

目 录

译者的话

前言

原序

第一章 引论1

1. 实例和纲要. 专门术语 1
2. 距离空间. 初等拓扑概念, 最佳逼近的存在定理, 紧集, 波尔察诺-维尔斯特拉斯定理 3
3. 赋范线性空间. 空间 $C[a, b]$, 紧集, 完备性 9
4. 内积空间. 规范正交集, 最小平方逼近, 格拉姆-施密特方法 16
5. 凸性. 卡拉蒂奥多里定理, 线性不等式定理, 黑利定理 21
6. 最佳逼近的存在性和唯一性. 不存在的例, 一致凸性, 严格凸性, 最佳逼近算子的连续性 26
7. 凸函数. 局部极小必是绝对极小, 连续性 31

第二章 不相容线性方程组的切比雪夫解36

1. 引言 36
2. 一个未知数的方程组. 图解法, 三个代数算法 38
3. 解的特征 43
4. 特殊情形, $m=n+1$. 超平面, 单调范数, 显式解 47
5. 波利亚算法 54
6. 上升算法 57
7. 下降算法 64
8. 凸规划 67

第三章 用多项式和其他线性族的切比雪夫逼近70

1. 引言 70

2. 插值. 拉格朗日公式, 范德蒙特矩阵, 误差公式, 切比雪夫多项式, 埃尔米特插值 71
3. 维尔斯特拉斯定理. 伯恩斯坦多项式, 单调算子, 费叶尔定理 80
4. 一般的线性族. 特征定理, 哈尔条件, 交错定理, 马尔可夫组, 瓦勒·布松定理 89
5. 唯一性问题. 强唯一性定理, 哈尔定理, 傅洛德定理 100
6. 离散化误差: 一般理论. 集合的密度, 函数的连续模, 收敛定理 105
7. 离散化: 代数多项式. 马尔可夫不等式和伯恩斯坦不等式. 收敛定理 112
8. 算法. 里姆斯两个算法的表述与证明 120

第四章 最小平方逼近及有关题材128

1. 引言. 内积, 各种正交系 128
2. 正交多项式系. 递推关系, 极值性质, 数值积分, 高斯积分, 斯蒂尔吉斯定理 134
3. 正交展开式的收敛性. 一致收敛性与最小平方收敛性, 克利斯铎夫-达布恒等式, 贝塞尔不等式, 傅里叶级数的收敛性, 费叶尔定理 146
4. 用切比雪夫多项式级数的逼近. 伯恩斯坦“衰减”定理, 维尔斯特拉斯不可微函数, 量 $E_n(f)$ 的估计 160
5. 离散的最小平方逼近. 各种离散正交性质, 关于 $E_n(f)$ 的进一步的界限, 额尔道斯-特朗定理 169
6. 杰克生定理. 法瓦特的结果, 各种例子, 狄尼-利普希茨定理 177

第五章 有理逼近192

1. 引言. 有理函数到连分式的转换 192
2. 最佳有理逼近的存在性. 经典定理的推广 195
3. 最佳逼近的特征. 对于广义有理逼近的三个定理, 交错定理, 普通有理函数之特例 203
4. 唯一性; 最佳逼近算子的连续性. 关于广义有理逼近的唯

一性, 强唯一性, 算子的连续性与间断性	209
5. 算法. 线性不等式方法, 加权极小极大方法, 微分矫正方法	217
6. 帕第逼近及其推广. 存在性, 计算, 到其他基底的推广	221
7. 连分式. 初等运算, 塞德尔收敛定理, 斯蒂尔吉斯定理	230
第六章 若干补充课题	241
1. 斯通逼近定理.	241
2. 闵次定理. 格拉姆引理	245
3. 杰克生定理的逆定理. 伯恩斯坦定理和旗葛孟定理	252
4. 折线逼近和 $C[a, b]$ 中的基. 对于 $C[a, b]$ 的夏伍德基, 克雷因-米尔曼-鲁特曼定理	259
5. 哈尔希拉杰-罗辛斯基定理. 贝尔定理, 一致有界定理, 傅里叶投影的极值性质, 勒贝格常数, 尼考拉耶夫定理, 法贝尔定理, 别尔曼定理	265
6. 平均逼近. 杰克生唯一性定理, 特征定理, 马尔可夫定理	275
注释	283
参考文献	297
索引	318
人名译名对照表	325

第 一 章

引 论

1. 实例和纲要

在象逼近论这样一门为解决实际计算问题的要求所强烈影响的学科中, 看来从考虑这类问题的一些实例开始是合适的. 在这些实例中, 读者会注意到一个基本的相似点: 其中每个实例都包含从指定的函数类中选择一个元素, 使它在某种意义上“接近于”某个固定的函数.

