图书在版编目(CIP)数据

初中数学错例分析与解题技巧. 八年级/陆进军主编. 南京:南京出版社

配新课标教材

ISBN 7-80718-096-X

Ⅰ. 初… Ⅱ. 陆… Ⅲ. 数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 056070 号

主　编:陆进军

编写者:汤世春　薛万生　丁　强

王祥胜　卢洪波　邰家鸿

王　波　丁代龙　陆进军

书　　名:初中数学错例分析与解题技巧(八年级)

作　　者:陆进军等

出版发行:南京出版社

社址:南京市成贤街 43 号 3 号楼　邮编:210018

网址:http://www.njcbs.com/www.njcbs.net

联系电话:025-83283871(营销)　025-83283883(编务)

电子信箱:webmaster@njcbs.com

责任编辑:范　忆

封面设计:谭一钵

印　　刷:江苏省科学技术情报研究所印刷厂

开　　本:880×1230　1/32

印　　张:9.75

字　　数:242 千字

版　　次:2006 年 2 月第 1 版

印　　次:2006 年 2 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 7-80718-096-X/G·57

总 定 价:18.00 元(下册 9.00 元)

南京版图书若有印装质量问题可向本社调换

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目录

1 第七章 一元一次不等式

19 第八章 分式

48 第九章 反比例函数

75 第十章 图形的相似

109 第十一章 图形与证明(一)

138 第十二章 认识概率

第七章　一元一次不等式



知识概要

1. 不等式的定义：用不等号“>”、“<”、“≥”、“≤”表示不等关系的式子，叫做不等式.

2. 不等式的解：能使不等式成立的未知数的值.

3. 不等式的解集：一个不等式的所有解，组成该不等式解的集合.

4. 解不等式：求不等式的解集的过程.

5. 不等式的性质：① 不等式的两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式，不等号的方向不变；② 不等式两边都乘以(或除以)同一个正数，不等号的方向不变；③ 不等式两边都乘以(或除以)同一个负数，不等号的方向改变. 以上性质可用不等式表示为：(1) 如果 $a>b$，那么 $a\pm c>b\pm c$；(2) 如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$；(3) 如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$.

6. 一元一次不等式组的定义：把含有相同未知数的两个或两个以上一元一次不等式合在一起，得到一个一元一次不等式组.

7. 不等式组的解集：几个不等式的解集的公共部分组成不等式组的解集.



错例剖析

例 1　用不等式表示：x 的 2 倍与 10 的差不小于 6.

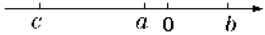
●**错解**：$2x-10>6$.



剖析:本题错解是对题意的理解错误,对“不小于”的涵义理解不清,“不小于”并不仅仅是“大于”,它还包含“等于”.

●**矫正**:$2x-10\geqslant 6$.

例 2 有理数 a、b、c 在数轴上的对应点位置如图所示,试化简代数式:$|a-b|+|b+c|+|c-a|$.



●**错解**: $|a-b|+|b+c|+|c-a|$

$=a-b+b+c+c-a$

$=2c$.

剖析:本题错解是概念错误. 错误的原因是对绝对值的意义理解不透,即“一个正数的绝对值等于它本身,一个负数的绝对值等于它的相反数,0 的绝对值等于 0”. 从数轴上可以看出:$c<a<0<b$,且 $|b|<|c|$,$b+c<0$,$c-a<0$,$a-b<0$.

●**矫正**: $|a-b|+|b+c|+|c-a|$

$=b-a-(b+c)+a-c$

$=-2c$.

例 3 若 $x-y<0$,则下列各式中一定正确的是(　　).

A. $x>y$　　B. $xy>0$

C. $\dfrac{x}{y}<1$　　D. $-\dfrac{x}{2}>-\dfrac{y}{2}$

●**错解一**:因为 $x-y<0$,所以 $x<y$,所以 $xy>0$,故选 B.

●**错解二**:因为 $x-y<0$,所以 $x<y$,所以 $\dfrac{x}{y}<1$,故选 C.

剖析：本题错解是理解错误. 错解一的错误在于由 $x<y$ 得出 x、y 同正或同负，这显然是不对的；错解二的错误是由 $x-y<0$ 得 $x<y$，两边同除以 y 得 $\frac{x}{y}<1$，这里没考虑 y 的符号，即对“不等式的基本性质 3”理解不到位. 当 y 是负数时，不等式两边同除以 y，则不等号的方向要发生改变，且此解法中也未考虑 $y=0$ 的情况.

