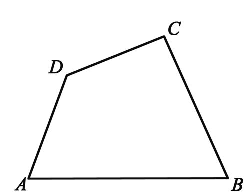


图 2－2－1③

交流：本题的方法可概括为：(1) 知平行，直接根据同底等高面积相等找等积三角形；(2) ③发现连 BE 后 $AC /\!/ BE$，然后利用同底等高；④连 BD 分割出三角形，再利用同底等高进行等积转换.

体验与感悟 2-2

1. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4，E 是射线 CD 上的一个动点，以 CE 为一条直角边在正方形 $ABCD$ 的右侧作等腰 Rt△CEF，连结 BF、FD、BD.

观察计算

(1) ①如图 2-2-2①，当 $CE=4$ 时，$S_{\triangle BDF}=$____.

②如图 2-2-2②，当 $CE=2$ 时，$S_{\triangle BDF}=$________.

③如图 2-2-2③，当 $CE=8$ 时，$S_{\triangle BDF}=$________.

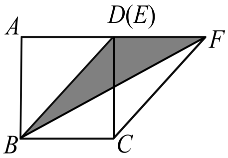


图 2-2-2①

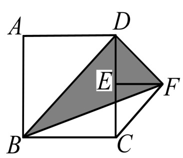


图 2-2-2②

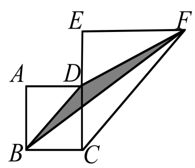


图 2-2-2③

探索发现

(2) 根据上述计算的结果你认为：①BD 与 CF 的位置关系是________；②△BDF 的面积与正方形 $ABCD$ 的面积关系是________.

实际运用

(3) 农民赵大伯有一块正方形的土地 $ABCD$（如图 2-2-2④），由于修路被占去一块三角形的地 BCE，但决定在 DE 的右侧补给赵大伯一块，使补偿后的土地四边形 $ABMD$ 与原地块面积相等. 已知 M、B、E 三点在同一直线上，请你画图确定 M 点的位置，并用文字说明画法.

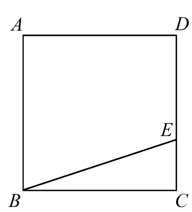


图 2-2-2④

2. 在图 2-2-3 中五边形 $ABCDE$ 是张大爷十年前原有的一块土地，经多年开荒后现已变成图2-2-3所示的 $ABCMNE$ 形状，但原地与开荒地的分界线（图 2-2-3中折线 CDE）还保留着. 张大爷想过 E 点修一条直路，直路修好后，要保持直路左边的土地面积与原有地的一样多. 请你用有关的几何知识，按张大爷的要求设计出修路方案.（要求：①不计分界小路与直路的占地面积；②直接在图 2-2-3 中画出相应的图形，不写画法.）

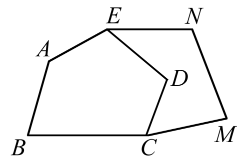


图 2-2-3

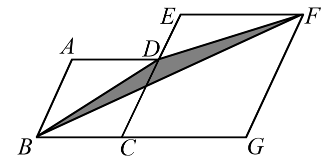


图 2-2-4

3. 如图 2-2-4，菱形 $ABCD$ 和菱形 $ECGF$ 的边长分别为 2 和 3，$\angle A=\angle E=120°$，则图中阴影部分的面积是（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. 3　　D. $\sqrt{2}$

4. 如图 2-2-5，线段 $AC=n+1$（其中 n 为正整数），点 B 在线段 AC 上，A 在线段 AC 同侧作正方形 $ABMN$ 及正方形 $BCEF$，连接 AM、ME、EA 得到△AME. 当 $AB=1$ 时，△AME 的面积记为 S_1；当 $AB=2$ 时，△AME 的面积记为 S_2；当 $AB=3$ 时，△AME 的面积记为 S_3；…；当 $AB=n$ 时，△AME 的面积记为 S_n. 当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n-S_{n-1}=$__________.

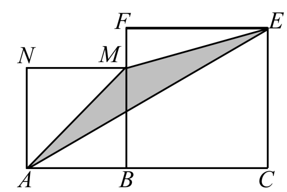


图 2-2-5

5. **规律：**

如图 2-2-6①，已知直线 $m\parallel n$，A、B 为直线 n 上的两点，C、P 为直线 m 上的两点。如果 A、B、C 为三个定点，点 P 在直线 m 上移动，那么无论点 P 移动到任何位置总有△ABP 与△ABC 的面积相等，其理由是____________________________.

