恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级学练考

（学生用书）

全国名牌重点中学特高级教师编写

丛书主编 方 可

高二数学（上）

www.hengqian.com

北京出版社出版集团 北京教育出版社

恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级学练考

（学生用书）

丛书主编　方　可
本册主编　张　雯
撰 稿 人　李春红　黄景怡　裴会平
申　鹂　张　雯　王　刚
丁志勇

高二数学(上)

北京出版社出版集团
北京教育出版社

恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级学练考

超级学练考
高二数学(上)
(学生用书)
丛书主编　方 可
*
北京出版社出版集团
北京教育出版社 出版
(北京北三环中路6号)
邮政编码: 100011
网　址: www. bph. com. cn
北京出版社出版集团总发行
新华书店经销
蓝田立新印务有限公司印刷
*
880×1230 16开本 10.5印张 279 000字
2006年5月第3版　2006年5月第1次印刷
ISBN 7-5303-2865-4
G · 2798 定价: 14.00元
(质量投诉电话: 029-82027917 010-58572393 010-58572245)

主编寄语

授人以鱼，还是授人以渔

以网络为载体的e时代，向中学教育提出了许多问题：1.什么样的教育理念最好？2.怎样及时应对教材多样化、考卷多元化的局面？3.老师怎样教，学生怎样学，才最有效果？……我们策划《超级学练考》的初衷，就是为了解决师生目前遇到的以上困惑——让广大学生在较短的时间内学得多，记得牢，练得棒。

《超级学练考》丛书作为同步类新型教辅，主要为进课堂编写（也可作为学生自读类用书），其突出特点在于：

一、渗透先进的教育理念，体现教师的主导作用和学生的主体地位，立足以学生发展为中心，注重学生学习方式及思维能力的培养。

二、“学”、“练”、“考”有机结合、环环相扣：“学”以节（课）为单位，归纳、细梳所要学习的核心内容；“练”按梯度分组设题，逐级提升学生的解题能力；“考”设置多种类型试卷，全方位挖掘和诠释考点，目的在于让学生“考”后而知不足。

三、“疑难点解析”、“典例归类”、“学习笔记”等栏目设计新颖、科学、实用，有如名师从旁指导，求知更加轻松。

四、题解分离，便于思考；详解单订，便于验证。

五、书网互动，增值无限。师生在使用本丛书时，可锁定**www.hengqian.com**进行信息查询、资源下载、在线辅导等，作为本书读者免费享受这些增值服务。

相信这样的一套好书，定会给您的艰辛求学带来意想不到的实惠和无穷的轻松；实现我们既授人以鱼，更授人以渔的愿景！

丛书主编　方　可

目录

第6章　不等式

第7章　直线和圆的方程

Contents

第8章　圆锥曲线方程

第6章 不等式

6.1 不等式的性质

学

总结、模仿、创新，这是内化知识、创新运用的基础。

预习探路

1.不等式的基本性质有哪些？

提示　有三条.对于任意的元素 a、b,有①$a-b>0\Leftrightarrow a>b$;②$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;③$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

2.不等式的方向具有单向和双向两种,它们各自主要的用途是什么？

提示　单向性主要用于证明不等式,双向性主要用于解不等式.

3.比较两个实数的大小时,怎样运用比商法？

提示　要比较 a 与 b 的大小,可按以下步骤完成:

①若 $a>0,b>0$,则当 $\frac{a}{b}>1$ 时,$a>b$;当 $\frac{a}{b}<1$ 时,$a<b$.

②若 $a<0,b<0$,则当 $\frac{a}{b}<1$ 时,$a>b$;当 $\frac{a}{b}>1$ 时,$a<b$.

4.会用"$a>b,ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$"这一性质吗？

提示　注意既不能强化条件(如 $a>b>0$),也不能弱化条件(如 $a>b$);否则就会出现差错.

疑难点解析

1.不等式性质的证明,主要依据实数大小的比较及实数运算的符号法则,一定要深刻理解,熟练而准确地应用.并注意不等式具有同向相加性与同向相乘性(同向相乘时,必须所乘不等式的两端均为正值),但绝对不能同向相减(或相除)而得出错误结论.

2.不等式性质定理中的 a 和 b,可以是实数,也可以是代数式.在不等式两边同号的前提下,用比商法时,所得式子的分数值是否大于 1,应是一目了然的.否则应考虑采用其他方法证明.

3.反证法的实质是根据互为逆否关系的两个命题具有等价性这一原理,在原命题不容易证明时,通过证明其逆否命题而达到目的.但在叙述时,常常是先假设结论的反面为真,由此出发,进行推理,得出一个与已知矛盾的事实或显然错误的结论,从而说明假设不正确,以此说明原命题为真.

4.运用不等式性质解题时,一定要注意题设条件.

例 1　α,β 满足 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 的取值范围是　(　　)

A. $-\pi<\alpha-\beta<\pi$

B. $-\pi<\alpha-\beta<0$

C. $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$

D. $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$

解　选 B,易错选 A.

剖析　化减法为加法是常用技巧.本题先求减法(或相反数的范围),利用题设 $\alpha<\beta$ 转化得 $\alpha-\beta<0$,这是挖掘隐含因素的关键一步.

例 2　已知 $a>b>c>d>0$,且 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

求证:$a+d>b+c$.

证明　将结论化为 $a-b>c-d$,再根据已知条件 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,可得 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\Leftrightarrow\frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}>1(b>d>0)$,从而有 $a-b>c-d$,即 $a+d>b+c$.

剖析　在证明的过程中,应悉心领会等价转换思想的运用,此外,比例性质的运用和比商法的运用也是证明的关键所在.

5.判断不等式之间的"充要关系"时要谨慎.

例 3　填空:

(1)$a>b,c>d$ 是 $a+c>b+d$ 的________条件;

(2)$a+b>2,ab>1$ 是 $a>1,b>1$ 的________条件;

(3)$\frac{a}{b}>1$ 是 $a>b$ 的________条件;

(4)$ab<0$ 是 $|a+b|<|a-b|$ 的________条件.

