恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级学练考

（学生用书）

全国名牌重点中学特高级教师编写
丛书主编 方 可

高二数学（下）

www.hengqian.com

北京出版社出版集团 北京教育出版社

主编寄语

授人以鱼，还是授人以渔

以网络为载体的e时代，向中学教育提出了许多问题：1.什么样的教育理念最好？2.怎样及时应对教材多样化、考卷多元化的局面？3.老师怎样教，学生怎样学，才最有效果？……我们策划《超级学练考》的初衷，就是为了解决师生目前遇到的以上困惑——让广大学生在较短的时间内学得多，记得牢，练得精。

《超级学练考》丛书作为同步类新型教辅，主要为进课堂编写（也可作为学生自读类用书），其突出特点在于：

一、渗透先进的教育理念，体现教师的主导作用和学生的主体地位，立足以学生发展为中心，注重学生学习方式及思维能力的培养。

二、“学”、“练”、“考”有机结合、环环相扣：“学”以节（课）为单位，归纳、细梳所要学习的核心内容；“练”按梯度分组设题，逐级提升学生的解题能力；“考”设置多种类型试卷，全方位挖掘和诠释考点，目的在于让学生“考”后而知不足。

三、“疑难点解析”、“典例归类”、“学习笔记”等栏目设计新颖、科学、实用，有如名师从旁指导，求知更加轻松。

四、题解分离，便于思考；详解单订，便于验证。

五、书网互动，增值无限。师生在使用本丛书时，可锁定**www.hengqian.com**进行信息查询、资源下载、在线辅导等，作为本书读者免费享受这些增值服务。

相信这样的一套好书，定会给您的艰辛求学带来意想不到的实惠和无穷的轻松；实现我们既授人以鱼，更授人以渔的愿景！

丛书主编　方 可

恒捷教育 www.hengjiean.com

北京教育出版社恒捷教育研究院研究成果

超级学练考

（学生用书）

丛书主编　方　可
本册主编　吴铁军
撰 稿 人　吴铁军　张光艳　李成龙
　　　　　夏常春

高二数学（下）

北京出版社出版集团
北京教育出版社

恒谦教育 www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级学练考

超级学练考．高二数学．方可主编；
—3版．—北京：北京教育出版社， 2006
ISBN 7-5303-2865-4

I.超… II.方… III.数学课—高中—教学参考资料
IV.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第057714号

超级学练考
高二数学(下)
(学生用书)
丛书主编 方 可

北京出版社出版集团
北京教育出版社 出版
(北京北三环中路6号)
邮政编码：100011
网 址：www. bph. com. cn
北京出版社出版集团总发行
新华书店经销
西安旗舰印务有限公司印刷

880×1230 16开本 10.25印张 321 000字
2006年10月第3版 2006年10月第2次印刷

ISBN 7-5303-2865-4
G·2798 定价:14.00元

目录

Contents

第9章 直线、平面、简单几何体

9.1 平 面

学 总结、模仿、创新，这是内化知识、创新运用的基础.

预习探路

1. 表示平面的图形只能用平行四边形，对吗？

提示 不对.还可以是三角形、圆等.

2. 图 9-1-1 表示直线 a 在平面 α 内，对吗？

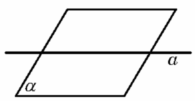


图 9-1-1

提示 不对.画直线 a 时不应超出平面 α 的边缘.

3. 两个平面相交有无数个公共点，但这些公共点不一定共线，是吗？

提示 不是.这些公共点应共线，理由为公理 2 所述.

4. "三点确定一个平面"这句话对吗？

提示 不对.三点必须不共线.

疑难点解析

1. 平面的概念.

(1)平面和点、直线一样是构成空间图形的基本要素之一，是一个只描述而不定义的原始概念.

(2)平面概念是较抽象概念，可借助于直线的概念来理解和掌握.对平面概念，抓住平面的基本特征：无限延展性，无厚度性来掌握学习.

2. 平面的三个基本性质.

(1)公理 1 反映了平面与曲面的区别，通过直线的"直"和"无限延伸"的特性，揭示了平面的"平"和"无限延伸"的特性，它是判断直线在平面内的依据，符号表示为：若 $A\in\alpha$ 且 $B\in\alpha$，则直线 $AB\subset\alpha$.

(2)公理 2 说明了若两个平面相交，必交于一条直线，这是由平面的无限延展性决定的，它是确定两个平面交线的依据，即先找两个平面的两个公共点，再作连线.公理 2 也是判定两个平面相交的依据，符号表示为：$A\in\alpha$ 且 $A\in\beta$，则 $\alpha\cap\beta=a$ 且 $A\in a$，从而可得 $A\in\alpha$、$A\in\beta$ 且 $\alpha\cap\beta=a$，则 $A\in a$，从而可证"点共线""线共点".

(3)公理 3 及其三个推论是确定平面及判断两个平面重合的依据，是证点、线共面的依据，也是作截面、辅助平面的依据.作辅助平面和平面几何中作辅助直线的作用是一样的，可以为解题开拓思路.

平面的基本性质是立体几何的基础内容，正确理解并熟练掌握平面的基本性质是学好立体几何的第一步，这三条基本性质是研究空间图形的理论依据.

3. 在立体几何中，常把点看作元素，直线和平面看作点集，符号"$\in$""$\cap$""$\subset$"等表示点、直线、平面间的关系，与代数中意义相同，但在立体几何中，读的方法与代数中有所不同，如："$A\in a$"用数学语言表述为"点 A 在直线 a 上"；"$A\notin a$"用数学语言表述为"点 A 在直线 a 外"；"$a\subset\alpha$"用数学语言表述为"直线 a 在平面 α 内"；"$a\cap b=A$"用数学语言表述为"直线 a 和 b 相交于点 A".要熟练掌握符号语言、文字语言、图形语言的等价转化.

(1)文字语言比较自然、生动，它能将问题所研究的对象的含义更加明确地叙述出来，我们教科书上的概念、定理等多以文字语言叙述.

(2)图形语言，易引起清晰的视觉形象，它能直观地表达概念、定理的本质以及相互关系，在抽象的数学思维面前起着具体化和加深理解的作用.

(3)各种数学语言形态间的互译可为我们在更广阔的思维领域里寻找解决问题的途径.有利于培养我们思维的广阔性.

典例归类

一、关于点线共面问题

例 1 已知 a、b、c、d 是两两相交且不共点的四条直线.

求证：直线 a、b、c、d 共面.

分析 首先对两两相交且不共点的四条直线按位置进行分类，然后先由部分条件确定平面，再由公理 1 证明其他直线也在这一平面内.

证明 (1)无三线共点情况，如图9-1-2(1)所示.

设 $a\cap d=M,b\cap d=N,c\cap d=P,a\cap b=Q$，

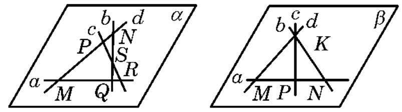
$a\cap c=R,b\cap c=S$.

$\because a\cap d=M$，$\therefore a$、d 可确定一个平面 α.