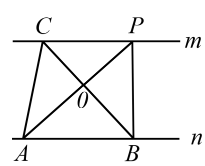


图 2-2-6①

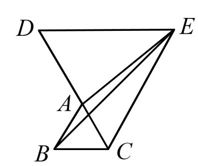


图 2-2-6②

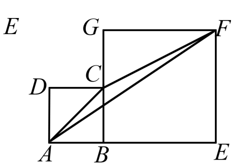


图 2-2-6③

应用

(1) 如图 2-2-6②，△ABC 和△CDE 都是等边三角形，如果 $AB=1$，则△ABE 的面积为______.

(2) 如图 2-2-6③，四边形 $ABCD$ 和四边形 $BEFG$ 都是正方形，如果 $AB=2$，则△ACF 的面积为______.

(3) 如图 2-2-6④，五边形 $ABCDE$ 和五边形 $BFGHP$ 都是正五边形，如果 $AB=a$，求△ACH 的面积（结果不求近似值）.

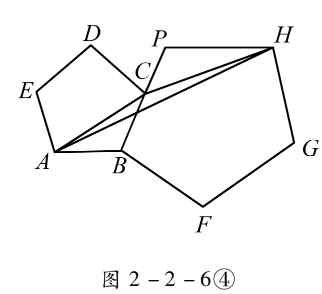


图 2-2-6④

6. **探究**:平行四边 $ABCD$ 的面积为 100,M 是 AB 所在直线上的一点.

(1)如图 2－2－7①,当点 M 与点 B 重合时,$\triangle DCM$ 的面积为________.

(2)如图 2－2－7②,当点 M 与点 A、点 B 都不重合时,$\triangle DCM$ 的面积为________.

(3)如图 2－2－7③,当点 M 与在 AB 或 BA 的延长线上时,$\triangle DCM$ 的面积为________.

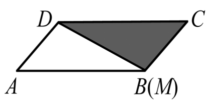


图 2－2－7①

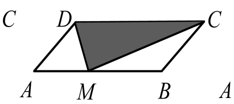


图 2－2－7②

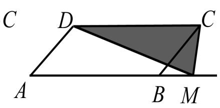


图 2－2－7③

推广:如图 2－2－7④,平行四边形 $ABCD$ 的面积是 a,E、F 是两边 DC、BC 延长线上两点,连结 DF、AF、AE、BE,求图中阴影部分的面积和,简要说明理由.

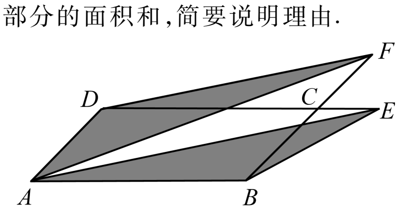


图 2－2－7④

运用:如图 2－2－7⑤,平行四边形 $ABCD$ 是某市广场的一块绿地,PQ、MN 分别平行 DC、AD,交于点 O,其中四边形 $AMOP$ 的面积等于 300,四边形 $MBQO$ 的面积等于 400,四边形 $NCQO$ 的面积等于 700. 现进行绿地改造,在绿地内部做一个三角形区域 MQD(图中阴影部分)种植不同的花草,求出 $\triangle MQD$ 区域的面积.

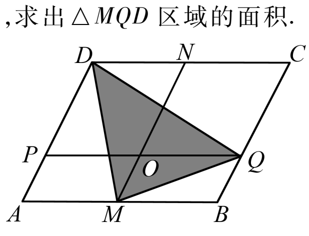


图 2－2－7⑤

提醒:请回味与感悟一下利用平行进行面积转换的技巧.

三、平行与函数

下面的例子告诉你:“由反比例函数图象上两点可以推出平行”. 请你思考:①由反比例函数得平行的依据? ②你还知道怎样可证得两直线平行?

通法:利用背景函数的性质、特点,转化为第 1 问中的图形,再用第 1 问中的方法或结论解决.

注意:照着做、用结论!

例 2－3－1　探究新知:

(1)如图 2－3－1①,已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 的面积相等,试判断 AB 与 CD 的位置关系,并说明理由.

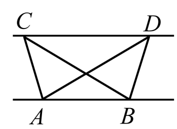


图 2－3－1①

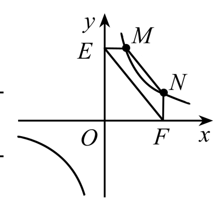


图 2－3－1②

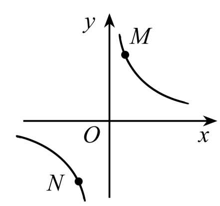


图 2－3－1③

结论应用

(2)如图 2－3－1②,点 M,N 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$($k>0$)的图象上,过点 M 作 $ME\perp y$ 轴,过点 N 作 $NF\perp x$ 轴,垂足分别为 E,F. 试证明:$MN/\!/EF$.

(3)若(2)中的其他条件不变,只改变点 M,N 的位置如图 2－3－1③,请判断 MN 与 EF 是否平行.