解　(1)充分而不必要;(2)必要而不充分;(3)既不充分也不必要;(4)充分必要.

注意:解决这类问题时,要善于举反例,有时可加以简要论证.

6.比较含字母的两个实数的大小时,要对字母进行讨论,关键是确定一个分类标准.

例 4　比较 a^2 与 $3a+4$ 的大小.

解　作差,并变形,得

$a^2-(3a+4)=(a+1)(a-4)$.

①当 $(a+1)(a-4)=0$,

即 $a=-1$ 或 $a=4$ 时,$a^2=3a+4$;

②当 $(a+1)(a-4)>0$,

即 $a<-1$ 或 $a>4$ 时,$a^2>3a+4$;

③当 $(a+1)(a-4)<0$,即 $-1<a<4$ 时,$a^2<3a+4$.

例 5 设 $f(x)=1+\log_x 3$，$g(x)=2\log_x 2$，其中 $x>0$，且 $x\neq1$，试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.

解 $f(x)-g(x)=\log_x \dfrac{3}{4}x$.

由于 $\log_x \dfrac{3}{4}x$ 的正负取决于 x、$\dfrac{3}{4}x$ 与 1 的大小关系，所以应分以下三类情形讨论.

①当 $\dfrac{3}{4}x=1$，即 $x=\dfrac{4}{3}$ 时，$\log_x \dfrac{3}{4}x=0$，

$\therefore f(x)=g(x)$；

②当 $0<x<1$ 或 $x>\dfrac{4}{3}$ 时，$\log_x \dfrac{3}{4}x>0$，

$\therefore f(x)>g(x)$；

③当 $1<x<\dfrac{4}{3}$ 时，$\log_x \dfrac{3}{4}x<0$，

$\therefore f(x)<g(x)$.

例 6 设 $f(x)=ax^2+bx$，且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(-2)$ 的取值范围.

错解 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2\Rightarrow 1\leqslant a-b\leqslant 2$，　①

$2\leqslant f(1)\leqslant 4\Rightarrow 2\leqslant a+b\leqslant 4$，　②

①+②得　$3\leqslant 2a\leqslant 6$，即 $\dfrac{3}{2}\leqslant a\leqslant 3$.

由①得　$-2\leqslant b-a\leqslant -1$，　③

②+③得　$0\leqslant 2b\leqslant 3$，即 $0\leqslant b\leqslant \dfrac{3}{2}$.

$\therefore 6\leqslant 4a\leqslant 12$，$-3\leqslant -2b\leqslant 0$，

$\therefore f(-2)=4a-2b\in[3,12]$.

剖析 在这个问题中，a、b 均为非独立变量. 事实上，它们均与 x 的取值情况相关. 仔细分析 $3\leqslant 4a-2b\leqslant 12$ 这个结果，可以发现，左端取等号条件是 $a=b=\dfrac{3}{2}$，右端取等号的条件是 $a=3$，$b=0$，这充分说明用这种方法只能得出 $f(-2)\in(3,12)$，显然它比期望的结果范围要大一些. 正确的方法应用线性规划的观点去处理它. 在没有学习线性规划知识的情况下，可以用待定系数法或方程思想解决问题.

解 方法 1：(待定系数法)

设 $f(-2)=mf(-1)+nf(1)$，则

$4a-2b=m(a-b)+n(a+b)$.

即 $4a-2b=(m+n)a-(m-n)b$.

于是 $\begin{cases}m+n=4\\ m-n=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=3,\\ n=1.\end{cases}$

$\therefore f(-2)=3f(-1)+f(1)$.

又 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，

$\therefore 3\leqslant 3f(-1)\leqslant 6$，

$\therefore 5\leqslant 3f(-1)+f(1)\leqslant 10$.

即 $5\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

方法 2：(方程思想)

$\because \begin{cases}f(-1)=a-b\\ f(1)=a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}[f(-1)+f(1)],\\ b=\dfrac{1}{2}[f(1)-f(-1)].\end{cases}$

$\therefore f(-2)=4a-2b=3f(-1)+f(1)$. 以下同方法 1.

典例归类

一、作差比较法

例 1 已知 $a\neq1$，比较 $3(1+a^2+a^4)$ 与 $(1+a+a^2)^2$ 的大小.

分析 由于这两个代数式均为多项式，可应用作差法进行比较大小.

解 $3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2$

$=2-2a-2a^3+2a^4$

$=2a^3(a-1)-2(a-1)$

$=2(a-1)^2(a^2+a+1)$

$=2(a-1)^2\left[\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right]$.

$\because a\neq1$，且 $\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，　$\therefore$ 上式 >0.

即 $3(1+a^2+a^4)>(1+a+a^2)^2$.

注意 作差，配方.

说明 作差后的变形整理非常重要. 变形通常有两种情况，一是因式分解，二是变成平方和形式.

思考 若去掉 $a\neq1$ 这个条件，大小关系又如何？

二、作商比较法

例 2 设 a、b 为正数，比较 a^ab^b 与 a^bb^a 的大小.

分析 由于比较大小的两个式子均为正，且以幂的形式出现，故可应用作商法比较.

解 $\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}$，

当 $a>b>0$ 时，$\dfrac{a}{b}>1$，$a-b>0$，

$\therefore \left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>\left(\dfrac{a}{b}\right)^0=1$，

$\therefore \dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}>1$.

又 $a^bb^a>0$，

$\therefore a^ab^b>a^bb^a$.

当 $0<a<b$ 时，$0<\dfrac{a}{b}<1$，$a-b<0$，

$\therefore \left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>\left(\dfrac{a}{b}\right)^0=1$，$\therefore \dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}>1$.

又 $a^bb^a>0$，$\therefore a^ab^b>a^bb^a$.

当 $a=b>0$ 时，$a^ab^b=a^bb^a$.

综上所述，$a^ab^b\geqslant a^bb^a$.