●**矫正**：因为 $x-y<0$，

所以 $x<y$，

所以 $-\frac{x}{2}>-\frac{y}{2}$.

故选 D.

例 4　试比较 a^2 与 a 的大小.

●**错解**：当 $a>0$ 时，$a^2>a$，

当 $a=0$ 时，$a^2=a$，

当 $a<0$ 时，$a^2>a$.

剖析：本题错解是考虑问题不全面. 考虑到了 a 的正负性，进行了分类讨论，但对 $a>0$ 时的分类不完全. 当 $a>1$ 时，根据“不等式基本性质 2”，两边同乘以 a，即得 $a^2>a$；当 $0<a<1$ 时，$a^2<a$；当 $a=1$ 时，$a^2=a$.

●**矫正**：当 $a>1$ 时，$a^2>a$，

当 $a=1$ 或 0 时，$a^2=a$，

当 $0<a<1$ 时，$a^2<a$，

当 $a<0$ 时，$a^2>a$.

例 5　解关于 x 的不等式：$ax-2>x-3a$.

●**错解**：$ax-2>x-3a$，

需要全本请访问 www.ertongbook.



$ax-x>2-3a$,

$(a-1)x>2-3a$,

所以 $x>\dfrac{2-3a}{a-1}$.

剖析:本题错解是定势思维引起的错误.最后一步"系数化为1"时没有考虑 a 的情况,想当然地将$(a-1)$看成是大于零的.本题中 a 是一个不确定的系数,因而$(a-1)$的值也是不确定的,故在两边同除以$(a-1)$时应考虑其正负性.

●**矫正:**$ax-2>x-3a$,

$ax-x>2-3a$,

$(a-1)x>2-3a$.

(1) **当** $a-1>0$,**即** $a>1$ **时**,$x>\dfrac{2-3a}{a-1}$;

(2) **当** $a-1=0$,**即** $a=1$ **时**,**得** $0\cdot x>-1$,**所以** x **取任何数**;

(3) **当** $a-1<0$,**即** $a<1$ **时**,$x<\dfrac{2-3a}{a-1}$.

例 6 **若关于** x **的不等式** $4x-6m<0$ **的正整数解为** 1、2、3、4,**那么** m **的取值范围是**(　　).

A. $m<\dfrac{10}{3}$　　B. $\dfrac{8}{3}\leqslant m<\dfrac{10}{3}$

C. $\dfrac{8}{3}<m<\dfrac{10}{3}$　　D. $\dfrac{8}{3}<m\leqslant\dfrac{10}{3}$

●**错解一:**$4x-6m<0$,**所以** $x<\dfrac{3}{2}m$,

因为 x **的正整数解为** 1、2、3、4,

所以 $4\leqslant\dfrac{3}{2}m<5$,

即 $\dfrac{8}{3}\leqslant m<\dfrac{10}{3}$.



解之得 $x\leqslant 6$.

答:商店最多降 6 元出售此商品.

剖析:本题错解属于理解错误.本题中"最多"反映的是一个不等量关系,不能直接设为 x,正确的设法是"设商店降 x 元出售此商品".

●矫正:设商店降 x 元出售此商品.(以下步骤略)

例 8 某水产养殖加工厂有 200 名工人,每名工人每天平均可以捕捞水产品 50 千克或将当日所捕捞的水产品 40 千克进行精加工.已知每千克水产品直接出售可获利润 6 元,精加工后再出售,可获利润 18 元.假定每天安排 x 名工人进行精加工.

(1) 求每天进行水产品精加工所获得的利润 y(元)与 x 之间的关系式.

(2) 如果每天精加工的水产品和未来得及加工的水产品全部出售,那么如何安排生产可使一天所获利润最大?最大利润是多少?

●错解:(1) $y=40\cdot x\cdot 18=720x$.

(2) 设一天所获利润为 w 元.

则 $w=720x+50(200-x)\cdot 6$

$=60000+420x$.

由上可得:当 x 取最大值 200 时,w 有最大值为 144000 元.

剖析:本题错解是理解错误.错误有二,一是(2)中的关系式有误,从题中分析进行精加工的水产品来自于捕捞,因此在计算利润时,直接出售的水产品数量应等于实际捕捞的水产品数量减去已进行精加工的数量;二是 x 的取值范围有误,由题意知每天捕捞的水产品数量应不少于每天精加工的数量.