$\because N\in d,Q\in a$，$\therefore N\in\alpha,Q\in\alpha$.

$\therefore NQ\subset\alpha$，即 $b\subset\alpha$.

同理 $c\subset\alpha$，$\therefore a,b,c,d$ 共面.



(1) (2)

图 9-1-2

(2)有三线共点的情况,如图 9-1-2(2)所示.

设 b、d、c 三线相交于点 K.

与 a 分别交于 N、P、M,且 $K\notin a$.

$\because K\notin a$,$\therefore K$ 和 a 确定一个平面,设为 β.

$\because N\in a$,$a\subset\beta$,$\therefore N\in\beta$.$\therefore NK\subset\beta$,即 $b\subset\beta$.

同理 $c\subset\beta$,$b\subset\beta$.$\therefore a,b,c,d$ 共面.

由(1)(2)知 a,b,c,d 共面.

点拨 证明点、线共面的基本思路是先由部分元素确定一个平面,再证其他元素也在这一平面内(即归一法);有时也用其中一部分元素确定的平面与另一部分元素确定的平面重合(即重合法).

备选例题 求证:$\triangle ABC$ 的三条边在同一个平面内.

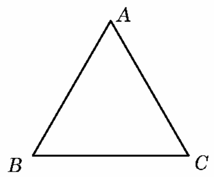


图 9-1-3

分析 依据公理 1、3.

证明 如图 9-1-3 所示

$\because A$、B、C 三点是三角形的三个顶点,

$\therefore A$、B、C 三点不在同一条直线上.

$\because$ 点 A 在平面 ABC 内,点 B 在平面 ABC 内,

$\therefore$ 线段 AB 在平面 ABC 内.

同理,线段 BC、CA 也都在平面 ABC 内,

$\therefore\triangle ABC$ 的三条边都在同一个平面内.

点拨 点、线段(或直线)都在一个平面内,称它们共面.证明点、线段(或直线)共面的方法,常先确定一个平面,然后证明它们都在这个平面内.

二、关于线共点问题

例 2 如图 9-1-4 所示,在空间四边形 $ABCD$ 中,P、Q、R、S 分别是 AB、AD、BC、CD 上的点,且 $PR\parallel QS$,$PR\neq QS$.求证:BD、PQ、RS 三线共点 M.

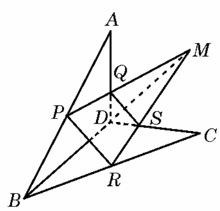


图 9-1-4

分析 要证 PQ、RS、BD 三线共点,只需证两线相交,再证交点在第三条直线上.

证明 $\because PR\parallel QS$ 且 $PR\neq QS$

$\therefore PR$、QS 共面,设 $PQ\cap RS=M$

又 $\left.\begin{aligned}&\because P\in AB\subset\text{平面 }ABD\\&Q\in AD\subset\text{平面 }ABD\\&P、Q\in PQ\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&PQ\subset\text{平面 }ABD\\&\text{同理 }RS\subset\text{平面 }BCD\\&PQ\cap RS=M\end{aligned}\right\}\Rightarrow$

$M\in$(平面 $ABD\cap$ 平面 BCD),即 $M\in BD$.

故 PQ、RS、BD 三线共点.

点拨 本例是证线共点的一般方法,先证两线交于一点再证第三线也过该点.先选哪两条直线交于一点应该没有什么要求,请同学们试着从 PQ 与 BD 交于一点重新证明.

备选例题 三个平面 α、β、γ 两两相交于三条直线,即 $\alpha\cap\beta=c$,$\beta\cap\gamma=a$,$\gamma\cap\alpha=b$,且直线 a 和 b 不平行.

求证:a、b、c 三条直线必过同一点.

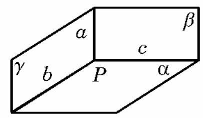


图 9-1-5

分析 转化为点在直线上的问题.

证明 $\because\alpha\cap\gamma=b$,$\beta\cap\gamma=a$,

$\therefore a\subset\gamma$,$b\subset\gamma$.

由于直线 a 和 b 不平行,$\therefore a$、b 必相交.

设 $a\cap b=P$,则 $P\in a$,$P\in b$.

又$\because a\subset\beta$,$b\subset\alpha$,$\therefore P\in\beta$,$P\in\alpha$.

又 $\alpha\cap\beta=c$,$\therefore P\in c$,即交线 c 经过点 P.

$\therefore a$、b、c 三条线相交于同一点.

三、关于点在线上问题

例 3 如图 9-1-6 所示,在正方体 $ABCD$—$A_1B_1C_1D_1$ 中,$A_1C\cap$ 平面 $BC_1D=M$,O 为 BD 中点.

求证:$M\in C_1O$.

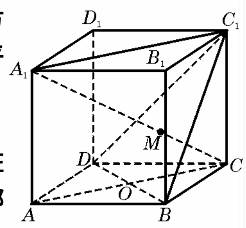


图 9-1-6

分析 欲证明 $M\in C_1O$,只需证明以 C_1O 为交线的某两个平面中都含有点 M.显然 BDC_1 是其中的一个平面,由于另一个平面中必须含有 C_1O,所以只需寻找含有 C_1O 和点 M 的平面.

证明 在正方形 $ABCD$ 中,O 是 BD 中点,

$\therefore O\in AC$.

$\therefore O\in$ 平面 A_1C_1CA. 又 $C_1\in$ 平面 A_1C_1CA,

$\therefore C_1O\subset$ 平面 A_1C_1CA,

$\therefore C_1O=$ 平面 $DC_1B\cap$ 平面 A_1C_1CA.

已知 $A_1C\cap$ 平面 $C_1BD=M\Rightarrow\left.\begin{cases}M\in A_1C\\M\in\text{平面 }C_1BD\\A_1C\subset\text{平面 }A_1C_1CA\end{cases}\right\}\Rightarrow$

$M\in$(平面 $A_1C_1CA\cap$ 平面 C_1BD),

$\therefore M\in C_1O$.

点拨 欲证明点在直线上,只需证明以这条直线为交线的两个平面中都含有该点.

备选例题 如图 9-1-7 所示,平面 $ABD\cap$ 平面 $CBD=BD$,E、F、G、H 分别在 AB、BC、CD、DA 上.

求证:EH 与 FG 的交点 P 在 BD 的延长线上.

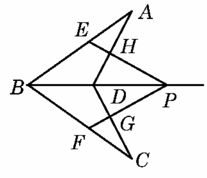


图 9-1-7

分析 BD 是两个平面的交线,只需证明点 P 是两个平面的公共点即可.

证明 $\because EH$ 与 FG 的交点是 P,

$\therefore P\in EH$，且 $P\in FG$.

而 $E\in AB, H\in AD$，$\therefore EH\subset$ 平面 ABD.

$\therefore P\in$ 平面 ABD.

而 $F\in BC, G\in CD$，$\therefore FG\subset$ 平面 CBD.

$\therefore P\in$ 平面 CBD.

$\therefore$ 点 P 是平面 ABD 与平面 CBD 的公共点.