说明 (1)比较两个正数 a、b 的大小时，先求 $\dfrac{a}{b}$，若 $\dfrac{a}{b}>1$，则 $a>b$；若 $\dfrac{a}{b}<1$，则 $a<b$；若 $\dfrac{a}{b}=1$，则 $a=b$. 对于两个负数也可类似比较.

(2)作商后与 1 比较，要注意对其中字母的讨论.

思考 ①此例能否用作差法比较？②设 a、b、c 均为不相等的正数，比较 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}$ 与 $a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$ 的大小.

三、不等式性质的综合应用

例 3 已知 $a>b>0$，$c<d<0$，$e<0$.

求证：$\sqrt{\frac{e}{c-a}}<\sqrt{\frac{e}{d-b}}$.

分析　利用不等式的性质证明.

证明　$\because a>b>0$，$\therefore -a<-b<0$.

又$\because c<d<0$，$\therefore c-a<d-b<0$.

$\therefore 0>\frac{1}{c-a}>\frac{1}{d-b}$.

又 $e<0$，$\therefore 0<\frac{e}{c-a}<\frac{e}{d-b}$. $\therefore \sqrt{\frac{e}{c-a}}<\sqrt{\frac{e}{d-b}}$.

说明　这里是根据题设条件，反复应用不等式性质定理来进行证题，因此不等式性质的熟练运用是解题的关键.

思考　此例是否可用作差法进行证明.

学习笔记

1. 对本节所学基础知识要有一个系统全面的认识，知识网络如下：

- 不等式的性质
  - 两个实数 a,b 间的关系：$a>b$ 或 $a=b$ 或 $a<b$
    - 同向或异向不等式的概念
    - 条件不等式与绝对不等式的概念
  - 实数比较大小的方法 → $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$；$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$；$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$
  - 不等式的性质（→ 不等式性质的应用）
    - $a>b \Leftrightarrow b<a$
    - $a>b, b>c \Rightarrow a>c$
    - $a>b \Rightarrow a+c>b+c$ → $a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$
    - $a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$；$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$
      - $\begin{matrix} a>b>0 \\ c>d>0 \end{matrix} \Leftrightarrow ac>bd$
      - $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n, n\in \mathbf{N}^*$
    - $a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}, n\in \mathbf{N}^*$ 且 $n>1$

特别是对不等式两边平方、开方或同乘上一个数(或式子)，要注意不等号是否要改向，甚至不等式两边同乘上一个数(或式子)，当这个数(或式子)的值为 0 时，不等式变成等式.

2. 比较法是证明不等式最基本、最重要的方法之一. 比较法可分为差值比较法和比值比较法. 差值比较法是最常用的方法，其一般步骤是作差→变形→判断大小→结论.

3. 使用比较法时，对式子进行变形是关键，通常情况下，通常因式分解、配方等手段，将复杂数学式的大小比较转化为简单数学式的大小比较，具有一定的灵活性，对具体问题应作具体分析.

4. 要加强特殊化思想的应用，特别对大小比较的选择、填空题，取特殊值进行排除不失为一个好办法.

练

混淘横渡，方显英雄本色。

A 课堂巩固

1. 如果 $c<a<b$，且 $ac<0$，则下列选项中不一定成立的是（　　）

A. $ab>ac$　　B. $c(b-a)>0$

C. $cb^2<ab^2$　　D. $ac(a-c)<0$

2. 有下列条件：①$a+b>1$；②$ab>1$；③$a+b>2$；④$a^2+b^2>2$. 其中能推出 a、b 中至少有一个数大于 1 的条件有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

3. 设 a、$b\in \mathbf{R}^+$，且 $a\neq b$，$x=a^3+b^3$，$y=ab(a+b)$，则 x 与 y 的大小关系为（　　）

A. $x>y$　　B. $x<y$

C. $x=y$　　D. 无法确定

4. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid x>1$ 且 $y>1\}$，$N=\{(x,y)\mid x+y>2$ 且 $(x-1)(y-1)>0\}$，则集合 M 与 N 的关系是________.

5. 已知 $a>b>0$，$c<d<0$，$e<0$，求证：$\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

B 课后拓展

1. 若 $1<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，则下列结论中不正确的是（　　）

A. $\log_a b>\log_b a$

B. $|\log_a b+\log_b a|>2$

C. $(\log_b a)^2<1$

D. $|\log_a b|+|\log_b a|>|\log_a b+\log_b a|$

2. 不等式①$a^2+2>2a$；②$a^2+b^2>2(a-b-1)$；③$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$ 中，恒成立的有（　　）

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

3. 若 $a<b$，$c<d$，且 $(c-a)(c-b)>0$，$(d-a)(d-b)<0$，则（　　）

A. $a<c<d<b$　　B. $c<a<b<d$

C. $a<c<b<d$　　D. $c<a<d<b$

4. 若 α、β 满足 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $\alpha-\beta$ 的取值范围是（　　）

A. $-\pi<\alpha-\beta<\pi$　　B. $-\pi<\alpha-\beta<0$

C. $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$　　D. $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$

5. 求证：$a^2+b^2\geqslant ab+a+b-1$.

6. 若二次函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，且 $1\leqslant f(1)\leqslant 2$，$3\leqslant f(2)\leqslant 4$，求 $f(3)$ 的取值范围.

7. 设 a、b、m、$n\in \mathbf{R}^+$，且 $m+n=1$，试比较 $\sqrt{ma+nb}$ 与 $m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$ 的大小.

8. 已知 $a>b>c>1$，设 $m=a-\sqrt{c}$，$n=a-\sqrt{b}$，$p=2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)$，试比较 m、n、p 的大小.

9. 求证：实数 a、b、c 均为正数的充要条件是 $a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$，$abc>0$.