●矫正:(1) $y=40\cdot x\cdot 18=720x$.

(2) 设一天所获利润为 w 元.

则　$w=720x+[50(200-x)-40x]\cdot 6$

$=60000+180x.$

因为 $50(200-x)\geqslant 40x$，

所以 $x\leqslant\frac{1000}{9}$，

因为 x 取正整数，

所以 x 最大取 111，

当 x 取 111 时，w 有最大值为 79980.

答：每天安排 111 人进行水产品精加工，可使一天所获利润最大为 79980 元.



技法点拨

例 1　已知关于 x 的方程：$\frac{x-4}{6}=\frac{kx-1}{3}+\frac{1}{3}$，当 k 取何值时：

(1) 方程有解？　(2) 方程的解是正整数？

●分析：本题中的两个问题，尚不能直接预见到应用何种方法讨论求解，但从题中看出它们都涉及到方程的解，因此可以从求方程的解入手，去分母并整理得 $(1-2k)x=4$. 这是关于 x 的一元一次方程，联系到解字母系数方程的方法，可对系数加以讨论.

●解答：$\frac{x-4}{6}=\frac{kx-1}{3}+\frac{1}{3}$，

两边同乘以 6 并整理得　$(1-2k)x=4$.

(1) 当 $1-2k\neq 0$　即 $k\neq\frac{1}{2}$ 时，方程的解为 $x=\frac{4}{1-2k}$；

(2) 由(1)得 $x=\frac{4}{1-2k}$，要使 $\frac{4}{1-2k}$ 为正整数，则 $1-2k$ 必是 4 的正因数，即 $1-2k$ 等于 1、2、4，由此可求出 k 为 0，$-\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{2}$.



点评

遇到这类较综合的问题时，要分析题目中的信息，大胆去试，并在过程中发现解决问题的方法.

例 2 周长为 24，各边长为互不相等且都是整数的三角形共有多少个？

●分析：三角形三边长各不相等，可设三边长分别为 a、b、c，且 $a>b>c$. 由三边关系可确定最大边 a 的取值范围，再用列举法求出各边长.

●解答：设三角形三边长分别为 a、b、c，且 $a>b>c$，

由题意可得 $\begin{cases} a+b+c=24 \\ a>b>c \\ b+c>a \end{cases}$

解得 $8<a<12$.

因为 a 取整数，

所以 a 可取 9、10、11，

a	9	10	10	11	11	11	11
b	8	9	8	10	9	8	7
c	7	5	6	3	4	5	6

所以满足条件的三角形有 7 个.

点评

三角形的三边关系是一种基本的不等量关系，它在解决某些有关三角形的三边问题时起着非常重要的作用.

例 3 求使方程组 $\begin{cases} x+y=m+2 \\ 4x+5y=6m+3 \end{cases}$ 的解 x、y 都是正数的 m 的

取值范围.

●分析:本题中未直接给出关于 m 的不等关系,从题目条件来看,在方程组中 m 可看作是常数,进而解出 x、y,建立 m 的不等关系.

●解答:$\begin{cases}x+y=m+2\\4x+5y=6m+3\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-m+7\\y=2m-5\end{cases}$

由题意得 $\begin{cases}-m+7>0\\2m-5>0\end{cases}$

解之得　$\frac{5}{2}<m<7$,

所以 m 的取值范围是 $\frac{5}{2}<m<7$.

点评

在有些问题中,不等关系是隐含的,需要结合题目中的条件分析得到.

例 4　设 x、y 都为正整数,且满足 $\frac{5}{9}<\frac{x}{y}<\frac{4}{7}$,则当 y 最小时,分式 $\frac{x}{y}$ 等于多少?

●分析:$\frac{5}{9}$ 与 $\frac{4}{7}$ 这两个分数非常接近,因而运用列举法很难确定 $\frac{x}{y}$ 的值. 将 $\frac{5}{9}$ 与 $\frac{4}{7}$ 通分,则得 $\frac{35}{63}<\frac{x}{y}<\frac{36}{63}$,此时若整数 y 取 63,则 x 在 35 与 36 之间无整数可取,故可将 $\frac{5}{9}$ 与 $\frac{4}{7}$ 通分的分母变为 126.

●解答:因为 $\frac{5}{9}<\frac{x}{y}<\frac{4}{7}$,

需要全本请访问 www.ertongbook.