而平面 $ABD\cap$ 平面 $CBD=BD$，

$\therefore EH$ 与 FG 的交点 P 在 BD 的延长线上.

点拨 证明点在直线上的问题，只需证明点是两个平面的公共点，线是两个平面的公共交线，根据公理 2 可知公共点一定在公共交线上.

四、关于多点共线问题

例 4 如图 9－1－8 所示，在四面体 $ABCD$ 中，P、Q、R 分别是 AB、AD、AC 上的点，且 $PR\cap BC=M$，$QR\cap DC=N$，$PQ\cap BD=S$. 求证：M、N、S 三点共线.

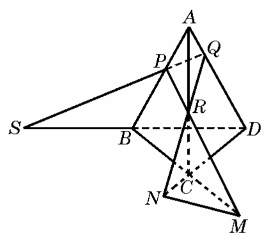


图 9－1－8

分析 只需证明其中某一点在另外两点的连线上.

证明 $\because M=PR\cap BC$，

$$\therefore \left.\begin{array}{l} M\in PR\subset \text{平面 } PQR \\ M\in BC\subset \text{平面 } BCD \end{array}\right\}\Rightarrow M\in(\text{平面 } PQR\cap \text{平面 } BCD)$$

$$N=QR\cap DC\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} N\in QR\subset \text{平面 } PQR \\ N\in DC\subset \text{平面 } BCD \end{array}\right\}\Rightarrow N\in(\text{平面 } PQR\cap \text{平面 } BCD)$$

$\Rightarrow MN=$ 平面 $PQR\cap$ 平面 BCD.

$$\because S=PQ\cap BD\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} S\in PQ\subset \text{平面 } PQR \\ S\in BD\subset \text{平面 } BDC \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$S\in$（平面 $PQR\cap$ 平面 BDC）.

$\therefore S\in MN$，即 M、N、S 三点共线.

点拨 证明空间三点共线问题通常证明这些点都在两个平面的交线上，即先确定出某两个点在某两个平面的交线上，再证明第三个点在第一个平面内，又在第二个平面内，则该点就必在这两个平面的交线上.

备选例题 如图 9－1－9 所示，四边形 $ABB'A'$，$BCC'B'$，$CAA'C'$ 都是梯形.

求证：三直线 AA'，BB'，CC' 相交于一点.

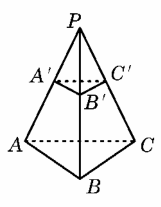


图 9－1－9

分析 先证其中两条直线共面且交于一点，再证这点也在第三条直线上.

证明 梯形 $ABB'A'$ 中，$A'B'\parallel AB$，所以 AA'、BB' 在同一平面 $A'B$ 内. 设直线 AA'，BB' 相交于点 P，同理 BB'、CC' 同在平面 BC' 内，CC'、AA' 同在平面 $A'C$ 内.

$\because P\in AA'$，$AA'\subset$ 平面 $A'C$，$\therefore P\in$ 平面 $A'C$.

同理 $P\in$ 平面 BC'.

根据公理 2，点 P 在平面 $A'C$ 与平面 BC' 的交线上，而平面 $A'C\cap$ 平面 $BC'=CC'$，故 $P\in$ 直线 CC'，即三直线 AA'、BB'、CC' 相交于一点.

点拨 证明多条线共点，常常是先考虑其中两条直线的一个交点，然后证明其他直线过该点.

学习笔记

1. 点线共面的证明.

所谓点线共面问题就是指结论是几个点或几条直线在同一平面内的问题.

(1) 证明一个图形是平面图形的主要依据：①如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内（公理 1）. ②经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面（公理 3），及其推论.

(2) 证明一个图形是平面图形的常用的方法：①先确定一个平面，再证明有关点、线在此平面内. 这种方法俗称“落入法”. ②过有关的点、线分别作多个平面，再证明这些平面重合. 这种方法称为“重合法”. ③反证法.

(3) 具体操作方法：

①证明几点共面的问题可先取三点（不共线的三点），确定一个平面再证明其他各点都在这个平面内. ②证明空间几条直线共面问题可先取两条（相交或平行）直线确定在一个平面，再证明其余直线均在这个平面内.

2. 点共线、线共点的证明.

(1) 点共线：所谓点共线问题就是证明三个点或三个以上的点在同一条直线上；线共点：所谓线共点问题就是证明三条或三条以上的直线交于一点.

(2) 证明点共线、线共点的依据是公理 2：如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线，也就是说一个点若是两个平面的公共点，则这个点在这两个平面的交线上. 对于这个公理应进一步理解下面三点：①如果两个相交平面有两个公共点，那么过这两点的直线就是它们的交线；②如果两个相交平面有三个公共点，那么这三点共线；③如果两个平面相交，那么一个平面内的直线和另一个平面的交点必在这两个平面的交线上.

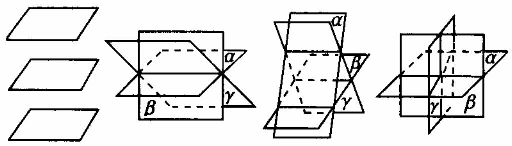
(3) 证明多点共线，通常是过其中两点作一直线，然后证明其他的点在这条直线上，或者根据已知条件设法证明这些点在两个相交平面内，然后根据公理 2 就得到这些点在两个平面的交线上. 证明三线共点问题可把其中一条作为分别过其余两条的两个平面的交线，然后再证另两条直线的交点在此直线上. 此外还可先将其中一条直线看作某两个平面的交线. 证明该交线与另外两条直线分别交于两点，再证这两点重合，从而得三线共点.

3. 平面个数的确定及平面把空间分成若干部分.

公理 3 及三个推论是用来确定平面的，对于确定平面的个数问题，这四种方法可以交互使用. 如：四条线段首尾相接，它们最多可以确定多少个平面？

由推论 2 知，两条相交直线确定一个平面，四条线段首尾相接，最多可产生四对相交线段，因此，最多可确定 4 个平面.

由于平面是无限延伸的，因此一个平面可以把空间分成两个部分，两个平面可以把空间分成 4 个部分（两个平面相交），也可以分成 3 个部分（平行），三个平面可以把空间分成 4 个部分，也可以分成 6、7、8 个部分.（如图 9－1－10）



① ② ③ ④

图 9－1－10

练

拍胸横流，方显英雄本色.