(i) 确定多项式 p 具有最低次数, 使在区间 $[0, \pi/2]$ 上有 $|p(x) - \sin x| \leq 10^{-8}$.

(ii) 更一般地, 给定函数 f 和正数 ε , 确定多项式 p , 使在给定区间 $[a, b]$ 上有 $|p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

(iii) 确定一个次数不超过 7 的多项式, 使在区间 $[0, \pi/2]$ 上有 $|p(x) - \sin x| \leq \varepsilon \sin x$, 而 ε 为最小.

(iv) 确定两个多项式 p 和 q , 它们的次数和为最小, 使在区间 $[0, 1]$ 上有 $|p(x)/q(x) - \arctan x| \leq 10^{-16}$.

(v) 确定向量 $x = (x_1, \dots, x_n)$, 它是线性方程组 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i (i=1, 2, \dots, m)$ 在最小平方意义下的最佳近似解. 即, 确定 x 使表达式 $\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \right)^2$ 达最小值.

(vi) 作为 (v) 的一个变形, 要求 x 使表达式 $\max_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \right|$ 达最小值.

(vii) 作为(ii)的一个变形, 要求 $\int_a^b |p(x) - f(x)|^2 dx < \varepsilon$.

这些都是逼近论中典型的计算问题, 而我们的目的之一就是建立对于它们的解的算法(数值方法). 很自然地由刚才列举的实例而引起数学上更感兴趣的大量问题. 例如, 我们可以问: 在问题(i)中我们是否总能找到一个多项式解? 当函数 f 所属的类恰好是什么函数类时, 问题(ii)总是(即对任何 $\varepsilon > 0$)可解的? 在问题(ii)中, 对一个固定的函数 f , 当 ε 减小到零时, 多项式的次数如何增长? 问题(ii)和(vii)的两个多项式解之间存在什么关系? 其他函数类在作为逼近工具时是否也具有和多项式类同样的优点? 如果问题(ii)在计算上证明是困难的, 有没有其他比较容易得到的逼近, 尽管后者并非是最优的? 贯穿在本书的大部分篇幅中, 我们将对这些理论问题给予充分的注意.

在开始研究之前, 让我们先回忆若干常用的术语和记号的定义. 通常用记号

$$\{x: \dots\}$$

来表示集合, 读作“所有满足…的 x 的集合”. 如果 A 是一个集合, 当 x 是 A 的一个元素(成员)时, 记作 $x \in A$, 而在相反的情形记作 $x \notin A$. 还记:

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\} \quad (\text{和}),$$

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 且 } x \in B\} \quad (\text{交}),$$

$$A \sim B = \{x: x \in A \text{ 且 } x \notin B\} \quad (\text{差}).$$

记号 $A \subset B$ 表示 $A \cap B = A$ (A 的每一个元素都是 B 的元素). 假如 A 是一个实数集合, 若 λ 是对所有 $x \in A$ 满足 $x \leq \lambda$ 的最小数, 则记作 $\lambda = \sup A$ 或 $\lambda = \max A$. 如果 $P(x)$ 是一个与 x 有关的命题而 f 是一个实值函数, 我们常常用记号 $\sup_{P(x)} f(x)$ 来代替不方便的记号 $\sup\{f(x): P(x)\}$. 类似地, 若 μ 是对所有

$x \in A$ 满足 $\mu \leq x$ 的最大数, 则记作 $\mu = \inf A$ 或 $\mu = \min A$. 我们允许 λ 可以是 $+\infty$ 及 μ 可以是 $-\infty$. (字符 $\inf$ 和 $\sup$ 分别是 infimum(下确界)和 supremum(上确界)的缩写.)

还应说明:

$$[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\},$$

$$(a, b) = \{x: a < x < b\},$$

$$(a, b] = \{x: a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x: a \leq x < b\}.$$

符号 $\Rightarrow$ 读作“蕴含”. 最后, 符号 $\square$ 读作“证毕”.