方法评述:本题的方法可概括为:由反比例函数中 K 的几何意义得两同底三角形面积相等,再由(1)的结论得线段的位置关系“平行”.

发现规律:从双曲线上任意两点 M,N 各向一条坐标轴作垂线,垂足分别为 E,F,则 $MN/\!/EF$.

体验与感悟 2－3

1. 如图 2－3－2，一次函数 $y=x+3$ 的图象与 x 轴，y 轴交于 A，B 两点，与反比例函数的图象相交于 C、D 两点，分别过 C、D 两点作 y 轴、x 轴的垂线，垂足为 E、F，连接 CF、DE. 有下列结论：①$\triangle CEF$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等；②$AB \parallel FE$；③$\triangle AOB \backsim \triangle FOE$④$\triangle DCE \cong \triangle CDF$；⑤$AC=BD$；其中正确的结论是 ( )

A. ①②　　B. ①②③

C. ①②③④⑤　　D. ②③④

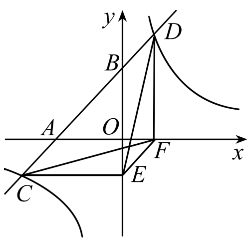


图 2－3－2

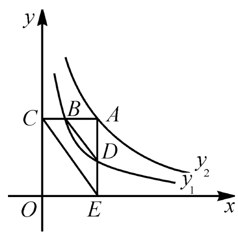


图 2－3－3

2. 双曲线 $y_1=\dfrac{1}{x}$、$y_2=\dfrac{3}{x}$ 在第一象限的图像如图 2－3－3，过 y_2 上的任意一点 A，作 x 轴的平行线交 y_1 于 B，交 y 轴于 C，过 A 作 x 轴的垂线交 y_1 于 D，交 x 轴于 E，连结 BD、CE，则 $\dfrac{BD}{CE}=$________.（思考：从本题你发现什么规律了吗？）

3. 如图 2－3－4，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $A(-1,0)$、$B(3,0)$、$C(0,3)$ 三点，对称轴与抛物线相交于点 P、与直线 BC 相交于点 M，连接 PB.

(1) 求该抛物线的解析式.

(2) 抛物线上是否存在一点 Q，使 $\triangle QMB$ 与 $\triangle PMB$ 的面积相等？若存在，求点 Q 的坐标；若不存在，说明理由.

(3) 在第一象限、对称轴右侧的抛物线上是否存在一点 R，使 $\triangle RPM$ 与 $\triangle RMB$ 的面积相等？若存在，直接写出点 R 的坐标；若不存在，说明理由.

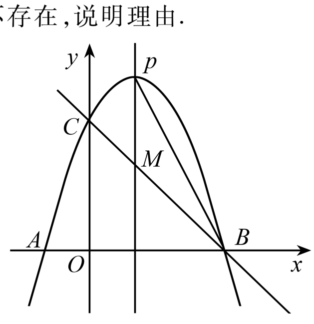


图 2－3－4

提醒：(2) 过 P 和 P 关于 M 的对称点作 BC 的平行线，交点即为所求.

4. 探究新知

(1) 如图 2－3－5①，已知 $AD \parallel BC$，$AD=BC$，点 M，N 是直线 CD 上任意两点. 则 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ABN$ 的面积关系________.

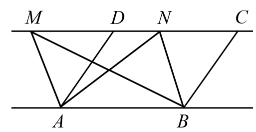


图 2－3－5①

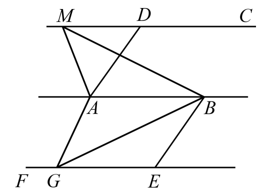


图 2－3－5②

(2) 如图 2－3－5②，已知 $AD \parallel BE$，$AD=BE$，$AB \parallel CD \parallel EF$，点 M 是直线 CD 上任一点，点 G 是直线 EF 上任一点. 试判断 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ABG$ 的面积是否相等，并说明理由.

结论应用

(3) 如图 2－3－5③，抛物线的顶点为 $C(1,4)$，交坐标轴于点 $A(3,0)$、D. 试探究在抛物线上是否存在除点 C 以外的点 E，使得 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ACD$ 的面积相等？若存在，请求出此时点 E 的坐标，若不存在，请说明理由.

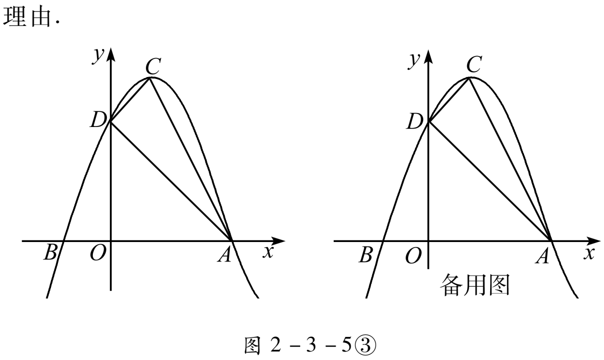


图 2－3－5③

提醒：请回味与感悟一下代数与几何的相互转换.