C 考题演练

1. (2004 年北京理) 如果 a、b、c 满足 $c<b<a$，且 $ac<0$，那么下列选项中不一定成立的是（　　）

A. $ab>ac$　　B. $c(b-a)>0$

C. $cb^2<ab^2$　　D. $ac(a-c)<0$

2. (2004 年湖北理) 若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，有下列不等式：①$a+b<ab$；②$|a|>|b|$；③$a<b$；④$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$. 其中正确的不等式有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

3. (2004 年辽宁) 对于 $0<a<1$，给出下列四个不等式：

①$\log_a(1+a)<\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$；

②$\log_a(1+a)>\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$；

③$a^{1+a}<a^{1+\frac{1}{a}}$；④$a^{1+a}>a^{1+\frac{1}{a}}$.

其中成立的是（　　）

A. ①与③　　B. ①与④

C. ②与③　　D. ②与④

4. (2005 年北京文) 若不等式 $(-1)^n a<2+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 对于任意正整数 n 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left[-2,\frac{3}{2}\right)$　　B. $\left(-2,\frac{3}{2}\right)$

C. $\left[-3,\frac{3}{2}\right)$　　D. $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$

6.2 算术平均数与几何平均数

学

总结、概括，创新，这是内化知识，创新运用的基础。

预习探路

1. 什么叫算术平均数与几何平均数？

提示　若 a、$b\in\mathbf{R}^+$，则 $\frac{a+b}{2}$ 叫做 a、b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$ 叫做 a、b 的几何平均数，可推广到多个数的情形，如

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_i}{n}$叫做$a_1$、$a_2$、…、$a_i$（其中$a_i>0, i=1,2,\cdots,n$）的算术平均数，$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_i}$叫做$a_1$、$a_2$、…、$a_i$的几何平均数（其中$a_i>0, i=1,2,\cdots,n$）.

2.几何平均数与算术平均数大小关系如何？

提示　算术平均数不小于它的几何平均数，即$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a$、$b\in\mathbf{R}^+$），也可推广到$n$个数的情形，即有$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_i}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_i}$（$a_i>0, i=1,2,\cdots,n$）.

3.均值不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$的适用条件是$a$、$b\in\mathbf{R}^+$，等号成立的条件是$a=b$，对吗？

提示　正确.

4.如何运用均值不等式求一些函数的最值？

提示　设x、y都是正数，①若$xy=p$是一个定值，当且仅当“$x=y$”时，$x+y$有最小值$2\sqrt{p}$；②若$x+y=s$是一个定值，当且仅当“$x=y$”时，xy有最大值$\frac{1}{4}s^2$.

疑难点解析

1.算术平均数及几何平均数一定是针对两个正数而言的.

2.当且仅当“$a=b$”时，取“$=$”.

3.在运用定和定积定理时，尤其要注意“$=$”成立的可能性.

4.关于等号成立的条件，一定要引起足够的重视，尤其在经过多次变换后，是否还能取“$=$”要严格加以验证.

例1　已知$x>0, y>0$，且$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，求$x+y$的最小值.

错解1　$\because x>0, y>0$，且$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1$，

$\therefore x+y=\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)(x+y)\geqslant2\sqrt{\frac{9}{xy}}\cdot2\sqrt{xy}=12.$

故$(x+y)_{\min}=12$.

错解2　$\because x>0, y>0$，

$\therefore 1=\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\geqslant2\sqrt{\frac{9}{xy}}=\frac{6}{\sqrt{xy}}$，

$\therefore \sqrt{xy}\geqslant6$，

$\therefore x+y\geqslant2\sqrt{xy}\geqslant12$，即$(x+y)_{\min}=12$.

剖析　错误的根源在于$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\geqslant2\sqrt{\frac{9}{xy}}$与$x+y\geqslant2\sqrt{xy}$两式中的等号不可能同时成立，所以$x+y>12$，其最小值是无法求出的.

例2　求函数$f(x)=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$的最小值.

错解　$\because f(x)=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{(x^2+2)+1}{\sqrt{x^2+2}}$

$=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\geqslant2$，

$\therefore f(x)$的最小值为2.

剖析　在运用均值不等式求函数最值时，必须按照“一正二定三相等”的原则去操作，绝对不能简单从事.在上述解法中，取等条件是$\sqrt{x^2+2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\Rightarrow x^2=-1$，这个方程在实数范围内无解，从而导致错误.正确的解法如下：

根据函数$f(x)=x+\frac{1}{x}(x>0)$的单调性可知，它在$[1,+\infty)$上单调递增，而运用换元思想，$\sqrt{x^2+2}\geqslant\sqrt{2}$，故当$\sqrt{x^2+2}=\sqrt{2}$，即$x=0$时，$f(x)_{\min}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

典例归类

一、关于$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$的运用问题

例1　已知正数x、y满足$x+y=1$，求$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$的最小值.

分析　$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$可以变形为$\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)=2+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}+1$.

解　$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)=2+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}+1$

$=3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant3+2\sqrt{2}$.

当且仅当$\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$即$x=2-\sqrt{2}, y=\sqrt{2}-1$时，

上述不等式中等号成立，$\therefore\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)_{\min}=3+2\sqrt{2}$.

说明　本例易出现如下错误：

$$\left.\begin{array}{l}1=x+y\geqslant2\sqrt{xy}\\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geqslant2\sqrt{\frac{2}{xy}}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geqslant2\sqrt{xy}\cdot2\sqrt{\frac{2}{xy}}=4\sqrt{2}.$$

由此错误地认为$\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)_{\min}=4\sqrt{2}$.

此法错误的原因关键在于两次运用均值不等式，“$=$”没有同时取到.

在计算这一类求最值问题时，何时取“$=$”非常重要，为了避免“$=$”的困扰，我们可以采用解法中的变形，这样只须$\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$即可.

思考　若a、$b\in\mathbf{R}^+$，$a+b=2$，求$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值.

二、关于算术平均数与几何平均数在实际中的应用

例2　用一段长为l m的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园.问这个矩形的长、宽各为多少时，菜园的面积最大，最大值是多少？

分析　这是一道实际应用题，当然可用二次函数求极值的方法求解，但学过算术平均数与几何平均数后，可运用这一知识求解.解答该题的关键在于：设出矩形的长、宽以后，

表示出矩形的面积，然后正确运用算术平均数与几何平均数定理进行求解.