A 课堂巩固

1. 下列说法中正确的是 （　　）

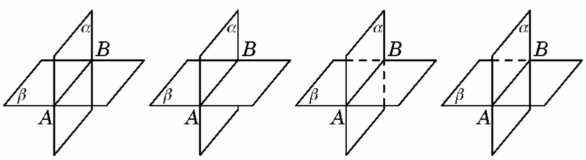
A. 空间不共面的四点中，任何三点均不共线

B. 若 $A\in a$，$a\not\subset\alpha$，那么 $A\notin\alpha$

C. 四条两两相交的直线必共面

D. 三条两两平行的直线必共面

2. 图 9－1－11 中四个图都表示两个平面相交，其中画法正确的是 （　　）



A B C D

图 9－1－11

3. A、B、C、D 四点中没有任何三点在同一直线上，这四点可确定平面的个数是 （　　）

A. 1　　B. 3　　C. 1 或 4　　D. 4

4. 如果直线 $a\subset\alpha$，直线 $b\subset\alpha$，$M\in a$，$N\in b$ 且 $M\in l$，$N\in l$，则 （　　）

A. $l\subset\alpha$　　B. $l\not\subset\alpha$　　C. $l\cap\alpha=M$　　D. $l\cap\alpha=N$

5. 已知直线 $a\parallel b$，且 $l\cap a=A$，$l\cap b=B$. 求证：a、b、l 三线共面.

B 课后拓展

1. 点 A 在直线 l 上，l 在平面 α 外. 下列用符号表示正确的是 （　　）

A. $A\in l$，$l\notin\alpha$

B. $A\in l$，$l\not\subset\alpha$

C. $A\subset l$，$l\not\subset\alpha$

D. $A\in l$，$l\in\alpha$

2. 下列命题中，真命题是 （　　）

A. 空间不同三点确定一个平面

B. 空间两两相交的三条直线共面

C. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

D. 和同一条直线都相交的三条平行直线共面

3. 空间四点中无三点共线是四点共面的 （　　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 三条两两平行的直线可确定________个平面.

5. 一条直线和直线外两点可确定________个平面.

一条直线和直线外不共线的三点可确定______个平面.

6. 已知 a、b、c、d 是两两平行的四条直线. 试求由 a、b、c、d 四直线确定平面的个数.

C 考题演练

1. 下列几个说法中，正确的是 （　　）

A. M、N、$P\in$ 平面 α，M、N、$P\in$ 平面 β，则 α 与 β 重合

B. $a\subset\alpha$，$a\subset\beta$，$b\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则 α 与 β 重合

C. $P\in\alpha$，$P\in\beta$，$a\subset\alpha$，$a\subset\beta$，则 α 与 β 重合

D. 若 a、b 平行，$P\in a$，$P\in\alpha$，$P\in\beta$，$b\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则 α 与 β 重合

2. 下列各图（图 9－1－12）是正方体或正四面体，P、Q、R、S 分别是所在棱的中点，这四个点不共面的一个图是 （　　）

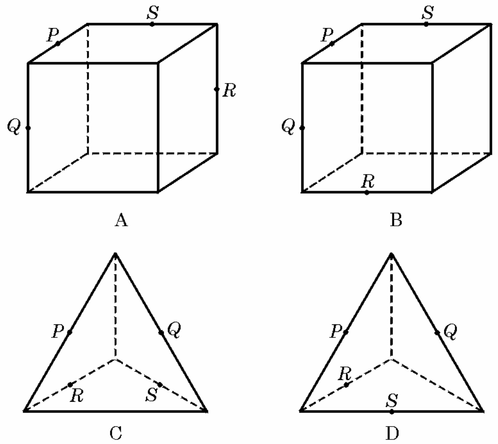


图 9-1-12

3. 三个不重合的平面最少把空间分成 m 个部分,最多分成 n 个部分,则 ( )

A. $m=4,n=6$　　B. $m=4,n=7$

C. $m=6,n=8$　　D. $m=4,n=8$

4. a、b、c 是空间三条直线,其中 a 与 b、c 都相交,则由这三条直线确定的平面的个数为________.

5. 在正方体 AC_1 中,E、F、G、H、M、N 分别是 AA_1、AB、BC、CC_1、C_1D_1、D_1A_1 的中点,则这六点构成__________.

6. 如图 9-1-13 所示,已知 $AB\cap CD=P$,$P\in\alpha$,A、D 与 B、C 分别在 α 的两侧,且 $AC\cap\alpha=Q$,$BD\cap\alpha=R$. 求证:P、Q、R 三点在一条直线上.

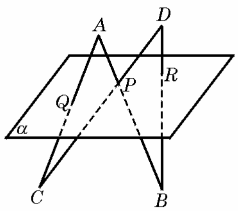


图 9-1-13

7. 如图 9-1-14 所示,$\alpha\cap\beta=a$,直线 $m\subset\alpha$,$n\subset\beta$,且 $a\cap m=M$,$a\cap n=N$. M、N 不重合,问 m 与 n 能否平行?证明你的结论.

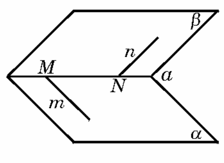


图 9-1-14

9.2 空间直线

学 总结、模仿、创新,这是内化知识、创新运用的基础。

预习探路

1. 平行公理是怎样说的?

提示　平行于同一直线的两条直线互相平行.

2. 异面直线所成角的求法及取值范围.

提示　通过平移转化为平面角. 取值范围为$(0°,90°]$.

3. 异面直线的公垂线的两个主要特征是什么?

提示　(1)垂直;(2)相交且两条异面直线的公垂线是惟一的.

4. 和两条异面直线 AB、CD 都相交的直线 AC、BD 是什么关系?

提示　AC 与 BD 异面.

疑难点解析

1. 空间两条直线的位置关系.

(1)空间两条直线(均指不重合的两直线)有以下三种位置关系:

相交直线——有且仅有一个公共点;

平行直线——在同一平面内没有公共点;

异面直线——不同在任何一个平面内,没有公共点.

(2)应了解空间两直线的位置关系. 能够画出空间两条直线的各种位置关系的图形.

2. 正确理解异面直线的概念是掌握空间两条直线位置关系的核心.

(1)异面直线定义中"不同在任何一个平面内的两条直线"是指"不可能找到一个平面能同时包含这两条直线",也可以理解为"这两条直线不能确定一个平面". 不可误解为"分别在两个平面内的两条直线". 因为,分别在两个平面内的直线,既可能是相交直线,又可能是平行直线.

除定义外,还可通过下面三个真命题加深对异面直线的理解:①异面直线是不同在任何一个平面内的两条直线;②同在某一个平面内的两条直线不是异面直线;③不是异面直线的两条直线一定同在某一平面内.

(2)异面直线的判定方法,除用定义外,还可用下列定理:"过平面外一点与平面内一点的直线,和平面内不经过该点的直线是异面直线". 在用定义证明两直线异面时,直接证明往往不易证,这时常用反证法.

(3)异面直线所成的角定量地反映了异面直线在方向上的差异. 异面直线所成角的大小是由两直线的相互位置所确定的,与定义中点 O 的位置选择无关. 这体现了异面直线所成的角的定义的合理性,它是转化成平面内的两条相交直线所成的角进行度量的,异面直线所成的角 θ 的范围是:$0°<\theta\leqslant 90°$.

一定要牢记异面直线所成角的范围($0^\circ<\theta\leqslant 90^\circ$),若在解这类问题中求出的角是钝角时,应取它的补角为异面直线所成的角.

(4)由于两条异面直线所成角的范围是$\{\alpha\mid 0^\circ<\alpha\leqslant 90^\circ\}$,当$\alpha=90^\circ$时,两条异面直线互相垂直.所以,在立体几何中,两条直线互相垂直,并不一定是两条直线相交的特例,两条直线可异面垂直.