第 03 单元　中点类

试试看: 与中点、中线有关的知识与题目能想起多少?

中点是线段中最特殊的点:知线段中垂线上任意一点可由轴对称造(或找)等腰三角形,利用中点是线段的对称中心造(或找)全等三角形,等腰三角形三线合一,三角形的中线等分该三角形面积,过中点作平行线可得相似三角形……

一、中线等分三角形面积

通法: 遇等分面积题目想到用中线. 当要求等分、或分割三角形或多边形面积时,最常用的方法是作三角形的中线、或把多边形先转化为三角形,再借助中线来解决.

例 3-1-1　(1)请你用三种不同的方法把图 3-1-1①~图 3-1-1③中$\triangle ABC$的面积四等分.

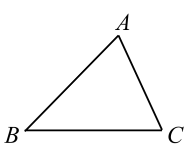


图 3-1-1①

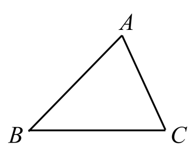


图 3-1-1②

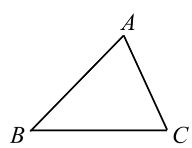


图 3-1-1③

交流: 三角形中线等分三角形面积!

(2)请你用三种不同的方法把图 3-1-2①~图 3-1-2③中梯形$ABCD$的面积二等分.

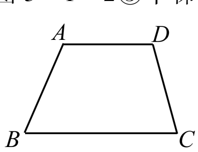


图 3-1-2①

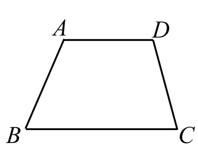


图 3-1-2②

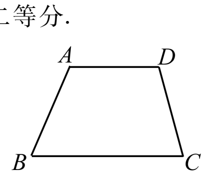


图 3-1-2③

交流: 先把多边形转化为三角形,再利用中线.

方法评述: 遇等分多边形面积,先把多边形转化为三角形,再利用中线等分面积.

例 3-1-2　(1)如图 3-1-2①,过点A画一条平分$\triangle ABC$面积的直线.

(2)如图 3-1-2②,已知$l_1 /\!/ l_2$,点E,F在l_1上,点G,H在l_2上,试说明$\triangle EGO$与$\triangle FHO$面积相等的理由.

(3)如图 3-1-2③,点M在$\triangle ABC$的边上,过点M画一条平分三角形面积的直线,写出画法.

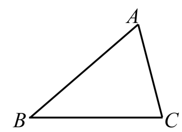


图 3-1-2①

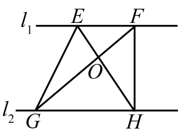


图 3-1-2②

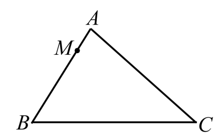


图 3-1-2③

提示: (3)需要把(1)(2)结合起来用.

启示与规律: 按要求等分图形面积前,先找出一种分割法,再在此基础上利用"平行线下的同底等高面积相等"进行等积转化.

体验与感悟 3-1

1. 如图 3-1-3,已知$\triangle ABC$的面积为a. 延长$\triangle ABC$的BC边到点D、延长CA边到点E、延长AB到点F,使$CD=BC$、$AE=CA$、$BF=AB$,连结DE、DF、FE,得到$\triangle DEF$,此时,我们称$\triangle ABC$向外扩展了一次. 可以发现,扩展一次后得到的$\triangle DEF$的面积是原来$\triangle ABC$面积的______倍. 扩展n次后得到的$\triangle DEF$的面积是原来$\triangle ABC$面积的________倍.

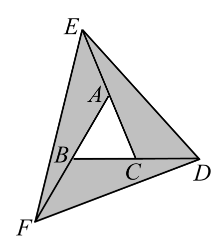


图 3-1-3

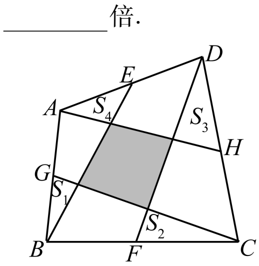


图 3-1-4

2. 如图 3-1-4,E、G、F、H分别为任意四边形$ABCD$的AD、AB、BC、CD边中点,并且图中阴影部分面积为 20,则$S_1+S_2+S_3+S_4=$________.

3. 定义:"把一个平面图形的面积分成相等的两部分的直线叫做这个图形的一条面积等分线."

(1)三角形的中线、高线、角平分线分别所在的直线一定是三角形的面积等分线的是________.

(2)平行四边形的一条面积等分线是________.

(3)请你尝试用不少于三种方法画出下列图形面积等分线.