解　依题意设矩形的两边长分别为 x m、$(l-2x)$m，则矩形的面积为 $x(l-2x)\text{m}^2$.

由定理“$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$”可知

$$x(l-2x)=\frac{2x(l-2x)}{2}\leqslant\frac{\left(\frac{2x+l-2x}{2}\right)^2}{2}=\frac{l^2}{8}.$$

当且仅当 $2x=l-2x$ 时，矩形面积取得最大值，

即 $x=\frac{l}{4}$ 时，矩形最大面积为 $\frac{l^2}{8}$，

亦即当矩形长、宽分别为 $\frac{l}{2}$、$\frac{l}{4}$ 时，菜园面积最大，最大面积为 $\frac{l^2}{8}$.

说明　应用题的最值问题，主要是选取适当的变量，依据题设，建立数学模型(即函数关系式)，由变量和常量间的关系，选取基本不等式求最值.

例 3　已知直角三角形的周长为 l(定值)，求它的面积的最大值.

解　方法 1：设直角三角形的两直角边分别为 a、b，

则 $a+b+\sqrt{a^2+b^2}=l$.

$\therefore 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}\leqslant l$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，

即 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{l}{2+\sqrt{2}}$.

$\therefore S=\frac{1}{2}ab\leqslant\frac{3-2\sqrt{2}}{4}l^2$，

此时，该三角形为等腰直角三角形.

故当 $a=b$ 时，$S_{\max}=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}l^2$.

方法 2：设斜边长为 c，一锐角为 α，

则 $c+c\cos\alpha+c\sin\alpha=l$.

$\therefore c=\frac{l}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$.

$\therefore S=\frac{1}{2}c^2\cos\alpha\sin\alpha=\frac{l^2}{2}\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{(1+\cos\alpha+\sin\alpha)^2}$.

令 $t=\cos\alpha+\sin\alpha$，则 $t=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，

又 α 为直角三角形的一锐角，则 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

从而有 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，

$\therefore \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

$\therefore t\in(1,\sqrt{2}]$.

又 $\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}(t^2-1)$.

$$\therefore S=\frac{l^2}{4}\cdot\frac{t^2-1}{(1+t)^2}=\frac{l^2}{4}\cdot\frac{t-1}{t+1}$$

$$=\frac{l^2}{4}\left(1-\frac{2}{t+1}\right)\leqslant\frac{l^2}{4}\left(1-\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$=\frac{l^2}{4}(3-2\sqrt{2}).$$

当且仅当 $t=\sqrt{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时等号成立.

学习笔记

1. 牢记 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a$、$b\in\mathbf{R}^+$），当且仅当 $a=b$ 时取“=”.

2. 在求函数的最值时，有时为了达到“一正二定三相等”这个条件，常进行配凑、裂项、转化、分离常数等变形手段，创设一个应用均值不等式的条件.

3. 若 a、$b\in\mathbf{R}^+$，则 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

4. 推广：n 个函数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，它们的算术平均数不小于它们的几何平均数，即 $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$.

5. 在解决一些应用型问题时，要善于抽象出均值不等式.

练

泥海横流，方显英雄本色。

A 课堂巩固

1. 设 $P=\frac{a+b}{2}$，$Q=\sqrt{ab}$，$R=\frac{2ab}{a+b}$，$S=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，其中，$a$、$b\in\mathbf{R}^+$，且 $a\neq b$，则这四个数中，最大者与最小者依次为　（　　）

A. P、Q　　B. S、Q

C. P、R　　D. S、R

2. 若 $x>0$，$y>0$，且 $\frac{2}{x}+\frac{8}{y}=1$，则 xy 有　（　　）

A. 最大值 64　　B. 最小值 $\frac{1}{64}$

C. 最小值 64　　D. 最小值 $\frac{1}{2}$

3. 下列不等式中一定成立的是　（　　）

A. $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$　　B. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\geqslant 2$

C. $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}\geqslant 2$　　D. $2-3x-\frac{4}{x}\geqslant 2$

4. 函数 $f(x)=2x^2+\frac{8}{x^2}+3$，当 $x=$________时，$f(x)$ 有最________值是________.

5. 若 $x>y>1$，$a=\frac{1}{2}(\lg x+\lg y)$，$b=\sqrt{\lg x\cdot\lg y}$，$c=\lg\frac{x+y}{2}$，则 a、b、c 由小到大的排序为________.

B 课后拓展

1. 设 $M=a+\frac{1}{a-2}(2<a<3)$，$N=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{16}\right)(x\in\mathbf{R})$，则 M、N 的大小关系为 ( )

A. $M<N$　　B. $M>N$

C. $M=N$　　D. 不确定

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\left(b,\frac{a+b}{2}\right)$，$N=(\sqrt{ab},a)$，其中 $a>b>0$，则 $M\cap(\complement_U N)$ 等于 ( )

A. $(b,\sqrt{ab}]$　　B. $\left(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2}\right)$

C. $\left(-\infty,\frac{a+b}{2}\right)\cup(a,+\infty)$　　D. $\left(b,\frac{a+b}{2}\right)$

3. 设 x、$y\in\mathbf{R}^+$，且 $x+y=1$，则使 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a$ 恒成立的 a 的最小值是 ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$

C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

4. 设 x、$y\in\mathbf{R}$，且 $x+y=5$，则 3^x+3^y 的最小值是 ( )

A. 10　　B. $6\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{6}$　　D. $18\sqrt{3}$

5. 若正数 a、b 满足 $ab=a+b+3$，则 ab 的取值范围是______.

6. 已知三个负数 a、b、c 成等差数列，又 a、d、c 成等比数列，试判断 b 和 d 的大小关系.

7. 当 $0<x<1$，且 a、$b\in\mathbf{R}^+$ 时，求 $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}$ 的最小值.