另外,由异面直线所成角的定义可以得到如下的命题:

与两条平行线中的一条垂直的直线必垂直于另一条.

用式子可以表示为$\left.\begin{matrix}a\parallel b\\ c\perp a\end{matrix}\right\}\Rightarrow c\perp b$.

(5)空间两条直线垂直分两种情况:相交(共面)垂直和异面垂直.两条异面直线的公垂线有且只有一条,公垂线必须与两条异面直线“都垂直”且“都相交”,两者缺一不可.两条异面直线间的距离是用公垂线段的长度度量的.实际上,异面直线间的距离是异面直线上任意两点间距离的最小值.

3.平行公理(公理4)反映了平行线的传递性,它是证明等角定理的基础,也是论证平行问题的主要依据之一.等角定理及其推论说明了在平移变换下,角的大小不改变,它是定义异面直线所成角的依据,必须注意边的方向.平行公理、等角定理及其推论从平面过渡到空间仍然成立.

典例归类

一、关于两直线平行问题

例1 如图9-2-1所示,已知E、F、G、H分别是空间四边形$ABCD$各边的中点.

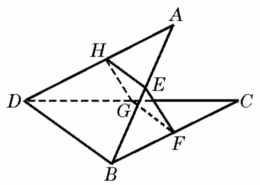


图9-2-1

求证:$EFGH$是平行四边形.

证明 ∵ E、H分别是AB、AD的中点,∴EH是$\triangle ABD$的中位线.

∴ $HE\stackrel{\parallel}{=}\frac{1}{2}BD$,

同理$FG\stackrel{\parallel}{=}\frac{1}{2}BD$.

∴ $EH\stackrel{\parallel}{=}FG$,∴$EFGH$是平行四边形.

点拨 在立体几何中,当题目中有线段中点这一条件时,一般都要联想到三角形的中位线.

思考 当对角线$AC=BD$时,四边形$EFGH$是______形;当$AC\perp BD$时,四边形$EFGH$是______形;当$AC=BD$且$AC\perp BD$时,四边形$EFGH$是______形.

备选例题 如图9-2-2,P是$\triangle ABC$所在平面外一点,D、E分别是$\triangle PAB$和$\triangle PBC$的重心.

求证:$DE\parallel AC$,$DE=\frac{1}{3}AC$.

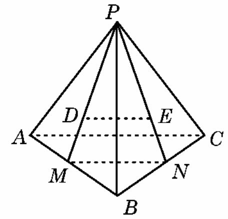


图9-2-2

分析 由D、E分别是$\triangle PAB$、$\triangle PBC$的重心,联想到连结PD、PE并延长,与AB和BC分别相交,从而构造三角形,充分利用重心性质及三角形中位线定理解题.

证明 连结PD、PE并延长,分别交AB、BC于M、N.

∵ D、E分别是$\triangle PAB$、$\triangle PBC$的重心,

∴M、N分别是AB、BC的中点.

连结MN,则$MN\parallel AC$,且$MN=\frac{1}{2}AC$.①

在$\triangle PMN$中,∵$\frac{PD}{PM}=\frac{PE}{PN}=\frac{2}{3}$,

∴$DE\parallel MN$,且$DE=\frac{2}{3}MN$.②

由①②,根据公理4得

$DE\parallel AC$,且$DE=\frac{2}{3}MN=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}AC=\frac{1}{3}AC$.

点拨 本题考查平行公理和三角形重心、中位线的性质,从分析和证明过程看,虽然是空间问题,但我们设法化为平面问题来解决,这是一条重要的解题思路.同学们要细心体会,切实掌握这种转化思想.

二、异面直线判定与所成角问题

例2 如图9-2-3所示,已知E、F、G分别是棱长为a的正方体BD_1的棱AA_1、CC_1、C_1D_1的中点.

(1)试判断GF与BE的位置关系,并给出证明;

(2)求GF与BE所成角的大小.

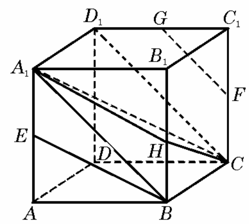


图9-2-3

解 (1)GF与BE为异面直线.

证明:连结BA_1、D_1C,∵$GF\parallel D_1C\parallel A_1B$,

∴ 存在平面α,使得$A_1B\subset\alpha$,$GF\subset\alpha$.

又∵ $BE\cap$平面$\alpha=B$,且$B\notin GF$,∴ GF与BE异面.

(2)∵ $A_1B\parallel GF$,

∴ $\angle A_1BE$为BE与FG所成的角.

在$\triangle A_1BE$中,$\frac{\frac{a}{2}}{\sin\angle A_1BE}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a}{\sin 45^\circ}$,

$\sin\angle A_1BE=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

$\angle A_1BE=\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$.

点拨 通过三角形中位线及平行四边形作出所求角.

变形 求 A_1C 与 BE 所成角的余弦值.

分析 欲求 A_1C 与 BE 所成角，只经过其中某一点作另一条直线的平行线即可.

解 取 B_1B 的中点 H，连结 A_1H，则 $A_1H\parallel BE$，

$\therefore\ \angle CA_1H$ 即为 A_1C 与 BE 所成角.

在$\triangle CA_1H$ 中，$A_1C=\sqrt{3}a$，$A_1H=CH=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，

$$\cos\angle CA_1H=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

点拨 通过作平行四边形作出两异面直线所成角.

备选例题 如图 9－2－4所示，空间四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别是对角线 BD、AC 的中点，若 $BC=AD=2EF$，求直线 EF 与直线 AD 所成的角.

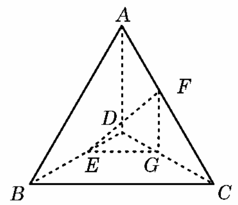


图 9－2－4

分析 通过平行移动其中一条直线后，作出两异面直线所成的角，然后通过解三角形求出所成角的大小.

解 取 CD 的中点 G，连结 EG，FG.

$\because E$、G 分别是 BD、DC 的中点，

$\therefore EG \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC$.

同理 $FG \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AD$.

$\therefore EF$ 和 FG 所成的锐角（或直角）就是异面直线 EF 与 AD 所成的角.

又$\because BC=AD=2EF$，$\therefore EF=FG=EG$，

即$\triangle EFG$ 为正三角形，$\therefore\angle EFG=60°$.

$\therefore$直线 EF 与直线 AD 所成角为 $60°$.

点拨 本题考查异面直线所成的角的概念和三角形中线性质，求异面直线所成角的一般步骤：

(1)作出异面直线所成的角，一般是平移一条直线与另一条相交，像本题中把 AD 移到了 FG 的位置；也可平移两线，像本题 BC 和 AD 所成的角，即可把 BC 移到 EG，AD 移到 FG 位置而得到.

(2)说明所作的角就是异面直线所成的角.

(3)把所作的角放在可解的三角形中来解.

(4)作答.