2. 距离空间

读者已经看到, 逼近中的许多典型问题都涉及到从一个集合中选择一个元素, 使它在某种意义上接近该集合外的一个预先指定的元素. 这样, 所给的集合可以是由多项式所组合, 同时被逼近的元素是诸如 $\arcsin x$ 那样的肯定并非多项式的一个函数. 这样的逼近问题在没有确定两个元素间的距离是如何度量之前是不确切的. 我们通常要求这个距离是一个非负实数: 当两个元素恒等时为零, 否则为正. 通常还要求从 x 到 y 的距离和从 y 到 x 的距离相同. 最后还要求从 x 到 y 直接度量的距离不大于通过另一个中间点 z 度量的距离. 这些思想的抽象体现即是距离空间. 我们把距离空间理解为偶对 (X, d) , 其中 X 是集合, 而 d 定义作 X 中点偶的实值函数且对 X 中的所有点 x, y, z 满足下列公设:

- (i) $d(x, x) = 0$ (自反性);
- (ii) $d(x, y) > 0$, 若 $x \neq y$ (正性);
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$ (对称性);
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (三角不等式),

函数 d 称为 X 上的距离. 例如, 若 X 是实数集, “平常”的距离是 $d(x, y) = |x - y|$. 在这种情形下, 性质 (i) 到 (iv) 不过是反映了绝对值函数的熟悉的那些性质. 一个不很有用的距离可以定义为 $d(x, y) = 1$, 若 $x \neq y$; 而 $d(x, x) = 0$. 在任何集合中都可引进这一种距离; 这就证明了, 给定一个集合 X , 总存在一个距离 d , 使 (X, d) 为距离空间. 说得随便一点, 我们也常常说 X 本身是距离空间.

既然有了距离空间的概念, 我们就可以阐述逼近论的基本问题: 在距离空间中给定一点 g 和一集合 M , 确定 M 中的一点使它到 g 有最小的距离. 这样一个最近点可以存在也可以不存在. 我们因此将感兴趣于存在定理, 它给出足以保证最近点存在的条件. 还要考虑最近点的唯一性问题及最近点的特征. 最后, 我们也不忽视实际计算最近点的算法这一重要课题.

在距离空间中能够定义属于拓扑学所研究的许多概念. 这些概念在距离空间中要比在一般的拓扑学中多少简单一些, 并且应警告读者, 一般不要把为距离空间给出的定义和定理毫不改变地转到任意拓扑空间中去. 首先, 收敛点列的概念可以定义如下. 距离空间中的一个点列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 称为收敛到点 x^* (记作 $x_n \rightarrow x^*$), 如果从 x_n 到 x^* 的距离当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于零. 形式地定义, $\lim x_n = x^*$ 当且仅当 $\lim d(x_n, x^*) = 0$, 其中前后两者都是当 $n \rightarrow \infty$ 时取极限. X 的一个子集 K 称为紧的, 如果 K 中的每个点列都有一个收敛于 K 中一点点的子序列. 说得直观一点, 一个序列 $y_1, y_2, y_3, \dots$ 是另一个序列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 的子序列, 如果 $\{y_i\}$ 可以通过删除 $\{x_i\}$ 的一些元素并保持其次序而得到. 说得严格一点, 必须存在一个递增函数 n 使 $y_k = x_{n(k)}$. 由于这个原因, 通常把 $n(k)$ 写成 n_k , 因而

子序列一般具有形式 $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$, 这里 $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, 至此已准备就绪, 可以给出一个基本的存在定理.

距离空间中的最佳逼近存在定理 设 K 表示距离空间中的紧集. 对空间的每一点 p , 总对应着 K 中的一点, 它到 p 有最小的距离.

证明 设 $\delta = \inf \{d(p, x) : x \in K\}$. 由下确界的定义, 可以找到 K 中一点列 $x_1, x_2, x_3, \dots$, 具有下述性质: 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $d(p, x_n) \rightarrow \delta$. 根据 K 的紧性, 可以假定该序列收敛于 K 中的一点 x^* ; 因为若有必要, 可以从给定的序列中取出一个具有此性质的子序列. 我们要证明 x^* 是 K 中与 p 有最小距离的一点. 事实上, 按三角不等式——距离公设(iv)——有 $d(p, x^*) \leq d(p, x_n) + d(x_n, x^*)$. 这个不等式的左端项与 n 无关, 而右端项当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 δ . 因此 $d(p, x^*) \leq \delta$. 由于 $x^* \in K$, 所以 $d(p, x^*) \geq \delta$. 因此 $d(p, x^*) = \delta$. **】**