8. 若 a、b、c 均为正数，求证：$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc$.

C 考题演练

1. (2004 年湖北文)已知 $x\geqslant\frac{5}{2}$，则 $f(x)=\frac{x^2-4x+5}{2x-4}$ 有 ( )

A. 最大值 $\frac{5}{4}$　　B. 最小值 $\frac{5}{4}$

C. 最大值 1　　D. 最小值 1

2. (2004 年湖南理)设 $a>0$，$b>0$，则下列不等式中不恒成立的是 ( )

A. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant4$　　B. $a^3+b^3\geqslant2ab^2$

C. $a^2+b^2+2\geqslant2a+2b$　　D. $\sqrt{|a-b|}\geqslant\sqrt{a}-\sqrt{b}$

3. (2005 年北京文)经过长期观察得到：在交通繁忙的时段内，某段公路汽车的车流量 y(千辆/小时)与汽车的平均速度 v(km/h)之间的函数关系为

$y=\frac{920v}{v^2+3v+1\,600}(v>0)$.

(1)在该时段内，当汽车的平均速度 v 为多少时，车流量最大？最大车流量为多少？(精确到 0.1 千辆/小时)

(2)若要求在该时段内车流量超过 10 千辆/小时，则汽车的平均速度应在什么范围内？

6.3 不等式的证明

学

总结、模仿，创新，这是内化知识，创新运用的基础.

预习探路

1. 证明不等式常用哪几种方法？

提示　比较法、综合法、分析法.

2. 在什么情况下证明不等式选用分析法？

提示　在条件向结论推进时，一时看不出联系的，常用分析法进行“执果索因”，常用“$\Leftarrow$”的叙述过程.

3. 除了上面介绍的三种基本方法外你还能说出几种其他证法吗？

提示　例如，反证法、换元法、判别式法、放缩法、最值法、公式法等.

4. 一个不等式的证明是否只能用或只有一种方法？

提示　不一定，有时会几种方法并用，尤其在综合题中，要因题而异，但纯不等式的证明历来是难点，应控制难度，不

去搞难度较大的不等式证明题.

疑难点解析

不同形式的不等式的证明题可以选择不同的方法,不同的方法在运用时都有其难点.

比较法的核心内容是作差或作商,难点是作差或作商后的变形技巧.

综合法的核心内容是要对不等式的原理有清楚了解并结合其具体特点,其难点是证明不等式方法的操作.

分析法是执果索因,难点是结合不等式原理及其特点,准确找出其充分条件,形成不等式证明的方法.

对于其他的方法,要结合不等式的具体结构,灵活掌握,是难点,但不是重点.

例 1 已知 a、b 是正数,求证:$\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

错解 $\because a^2+b^2\geqslant 2ab, a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,

$\therefore \dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\geqslant\dfrac{2ab}{(2\sqrt{ab})^2}=\dfrac{2ab}{4ab}=\dfrac{1}{2}$.

剖析 上面证法用错了不等式的性质,“$\left.\begin{array}{l}a>b\\c>d\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$”这个结论是不正确的.

例 2 已知 $a>0,b>0$,求证:$\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

错解 $\because \dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$,

$\therefore a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\geqslant b\sqrt{a}+a\sqrt{b}$.

$\because a(\sqrt{a}-\sqrt{b})+b(\sqrt{b}-\sqrt{a})\geqslant 0$,

$\therefore (a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})\geqslant 0$.

即 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$.

$\therefore$ 不等式成立.

剖析 条件结论不分,因果关系不明,应掌握分析法的基本语言.

例 3 已知 $|a|\leqslant 1,|b|\leqslant 1$,

求证:$ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\leqslant 1$.

错解 因为 $|a|\leqslant 1,|b|\leqslant 1$,设 $\sin\alpha=a,\cos\alpha=b$,

则有 $ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$

$=\sin\alpha\cos\alpha+\sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)}$

$=\dfrac{1}{2}\sin2\alpha+\dfrac{1}{2}|\sin2\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2}|\sin2\alpha|+\dfrac{1}{2}|\sin2\alpha|$

$=|\sin2\alpha|\leqslant 1$.

剖析 以特殊来代替一般,是本题的论证错误所在:$\left.\begin{array}{l}|a|\leqslant 1\\|b|\leqslant 1\end{array}\right\}\Rightarrow a^2+b^2\leqslant 1$ 是不对的.

例 4 设 a、b、$c\in\mathbf{R}$,且 a、b、c 不全相等,则不等式 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ 成立的一个充要条件是 ( )

A. a、b、c 全为正数　　B. a、b、c 全为非负实数

C. $a+b+c\geqslant 0$　　D. $a+b+c>0$

错解 选 B,用特殊值法.

剖析 特殊值法有其局限性,要使其正确,必须具有一般性、代表性.正确解法如下:

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$

而 a、b、c 不全相等 $\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2>0$.

则 $a^3+b^3+c^3-3abc\geqslant 0\Leftrightarrow a+b+c\geqslant 0$.故选 C.

答案 C.

典例归类

一、一题多证型

例 1 已知 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$,

求证:$ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

证明 方法 1:分析法.

①当 $ac+bd\leqslant 0$ 时,显然成立;

②当 $ac+bd>0$ 时,欲证原不等式成立,

只需证 $(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$,

即证 $a^2c^2+2abcd+b^2d^2\leqslant a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$,

即证 $2abcd\leqslant b^2c^2+a^2d^2$,

即证 $0\leqslant(bc-ad)^2$.

因为 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$,所以上式恒成立.

综合①②可知,原不等式成立.

方法 2:综合法.

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)+(b^2c^2-2abcd+a^2d^2)$

$=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2\geqslant(ac+bd)^2$,

故原命题得证.

方法 3:比较法.

$\because (a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=(bc-ad)^2\geqslant 0$,

$\therefore (a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$,

$\therefore \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geqslant|ac+bd|\geqslant ac+bd$,

即 $ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

方法 4:三角代换法.