所以 $\frac{70}{126}<\frac{x}{y}<\frac{72}{126}$,

因为 x、y 都为正整数,

所以 当 y 取 126 时,x 取 71.

故当 y 最小为 126 时,分式 $\frac{x}{y}$ 等于 $\frac{71}{126}$.



点评

在分数的大小比较中,通常将分母化成同分母,进而比较分子的大小.

例 5 已知 $x\neq1$,比较 $(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+2x 的大小.

●分析:要比较两个代数式的大小,可利用作差法.

●解答: $(x^2+1)^2-(x^4+x^2+2x)$

$=x^4+2x^2+1-x^4-x^2-2x$

$=x^2-2x+1$

$=(x-1)^2$.

因为 $x\neq1$,

所以 $x-1\neq0$,

所以 $(x-1)^2>0$,

所以 $(x^2+1)^2>x^4+x^2+2x$.



点评

比较代数式的大小,通常可采用的方法有作差法和作商法.对代数式 A 和 B,若 $A-B>0$,则 $A>B$,若 $A-B<0$,则 $A<B$,若 $A-B=0$,则 $A=B$;当 $A>0$,$B>0$ 时,若 $\frac{A}{B}>1$,则 $A>B$,若 $\frac{A}{B}<1$,则 $A<B$,若 $\frac{A}{B}=1$,则 $A=B$.

例 6　如图 7－1，O 为△ABC 内的任意一点. 试判断 $OB+OC$ 与 $AB+AC$ 的大小关系.

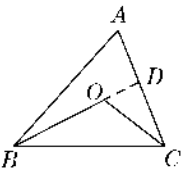


图 7－1

●分析：本题涉及的是三角形中三边关系，但从图中可发现 $OB+OC$ 与 $AB+AC$ 并无直接联系，故需添加适当的辅助线，使它们之间建立联系.

●解答：延长 BO 交 AC 于点 D.

在△ABD 中，$AB+AD>OB+OD$，　(1)

在△ODC 中，$OD+CD>OC$，　(2)

由(1)、(2)得 $AB+AD+OD+CD>OB+OD+OC$，

即　$AB+AC>OB+OC$.

点评

本题的结论与生活常识是吻合的，即从 B 点到 C 点，圈子兜得越大，路走得越长.

例 7　容器中装有水温为 20℃的水 5 升，现将 10 升水加进去混合，使混合后的水温保持在 25℃到 35℃之间，问：加进去 10 升水的温度应该怎样？

●分析：可设加进去的水的温度为 x℃，根据前后水的热量关系建立不等式组.

●解答：设加进去 10 升水的温度为 x℃，

由题意得 $(5+10)\times25\leqslant5\times20+10x\leqslant(5+10)\times35$，

解之得 $27.5\leqslant x\leqslant42.5$.

所以，加进去 10 升水的温度应在 27.5℃到 42.5℃之间.



点评

> 根据题意列不等式或不等式组一定要抓住题目的关键字眼，如“至多为……”、“在……到……之间”等，将它表示成不等关系，从而列出不等式或不等式组.

例 8　下面是一个除法算式，你知道除数是多少吗？

$$
\begin{array}{r}
\ast\ \ 8 \\
\ast\ \ast\overline{)\ \ast\ \ast\ \ast\ \ast} \\
\underline{\ast\ \ast\ \ast\ \ \ } \\
\ast\ \ast \\
\underline{\ast\ \ast} \\
0
\end{array}
$$

●分析：根据除法竖式可以知道：8 与除数的积是两位数；商的十位数字与除数的积是三位数，因此商的十位数字是 9.

●解答：设除数是 x.

由题意得 $\begin{cases} 8x<100 \\ 9x>100 \end{cases}$

解之得　$\dfrac{100}{9}<x<\dfrac{25}{2}$，

因为 x 是整数，

所以 $x=12$.

点评

> 利用不等式（组）估算是一种非常奇妙的方法，在数学学习中要注意灵活运用.

例 9　某公司计划一年度生产一种新型计算机，下面是各部门提供的数值信息.

人事部：明年生产工人不多于 80 人，每人每年按 2400 工时计算.

市场部：预测明年销售量至少为 10000 台.

技术部：生产一台计算机，平均要用 12 个工时，每台机器需要安装 5 个主要部件.