三、异面直线间的距离问题

例 3 如图 9－2－5 所示，S 是矩形 $ABCD$ 所在平面外一点，$SA\perp BC$，$SB\perp CD$. SA 与 CD 所成的角为 $60°$，SD 与 BC 所成的角为 $30°$，$SA=a$. (1)求 SA 与 CD 的距离；(2)求 SB 与 AD 的距离.

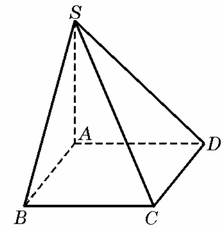


图 9－2－5

分析 求两条异面直线的距离关键在于找异面直线的公垂线段.

解 (1)$\because \left.\begin{matrix}SA\perp BC\\ BC\parallel AD\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$\left.\begin{matrix}SA\perp AD\\ DC\perp AD\end{matrix}\right\}\Rightarrow DA$ 是 SA 与 CD 的公垂线段.

$\left.\begin{matrix}\because\ SD\text{ 与 }BC\text{ 所成角为 }30°\\ BC\parallel AD\end{matrix}\right\}\Rightarrow\angle SDA=30°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle SDA$ 中，$AD=a\cot30°=\sqrt{3}a$.

$\therefore\ SA$ 与 CD 的距离为$\sqrt{3}a$.

(2)$\because \left.\begin{matrix}SB\perp CD\\ AB\parallel CD\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}SB\perp AB\\ AB\perp AD\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

AB 是 SB 与 AD 的公垂线段.

在 $\mathrm{Rt}\triangle SAB$ 中，$\angle SBA=90°$，$\angle SAB=60°$.

$\therefore\ AB=\frac{a}{2}$.

即 SB 与 AD 的距离为 $\frac{a}{2}$.

点拨 求异面直线的距离，我们只要求会求给出公垂线段的距离.

备选例题 如图 9－2－6所示，空间四边形 $ABCD$ 中，四边 AB、BC、CD、DA 和对角线 AC、BD 都等于 a，E、F 分别为 AB、CD 的中点.

(1)求证：EF 是异面直线 AB、CD 的公垂线；

(2)求异面直线 AB 和 CD 的距离.

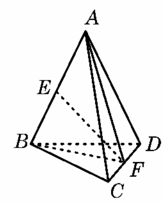


图 9－2－6

分析 要证明 EF 是异面直线 AB 与 CD 的公垂线，必须说明两个方面的问题，一个方面 EF 与 AB、CD 都相交，另一个方面 AB、CD 与 EF 都垂直.

(1)**证明** 连结 AF、BF，

由已知$\triangle BCD$ 和$\triangle ACD$ 均为正三角形，

E、F 分别为 AB、CD 的中点，

$\therefore AF=BF$，$EF\perp AB$.

同理 $EF\perp CD$.

又 EF 与 AB、CD 都相交，

$\therefore EF$ 为异面直线 AB、CD 的公垂线.

(2)解 $\because$ 空间四边形各边及对角线 AC、BD 的长均为 a,

$\therefore AF=BF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,而 $AE=\dfrac{1}{2}a$,

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中,$EF=\sqrt{AF^2-AE^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\therefore$ 异面直线 AB 和 CD 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

学习笔记

1.空间两直线的位置关系的判定.

(1)相交直线:共面,有且仅有一个公共点.

(2)平行直线:共面,没有公共点.

(3)异面直线:不同在任何一个平面内,没有公共点.

注:①空间两直线位置关系共有三种,不是其中的某两个,必是第三个.

②异面直线的定义不能简单概括成“不共面,没有公共点”,一定要强调“任何一个”.如图 9-2-7所示 $a\subset\alpha,b\subset\beta$,$a$ 与 b 不共面,且 a 与 b 没有公共点,但 a 与 b 却不是异面直线,因为可以找到一个平面包含 a、b 两条直线.

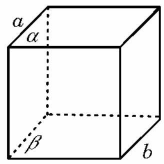
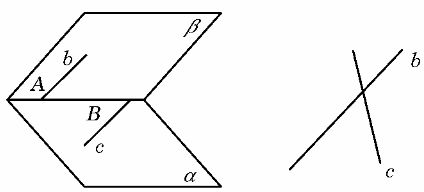


图 9-2-7

2.异面直线的图示方法和识图.

画异面直线时,为了充分显示出它们既不平行又不相交的特点,即不共面的特点,常常需要以辅助平面作为衬托,以加强直观性.若画成如图 9-2-8(b)的情形,就分不开了.



(a) (b)

图 9-2-8

画平面衬托时,通常画成图 9-2-9中所示情况.

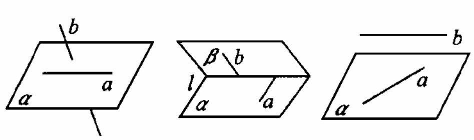


图 9-2-9

直线 a、b 相交于点 A,记作 $a\cap b=A$.

3.直线平行的证明.

(1)公理 4:如 $a\parallel c$,$b\parallel c$,则 $a\parallel b$.

(2)等角定理:如 $\angle ABC$ 与 $\angle A_1B_1C_1$ 的边 $AB\parallel A_1B_1$,$BC\parallel B_1C_1$ 且方向相同,则 $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$.

(3)推论:如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行,那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

注:①把握空间两条直线的平行关系是从平面观点到空间观点的升华.

②到目前为止必须掌握两种办法判定两直线平行:一是在同一平面内判定它们不相交;二是在空间内寻找与两已知直线都平行的直线.

③平行公理和等角定理告诉我们,空间的线段和角,经过平移后,线段的长度和角度的大小都不变.

(4)平面几何中,平行公理是适用的,而在空间中以公理形式说明平行公理同样适用.说明初中的平面几何知识在空间中的同一平面内同样适用.而不在同一平面内,平面几何知识的扩展必通过证明才能应用.

(5)空间等角定理是平面几何等角定理的推广,对平面图形同样成立.证明是利用三角形全等来证明的,三角形全等或相似在空间中也是完全成立的,但关于平面图形成立的结论,对于立体图形并非仍然成立,须经证明.

4.异面直线的判定方法.

(1)定义法:不同在任一平面内的两条直线.

(2)定理法:过平面外一点与平面内一点的直线,和平面内不经过该点的直线是异面直线.

(3)推论法:一条异面直线上两点与另一条异面直线上两点所连成的两条直线为异面直线.

注:①判定两直线为异面直线的常用办法是排除法,核心思想是反证.

②反证法是证明立体几何问题的一种重要方法,证明步骤有三步:一是提出与结论相反的假设;二是由此假设推出与已知条件或某一公理、定理或某一已被证明是正确的命题相矛盾的结果;三是推翻假设,从而肯定与假设相反的结论,即命题的结论.

③定理法的内容,虽然教材中没有用黑体字标出,但它的重要性却显而易见.它不仅再次从理论和实践的角度给出反证法证明的思想和方法,而且它所揭示的这一异面直线判定方法又可简单概括成“两点一线一面”判定法.