不妨设 $a=r_1\cos\alpha,b=r_1\sin\alpha,c=r_2\cos\beta,d=r_2\sin\beta$ (r_1,r_2 均为变量),

则 $ac+bd=r_1r_2\cos\alpha\cos\beta+r_1r_2\sin\alpha\sin\beta=r_1r_2\cos(\alpha-\beta)$.

又 $|r_1r_2|=|r_1|\cdot|r_2|$

$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

$=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

及 $r_1r_2\cos(\alpha-\beta)\leqslant|r_1r_2|$,

所以 $ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

方法 5:换元法.

①当 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=0$ 时,原不等式显然成立.

②当 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\neq 0$ 时,欲证原不等式成立,只需证 $\left|\dfrac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}\right|\leqslant 1$,

即证 $\left|\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\dfrac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\dfrac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}\right|\leqslant 1$.

注意到$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$与$\left(\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}\right)^2+\left(\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}\right)^2=1$，

不妨设$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$，$\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}=\cos\beta$，则

$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$，$\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}=\sin\beta$，

故$\left|\frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}+\frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}\right|$

$=|\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta|$

$=|\cos(\alpha-\beta)|\leqslant 1$，

所以 $ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

方法 6：构造函数法(判别式法).

待证不等式的结构特征与一元二次方程的判别式 $\Delta=b^2-4ac\leqslant 0$的结构特征很类似，由此不妨构造函数，$f(x)=(a^2+b^2)x^2+2(ac+bd)x+(c^2+d^2)$

$=(a^2x^2+2acx+c^2)+(b^2x^2+2bdx+d^2)$

$=(ax+c)^2+(bx+d)^2$.

显然不论 x 取任何实数，函数 $f(x)$ 的值均为非负数，因此：①当 $a^2+b^2\neq 0$ 时，方程 $f(x)=0$ 的判别式 $\Delta\leqslant 0$，

即$[2(ac+bd)]^2-4(a^2+b^2)(c^2+d^2)\leqslant 0$，

即$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

故 $ac+bd\leqslant|ac+bd|\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

②当 $a^2+b^2=0$ 时，原不等式显然成立.

说明　证明不等式就是证明所给不等式在给定条件下恒成立，由于不等式的形式是多种多样的，因此，不等式的证明方法也可谓是千姿百态，针对不等式证明，要具体问题具体分析，灵活选用证明方法，提高代数变形和推理论证能力.

二、构造“一正二定三相等”，运用综合法

例 2　已知 a、b、c 为互不相等的正数，且 $abc=1$. 求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

分析　观察其结构特点，对其分析和重新组合，创造出能利用基本不等式的条件.

证明　$\because a$、b、$c\in(0,+\infty)$，

$\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}=2\sqrt{c}$.

同理可证：$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 2\sqrt{a}$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geqslant 2\sqrt{b}$.

三式相加得$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

又$\because a$、b、c 互不相等，

∴以上不等式等号不成立，

$\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

说明　灵活运用平均值不等式，这是综合法证明不等式的重要技巧之一，对于一些较长的式子应创造条件，把它分解为我们可以运用的基本不等式，然后相加或相乘.

思考　已知 a、b、c 为不全相等的正数，求证：$\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}>3$.

例 3　已知 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，求证：$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\leqslant 2$.

证明　方法 1：$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\right)^2}$

$=\sqrt{a+b+1+2\sqrt{a+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{b+\frac{1}{2}}}$

$\leqslant\sqrt{2+\left(a+\frac{1}{2}\right)+\left(b+\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{4}=2$.

方法 2：$\because 1=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，

$\therefore ab\leqslant\frac{1}{4}$.

$\therefore ab+\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{4}\leqslant 1$.

即$\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right)}\leqslant 1$.

从而 $2+2\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right)}\leqslant 4$，

即 $a+\frac{1}{2}+b+\frac{1}{2}+2\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right)}\leqslant 4$.

$\therefore\left(\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\right)^2\leqslant 4$.

$\therefore\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\leqslant 2$.

方法 3：$\because a>0$，$b>0$，$a+b=1$，

∴可设 $a=\cos^2\alpha$，$b=\sin^2\alpha(0^\circ<\alpha<90^\circ)$.

从而$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{\cos^2\alpha+\frac{1}{2}}+\sqrt{\sin^2\alpha+\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+1+2\sqrt{\left(\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\right)}}$

$=\sqrt{2+2\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\frac{1}{2}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\frac{1}{4}}}$

$=\sqrt{2+2\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\frac{3}{4}}}\leqslant\sqrt{2+2\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}}=2$.

$\therefore\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\leqslant 2$.

方法 4：利用基本不等式$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，得

$\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\leqslant 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{2}+b+\frac{1}{2}\right)}=2\sqrt{\frac{1}{2}(a+b+1)}=2\sqrt{\frac{1}{2}\times 2}=2$.

三、分析法的运用

例4 已知 $a>b>0$,求证:$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$.

分析 此不等式结构复杂,运用作差法、综合法均不易"切入"推理,可尝试运用分析法.

证明 欲证原不等式成立,

只需证:$\frac{(a-b)^2}{4a}<a+b-2\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{4b}$,

即$\left(\frac{a-b}{2\sqrt{a}}\right)^2<(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<\left(\frac{a-b}{2\sqrt{b}}\right)^2$.

$\because a>b>0$,

$\therefore$只需证:$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}<1<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$,

即证:$1+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}<2<1+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,也即证:$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}<1<\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,

只需证:$\frac{b}{a}<1<\frac{a}{b}$.

因 $a>b>0$,上式显然成立.

$\therefore$原不等式成立.

说明 我们做证明题时一般情况下习惯于由"繁"到"简",本题用分析法符合人们的这个习惯.

思考 用分析法证明较简单的题,有什么共同的特点吗?

学习笔记

1.掌握利用实数的运算性质与大小顺序之间的关系来比较两个实数大小的方法,明确利用比较法证明不等式的基本思路和证明步骤.