还有其他几个拓扑概念也是有用的. 距离空间中的一个集合 F 称为**闭集**, 若 F 中的每一个收敛点列的极限也在 F 中. 这样, $x_n \in F$ 和 $x_n \rightarrow x$ 一同蕴含 $x \in F$. 闭集的余集称为**开集**. 集合 A 说成是在集合 B 中**稠密**, 若对每一个 $x \in B$ 和每一个 $\varepsilon > 0$, 都对应一个 $y \in A$ 使 $d(x, y) < \varepsilon$. (这样, B 的所有元素都可以用 A 的元素来逼近.) 从一个距离空间到另一个距离空间的映射 ϕ 称为在点 x **连续**, 若对每一个序列 $x_n \rightarrow x$ 都有 $\phi(x_n) \rightarrow \phi(x)$. 若 ϕ 在其定义域内的每一点都连续, 则简称**连续**. 对于实值函数, 所用的距离应理解为平常的距离 $|x - y|$, 所以在这种情况下, 我们可以说, 若 $d(x^*, x_n) \rightarrow 0$ 蕴含 $|\phi(x^*) - \phi(x_n)| \rightarrow 0$, 则 ϕ 是连续的. 连续实值函数的一个在许多证明中常常用到的性质给出如下.

极值可达定理 定义在距离空间中的一个紧集上的连续

实值函数必能取到它在该集合上的下确界和上确界。

证明 设 ϕ 是定义在距离空间中的一个紧集 K 上的连续实值函数. 令 $m = \inf\{\phi(x) : x \in K\}$. 那么, K 中存在一个点列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 使 $\phi(x_n) \rightarrow m$. 由 K 的紧性, 可以假定该点列收敛到 K 中的一点 x^* . 根据 ϕ 的连续性有 $\phi(x^*) = m$, 此即所要证明的. 注意到 $\sup \phi = -\inf(-\phi)$, 对于上确界, 其证明随即得出. **】**

定理 在距离空间中, 紧集的闭子集是紧的.

证明 设 F 是紧集 M 的一个闭子集. 如果 $x_1, x_2, \dots$ 是 F 中的任一序列, 我们可以——据 M 的紧性——找到收敛于点 $x^* \in M$ 的子序列 x_{n_k} . 因为 F 是闭的, 所以 x^* 事实上属于 F . **】**

定理 从一个距离空间到另一个距离空间的连续映射将紧集映射成紧集.

证明 设 ϕ 是这样一个映射, 而 M 是 ϕ 的定义域内的一个紧集. 若 $y_1, y_2, \dots$ 是映象集合 $\phi(M)$ 中的任一序列, 则可以找到 $x_n \in M$ 使 $\phi(x_n) = y_n$. 根据 M 的紧性, 可以找到一个子序列, 使 $x_{n_k} \rightarrow x \in M$. 由 ϕ 的连续性, 于是得出 $y_{n_k} \rightarrow \phi(x)$. **】**

波尔察诺-维尔斯特拉斯 (Bolzano-Weierstrass) 定理 闭区间 $[a, b]$ 是紧的.

证明 首先对区间 $[0, 1]$ 给出证明. 考虑 $[0, 1]$ 中的任一序列 $\Delta = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$. 若某个实数 ξ 在 Δ 中出现无穷多次, 则存在一个其每个元素都等于 ξ 的子序列 $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \dots$. 这样的子序列收敛到 ξ , 而显然 $\xi \in [0, 1]$. 在其他情况下, Δ 中没有一点出现无穷次. 将 Δ 中的每个成员写成十进小数的形式, $\lambda = 0.a_1a_2a_3\dots$. 如果我们依据其十进小数展开式的第一位数字将 Δ 中所有元素分成 10 个子集, 那么这 10 个