④推论的几何模型如图 9-2-10所示,若 AB、CD 为两异面直线,则 AC、BD 或 AD、BC 也为异面直线.其证明只要用反证法即可.

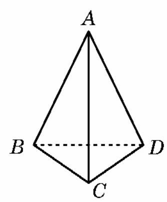


图 9-2-10

5.求异面直线所成的角.

(1)两条异面直线所成的角是非常重要的知识点,是每年高考的必考内容,要求牢固掌握两条异面直线所成的角的定义和两条异面直线互相垂直的概念,两条异面直线所成的角是刻画两条异面直线相对位置的一个量,是通过转化为相

交直线所成角来解决的,这里我们要注意:两条异面直线所成的角 θ 的范围是 $0°<\theta\leqslant 90°$,当 $\theta=90°$ 时,这两条异面直线互相垂直,两条异面直线互相垂直一定没有垂足;求两条异面直线所成角的关键是作出异面直线所成的角,作两条异面直线所成角的方法是:将其中一条平移到某个位置使其与另一条相交或是将两条异面直线同时平移到某个位置使它们相交.值得注意的是:平移后相交所得的角必须容易算出,因此平移时要求选择恰当位置.

(2)对异面直线所成角的理解.

①两条异面直线所成的角,是借用平面几何中的角的概念予以定义的,是研究空间两条直线的基础.

例1 如图9-2-11,已知在空间四边形 $ABCD$ 中,M、N 分别为 AC、BD 的中点.试找出 MN 与 AB、CD 所成的角.

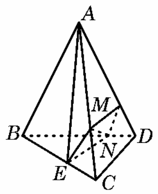


图9-2-11

分析 由于空间中点的选取与异面直线所成的角无关,因此,在找的过程中,我们往往找一些特殊的点.题目当中 M、N 分别为边 AC、BD 的中点,所以可以从这一特性出发考虑,找出异面直线 MN 与 AB、CD 所成的角.

解 取 BC 的中点 E,连结 ME、NE,

$\therefore ME /\!/ AB$,$NE /\!/ CD$,

从而 MN 与 AB、CD 所成的角等于 MN 与 ME、NE 所成的角.

②"等角定理"为两条异面直线所成的角的定义提供了可能性与惟一性,即过空间任一点,引两条直线分别平行于两条异面直线,它们所成的锐角(或直角)都是相等的,而与所取点的位置无关.

例2 如图9-2-12在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,求异面直线 AC 与 B_1C_1 所成的角.

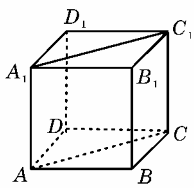


图9-2-12

解 ∵过点 C 的直线 $BC /\!/ B_1C_1$,

∴异面直线 AC 与 B_1C_1 所成的角,即为相交直线 AC 与 BC 所成的角,并且易知 AC 与 BC 所成的角为 $45°$.因此,也可知异面直线 AC 与 B_1C_1 所成的角为 $45°$.

另外,∵过点 C_1 的直线 $A_1C_1 /\!/ AC$,∴异面直线 AC 与 B_1C_1 所成的角,即为相交直线 A_1C_1 与 B_1C_1 所成的角,并且易知 A_1C_1 与 B_1C_1 所成的角为 $45°$,因此,可知异面直线 AC 与 B_1C_1 所成的角为 $45°$.

③若两条异面直线所成的角为直角,就说这两条异面直线互相垂直.

例3 在图9-2-12中,求异面直线 A_1B_1 与 BC 所成的角.

分析 异面直线 A_1B_1 与 BC 所成的角,即为相交直线 AB 与 BC 所成的角.

解 ∵AB 与 BC 所成的角为 $90°$,

∴异面直线 A_1B_1 与 BC 所成的角也为 $90°$,此时,我们就说异面直线 A_1B_1 与 BC 是相互垂直的.

反之,若两条异面直线是相互垂直的,我们也可以说这两条异面直线所成的角为 $90°$.

另外,我们还可以发现,在空间中说两条直线垂直,它们可以是相交直线,如图中的 $AB\perp BC$,但也可能是异面垂直,如图中的 $A_1B_1\perp BC$.

(3)求异面直线所成角的一般步骤是:

①选择适当的点,平移异面直线中的一条或两条成为相交直线.这里的点通常选择特殊位置的点,如线段的中点或端点,也可以是异面直线中某一条上的特殊点.

②求相交直线所成的锐角(或直角).通常在三角形中,计算这个角的大小.

(4)构造异面直线所成的角有如下几种常用方法:

①过一条异面直线上的已知点,作另一条直线的平行线,使异面直线所成的角成为相交直线的交角;

②当异面直线依附于某几何体,且直接过异面直线上的点平移直线有困难时,利用该几何体中的特殊点,将两条异面直线分别平移相交于该点;

③通过构造辅助平面、辅助几何体来平移直线.但应注意:若用余弦定理求出 $\cos\alpha<0$(α 是平移后相交直线的交角),则异面直线所成的角应为 $\pi-\alpha$.

6.异面直线的公垂线和距离的探求技巧.

(1)异面直线的公垂线确定的方法:既相交又垂直,即证明该直线与两条异面直线均相交且都垂直,而切不可望文生义,证明都垂直了事.

(2)异面直线间的距离的探求只须掌握给出公垂线的异面直线间距离的探求,不必研究复杂的问题,如果遇到未给出公垂线的问题,探求时可采用函数最值法(因为异面直线的距离是异面直线上任意两点间距离的最小值)或转化法(转化为后面将要研究的点面、线面、面面距离求解).

①求线段的长度一般要把该线段放到一个三角形中去求解,尤其是放到特殊三角形中去求解,如直角三角形,等腰三角形等.

②如图9-2-13,在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,连结 A_1C_1、A_1B、A_1D、BD、DC_1、BC_1,则由这六条面对角线构成一空间正四面体.

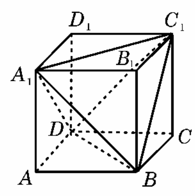


图9-2-13

$\because A_1C_1=A_1B=A_1D=BD=DC_1=BC_1$,

∴该四面体为一空间正四面体.

该正四面体对棱之间的距离,其本质上是该正四面体所在的正方体的棱长,也就是说,对边中点的连线即为正方体对面中心的连线,即为对棱所在异面直线的公垂线段.

练 挺拘横流,方显英雄本色.

A 课堂巩固

1. 若 a、b 是异面直线,b、c 是异面直线,则 a、c 的位置关系不可能是 ( )

A. 相交直线　　B. 平行直线

C. 异面直线　　D. 以上结论都不对

2. 已知异面直线 a、b 满足条件:$a\subset\alpha$,$b\subset\beta$,$\alpha\cap\beta=l$. 则 l 必定 ( )

A. 分别与 a、b 相交

B. 与 a、b 都不相交

C. 至多与 a、b 中的一条相交

D. 至少与 a、b 中的一条相交

3. 分别和两条异面直线都相交的两直线一定是 ( )

A. 异面直线　　B. 相交直线

C. 不相交直线　　D. 不平行直线

4. A 是 $\triangle BCD$ 所在平面外一点,M、N、P 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle ABD$ 的重心,且 $S_{\triangle BCD}=9$,则 $\triangle MNP$ 的面积为______.