2.在掌握了不等式的基本性质、一些重要的基本不等式后,才能形成运用综合法、分析法证明不等式的基本思路和方法.

3.证明不等式,要牢牢把握住比较法、综合法、分析法这三种方法,熟练地运用这三种方法和基本不等式性质来证明不等式,提高自己的思维水平和分析问题、解决问题的能力.

4.综合法证明不等式的思路特点是由因导果,即从已知看未知,其推理方向是"⇒";而分析法证明不等式的思路特点是执果索因,即从未知看已知,其推理方向是"⇐".

5.分析法的优点是利于思考、目标明确,而综合法的优点是条理清楚、宜于表达.因而在证不等式时,宜将两者结合起来,通常先用分析法进行分析,然后用综合法加以书写.若用分析法证明时,要正确使用连接有关(分析推理)步骤的关键词,做到正确规范地表述.

练

沧海横流,方显英雄本色.

A 课堂巩固

1.设 $a、b、c\in \mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=1$,如果 $M=\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)$,则必有 ( )

A. $0\leqslant M<\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{8}\leqslant M\leqslant 1$

C. $1\leqslant M<8$　　D. $M\geqslant 8$

2.设 $a、b$ 是非零实数,且$|a|\geqslant|b|$,那么下列各式中,不恒成立的是 ( )

A. $\sin\theta=\frac{b}{a}$　　B. $\cot\theta+\tan\theta=\frac{4ab}{a^2+b^2}$

C. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$　　D. $\sec\theta=\frac{a^2+b^2}{2ab}$

3.某厂产值第二年的增长率为 p,第三年的增长率为 q,这两年的年均增长率为 s,则必有 ( )

A. $s>\frac{p+q}{2}$　　B. $s=\frac{p+q}{2}$

C. $s\leqslant\frac{p+q}{2}$　　D. $s\geqslant\frac{p+q}{2}$

4.若 $a>1$,则 $a+\frac{1}{a-1}$有最________值________.

5.已知 $a>0,b>0,2c>a+b$,

求证:(1)$c^2>ab$;(2)$|a-c|<\sqrt{c^2-ab}$.

B 课后拓展

1.已知$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,则$\frac{a+b}{c}$的取值范围是 ( )

A. $0<\frac{a+b}{c}<2$　　B. $0<\frac{a+b}{c}\leqslant\sqrt{2}$

C. $1<\frac{a+b}{c}\leqslant\sqrt{2}$　　D. $1\leqslant\frac{a+b}{c}\leqslant\sqrt{2}$

2.设 $x>0,y>0,A=\frac{x+y}{1+x+y},B=\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}$,则 $A、B$ 的大小关系是 ( )

A. $A>B$　　B. $A\geqslant B$

C. $A<B$　　D. $A\leqslant B$

3.两个正变量 $x、y$ 满足 $x+y=4$,则使不等式$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant m$ 恒成立的实数 m 的取值范围是________.

4.设 $a、b、c、d\in\mathbf{R}$,$m=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$,$n=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$,则 m 与 n 的大小关系为________.

5.已知 $f(x)=\tan x,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,如果 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$,则$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$________$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$(在横线上填入反映两者大小关系的符号).

6. 若$|a|\leqslant 1$，$|b|\leqslant 1$，求证：$ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\leqslant 1$.

7. 已知 $x>1$，求函数 $y=x+\dfrac{9x}{x-1}$的值域.

8. 设 $f(x)=2x^2+1$，且 a、b 同号，$a+b=1$. 求证：对任意实数 p、q 恒有 $af(p)+bf(q)\geqslant f(ap+bq)$成立.

9. 设 $a>0$，$a\neq 1$，$0<x<1$，求证：$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

考题演练

1. (2004 年上海春招)已知函数 $f(x)=|x-a|$，$g(x)=x^2+2ax+1$(a 为正常数)，且函数 $f(x)$与 $g(x)$的图象在 y 轴上的截距相等.
(1)求 a 的值；
(2)求函数 $f(x)+g(x)$的单调递增区间；
(3)若 n 为正整数，求证：$10^{f(n)}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^{g(n)}<4$.

2. (2004 年江苏)已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$满足下列条件：对任意的实数 x_1、x_2 都有 $\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$和$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$，其中 λ 是大于 0 的常数. 设实数 a_0、a、b 满足 $f(a_0)=0$ 和 $b=a-\lambda f(a)$. 求证：
(1)$\lambda\leqslant 1$，并且不存在 $b_0\neq a_0$，使得 $f(b_0)=0$；
(2)$(b-a_0)^2\leqslant(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$；
(3)$[f(b)]^2\leqslant(1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

3. (2005 年福建)下列结论正确的是 ( )
A. 当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，$\lg x+\dfrac{1}{\lg x}\geqslant 2$
B. 当 $x>0$ 时，$\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\geqslant 2$
C. 当 $x\geqslant 2$ 时，$x+\dfrac{1}{x}$的最小值为 2
D. 当 $0<x\leqslant 2$ 时，$x-\dfrac{1}{x}$无最大值

4. (2005 年重庆)若 x，y 是正数，则 $\left(x+\dfrac{1}{2y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2x}\right)^2$的最小值是 ( )
A. 3　B. $\dfrac{7}{2}$　C. 4　D. $\dfrac{9}{2}$

5. (2004 年天津)已知函数 $f(x)=ax^3+cx+d$ $(a\neq 0)$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x=1$ 时，$f(x)$取得极值-2.
(1)求 $f(x)$的单调区间和极大值；
(2)求证：对任意 x_1，$x_2\in(-1,1)$，不等式$|f(x_1)-f(x_2)|<4$恒成立.

6.4 不等式的解法举例

学

总结、模仿、创新，这是内化知识、创新运用的基础。

预习探路

1. 不等式 $ax>b$ 的解集为 $x>\dfrac{b}{a}$，对吗？

提示　不对. 应该对 a 进行讨论.

2. 当 a、b 满足什么条件时，不等式 $ax>b$ 的解集是空集？