供应部：今年年终将库存主要部件 2000 个，明年还能采购到此种部件 80000 个.

根据上述信息，试判断：明年该公司的生产量可能是多少？

●分析：设明年该公司的生产量为 x 台计算机，题中四部门提供的信息实际上是一些限制条件，转化成数学问题就是不等量关系.

●解答：设明年该公司的生产量为 x 台计算机.

由题意得 $\begin{cases} 12x \leqslant 80 \times 2400 \\ 5x \leqslant 2000 + 80000 \\ x \geqslant 10000 \end{cases}$

解得 $10000 \leqslant x \leqslant 16000$.

所以，明年该公司的生产量应安排在 10000 台至 16000 台之间.

点评

本题中除“不多于”、“至少”等反映不等关系的词外，还应注意一些隐含条件，如技术部规定的工时数、总的主要部件数等都是一些限制条件.

例 10　明明、强强、壮壮和贝贝四个好朋友为了试一试谁的力气最大，他们进行了拔河比赛，强强一人拉明明和壮壮两人，虽然相当吃力，但最终总算赢了他们两人. 如果明明与强强为一方，壮壮和贝贝为另一方进行比赛，此时则出现了平局. 假如明明和壮壮对换一下，明明和贝贝就能轻易地战胜对方.

现在请问，在这 4 个朋友中，谁的力气最大？谁第二？谁是第



三？谁的力气最小？请你将得出的结论利用不等式进行简单说明.

●分析：设明明、强强、壮壮、贝贝四人的力气分别为 a、b、c、d，则根据题意可列出等量和不等量关系，再根据不等式的性质可以进行判断.

●解答：设明明、强强、壮壮、贝贝四人的力气分别为 a、b、c、d.

则由题意得 $\begin{cases} b>a+c & ① \\ a+b=c+d & ② \\ a+d>c+b & ③ \end{cases}$

由①③得 $a+d>a+c$，

所以 $d>c$.

由②③得 $a+b+a+d>c+d+c+b$，

所以 $a>c$.

由①得 $b>a$，

由②③得 $a+d+c+d>c+b+a+b$，

所以 $d>b$.

综上可得 $d>b>a>c$.

即贝贝的力气最大，强强第二，明明第三，壮壮第四.



点评

在生活中要注意将一些实际问题转化成数学问题，本题就是将四人的力气大小转化成不等式问题，利用不等式的基本性质进行求解，可谓妙趣横生.



强化训练

一、填空题

1. 当 m _____ 时，不等式 $mx>4m$ 的解集是 $x<4$.

2. 当 x _____ 时，代数式 $\frac{1}{1+x^2}$ 的值小于 1.

3. 适合不等式 $-3\leqslant x\leqslant 5$ 且适合不等式 $-4\leqslant x\leqslant 4$ 的 x 的所有整数有_____.

4. 已知方程组 $\begin{cases}2x-y=10\\3x+y=5m\end{cases}$ 的解 x，y 都不大于 3，则 m 的取值范围是_____.

二、选择题

1. 已知实数 a、b、c，且 $a>b>c$，则下列各式中正确的是(　　).

A. $ab>bc$　　B. $a+b>b+c$

C. $a-b>b-c$　　D. $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

2. 某次数学测验，共有 16 道数学题，评分办法是：答对一题给 6 分，答错一题扣 2 分，不答则不扣分，某同学有一道题未答，那么这个同学至少答对(　　)题，成绩才能在 60 分以上.

A. 11　　B. 12　　C. 13　　D. 14

3. 若关于 x 的方程 $3(x+4)=2a+5$ 的解大于关于 x 的方程 $\frac{(4a+1)x}{4}=\frac{a(3x-4)}{3}$ 的解，则(　　).

A. $a>2$　　B. $a<2$　　C. $a<\frac{7}{18}$　　D. $a>\frac{7}{18}$

4. 某人用 100 元人民币购进一批货物，第二天售出，获利 10%，过几天后用第一次的本利又以上次售出的价格的 90%购进一批同样的货物，由于卖不出去，两天后他将其按第二次进价的九折再出售，这样他在两次交易中(　　).

A. 刚好盈亏平衡　　B. 赢利 11 元

C. 赢利 9 元　　D. 亏本 1.1 元

三、解答题

1. 已知 $3x+y=2$，$-3\leqslant x\leqslant -2$，你能求出 y 的取值范围吗？

需要全本请访问 www.ertongbook.