5. 如图 9-2-14,AB、CD 是两条异面直线,且 BD 与 AB、CD 都垂直,$AB=CD$,M 是 BD 的中点,N 是 AC 的中点.

(1)求证:$MN\perp AC$;

(2)当 $AB=CD=a$,$BD=b$,$AC=c$ 时,求 MN 的长.

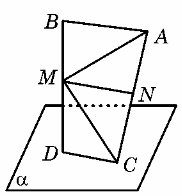


图 9-2-14

B 课后拓展

1. 已知异面直线 a、b 所成角为 $50°$,P 为空间一定点,则过点 P 且与 a、b 所成角都是 $30°$的直线有且仅有 ( )

A. 1 条　　B. 2 条

C. 3 条　　D. 4 条

2. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,过顶点在正方体的面内可以作______条表面的对角线与直线 BC_1 成 $60°$角 ( )

A. 4　　B. 6

C. 8　　D. 10

3. 如图 9-2-15 是正方体的平面展开图,在这个正方体中:①BM 与 ED 平行;②CN 与 BE 是异面直线;③CN 与 BM 成 $60°$角;④DM 与 BN 垂直,以上四个命题中,正确命题的序号是 ( )

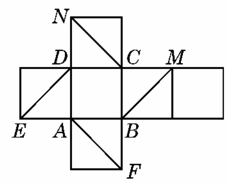


图 9-2-15

A. ①②③　　B. ②④

C. ③④　　D. ②③④

4. 如图 9-2-16所示,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,与 A_1B 异面的棱有________条,与 A_1C 异面的棱有________条.

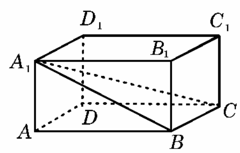


图 9-2-16

5. 已知 E、F、G、H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的四条边 AB、BC、CD、DA 的中点,若对角线 $AC=4$,$BD=6$,则 $EG^2+HF^2=$________.

6. 如图 9-2-17,已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1=2$,底面 $ABCD$ 是直角梯形,$\angle A$ 为直角,$AB\parallel CD$,$AB=4$,$AD=2$,$DC=1$,求异面直线 BC_1 与 DC 所成角的大小.(结果用反三角函数值表示)

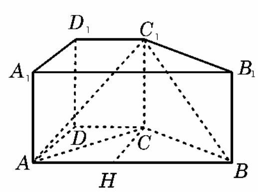


图 9-2-17

C 考题演练

1.(2006 年辽宁卷)给出下列命题：

①垂直于同一直线的两条直线互相平行；②垂直于同一平面的两个平面互相平行；③若直线 l_1,l_2 与同一平面所成的角相等，则 l_1,l_2 互相平行；④若直线 l_1,l_2 是异面直线，则与 l_1,l_2 都相交的两条直线是异面直线.

其中假命题的个数是 ( )

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

2.(2006 年北京卷 · 文)设 A、B、C、D 是空间四个不同的点，在下列命题中，不正确的是 ( )

A. 若 AC 与 BD 共面，则 CD 与 BC 共面

B. 若 AC 与 BD 是异面直线，则 AD 与 BC 是异面直线

C. 若 $AB=AC$，$DB=DC$，则 $AD=BC$

D. 若 $AB=AC$，$DB=DC$，则 $AD\perp BC$

3.(2006 年重庆卷)对于任意的直线 l 与平面 α，在平面 α 内必有直线 m，使 m 与 l ( )

A. 平行　　B. 相交

C. 垂直　　D. 互为异面直线

4. 在正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中棱长为 a，求异面直线 B_1D_1 和 C_1A 所成的角.

9.3　直线与平面平行的判定和性质

学

总结、提高、创新，这是内化知识、创新运用的基础。

预习探路

1. 直线与平面的位置关系有哪些？

提示　有平行、相交、直线在平面内.

2. 叙述线面平行的判定定理和线面平行的性质定理.

提示　判定定理：如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

(注：数学符号语言形式 $l\not\subset\alpha, m\subset\alpha, l/\!/m\Rightarrow l/\!/\alpha$)

性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行.

疑难点解析

1. 直线和平面的位置关系.

(1)直线和平面位置关系可按公共点个数分类：

无公共点⇔平行

惟一公共点⇔相交

无数个公共点⇔直线在平面内

(2)证明直线在平面内并不用“有无数公共点”，而应用公理 1，两个公共点即可.

(3)注意图形示意直线与平面的三种位置关系，同时对符号语言的表示亦要熟练把握.

2. 直线和平面平行的判定定理可简述为“线线平行，则线面平行”，可以用符号表示为：$a/\!/b, a\not\subset\alpha, b\subset\alpha\Rightarrow a/\!/\alpha$. 用该定理判断直线 a 与平面 α 平行时，必须具备三个条件：

(1)直线 a 在平面 α 外，即 $a\not\subset\alpha$.

(2)直线 b 在平面 α 内，即 $b\subset\alpha$.

(3)两条直线 a、b 平行，即 $a/\!/b$.

这三个条件缺一不可，缺少其中任何一条，则结论就不一定成立了.

直线和平面平行的判定，是将其转化为直线与直线的平行关系的判定，也就是说，要证明一条直线和一个平面平行，只要在平面内找出一条直线与已知直线平行即可.

3. 直线和平面平行的性质定理可简述为：“若线面平行，则线线平行.”可以用符号表示为：若 $a/\!/\alpha, a\subset\beta, \alpha\cap\beta=b$，则 $a/\!/b$，这个性质定理可以看作直线与直线平行的判定定理，用该定理判断直线 a 与 b 平行时，必须具备三个条件：

(1)直线 a 和平面 α 平行，即 $a/\!/\alpha$.

(2)平面 α 和 β 相交，即 $\alpha\cap\beta=b$.

(3)直线 a 在平面 β 内，即 $a\subset\beta$.

三者缺一不可. 在应用这个定理时，要防止“一条直线平行于一个平面，就平行于这个平面内的一切直线”的错误.

4. 理解直线和平面的位置关系是基础，掌握直线和平面平行的判定、性质是重点，对判定定理、性质定理要从文字语言、符号语言、图形语言等诸方面准确理解、相互补充、熟练掌握. 通过线线平行、线面平行之间的相互转化，达到和谐的统一. 这是最基本、最常见也是最重要的题型.

典例归类

1. 线面平行问题

例 1　已知空间四边形 $ABCD$，M、N 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的重心.

求证：$BD/\!/$平面 CMN.

分析　借助平行公理，间接去寻找与 BD 平行的直线.

证明　如图 9－3－1，连结 AM、AN 并延长交 BC、CD 于点 E、F，

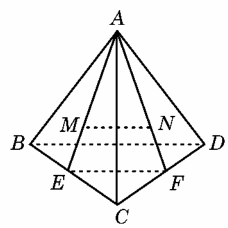


图 9－3－1