子集中有一个——叫作 S_1 ——必然包含无穷多个元素。如此，所定义的集合 S_1 含有 A 中无穷多个点，且这些点都具有相同的第一位数字。现将 S_1 的元素根据其第二位十进数字分类。这些类中有一个——叫作 S_2 ——必然包含无穷多个元素。这样，所定义的集合 S_2 含有 A 中无穷多个点，且这些点都具有相同的前二位十进数字。若继续照此进行，我们就定义了一个集合序列 $S_1, S_2, \dots$ ，使对每个 k ， S_k 包含 A 中无穷多个点，且所有这些点都具有相同的前 k 位十进数字。现选择一个指标 k_1 ，使 $\lambda_{k_1} \in S_1$ ，再选择指标 $k_2 > k_1$ ，使 $\lambda_{k_2} \in S_2$ ，等等。用这种方法所产生的子序列必收敛到数 ξ ，这个数 ξ 与 S_1 的点有相同的第一位数字，与 S_2 的点有相同的前二位数字，等等。这样 $|\xi - \lambda_{k_i}| \leq 10^{-i}$ 。显然 $\xi \in [0, 1]$ 。因而 $[0, 1]$ 是紧的。

今设 $[a, b]$ 是任意闭区间。它是区间 $[0, 1]$ 在连续映射 $\phi(x) = bx + (1-x)a$ 之下的映象，于是，上面的定理表明， $[a, b]$ 是紧的。】

若从一个距离空间 M 到另一个距离空间的函数 ϕ 是连续的，则它在每一点 $x \in M$ 连续，因此，对每一个 $\varepsilon > 0$ ，都对应一个 $\delta > 0$ ，使对所有 $y \in M$ 都有

$$(1) \quad d(x, y) < \delta \Rightarrow d_1[\phi(x), \phi(y)] < \varepsilon.$$

数 δ 一般说来既依赖于 ε ，也依赖于 x 。但是，若对应于 ε ，能够确定一个 $\delta > 0$ ，使 (1) 对所有 x 和 y 都成立，则称 ϕ 在 M 上一致连续。

定理 从一个距离空间到另一个距离空间的连续函数在每一个紧集上一致连续。

证明 若定理不真，则我们能够找到一个紧距离空间 M 上的连续函数 ϕ 和一个 $\varepsilon > 0$ ，对于这个 ε ，没有一个 $\delta > 0$ 与

它有上述对应关系. 于是, 存在一列点偶 (x_n, y_n) 使 $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$, 同时 $d_1[\phi(x_n), \phi(y_n)] \geq \varepsilon$. 必要的话过渡到子序列, 可以假定 $x_n \rightarrow x \in M$. 则也有 $y_n \rightarrow x$. 但是, 不等式

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq d_1[\phi(x_n), \phi(y_n)] \\ &\leq d_1[\phi(x_n), \phi(x)] + d_1[\phi(x), \phi(y_n)] \end{aligned}$$

即与 ϕ 在点 x 的连续性发生矛盾. **】**

习 题

1. 考虑距离空间 (X, d) , 这里 $d(x, y) = 1, x \neq y$; 而 $d(x, x) = 0$. 什么是收敛序列, 闭集, 紧集, 连续实值函数?
2. 下列等式中哪一个在实轴上定义了距离?
 - (a) $d(x, y) = \log(1 + |x - y|)$,
 - (b) $d(x, y) = e^{|x - y|} - 1$,
 - (c) $d(x, y) = |x - y|^2$.
3. 试给出函数 ϕ 的某些方便的充分条件, 使当 d 是距离时, 等式

$$d^*(x, y) = \phi[d(x, y)]$$
 也定义一个距离 d^* .
4. 对于在习题 1 的距离空间中的紧集, 讨论最近点的存在性、唯一性和特征.
5. 证明: 在距离空间 (X, d) 中, 对固定的 p , $d(p, x)$ 是 x 的连续函数. 利用这个事实, 作为本节第二个定理的推论导出第一个定理.
6. 距离空间中的一个收敛点列必有唯一的极限.
- *7. 定义在距离空间上的实值函数 ϕ 叫作下半连续, 若对每一个实数 λ , 集合 $\{x: \phi(x) \leq \lambda\}$ 都是闭的. 证明: 一个下半连续函数在任何紧集上必达到其下确界.
8. 证明: 定义在紧集上的正值连续函数有一个正的下确界.
9. 实值函数 ϕ 是上半连续的, 若每一个集合 $\{x: \phi(x) \geq \lambda\}$ 都是闭的. 证明: ϕ 是连续的当且仅当它同时是上半连续的和下半连续的.
10. (关于聚点) 点 x^* 说成是序列 $x_1, x_2, \dots$ 的一个聚点, 若某个子序列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ 收敛于 x^* . 证明: 距离空间的子集 K 是紧的当且仅当

K 中每一个序列都在 K 中有一聚点. 证明: 若紧集中的一个序列只有一个聚点, 则该序列收敛到这个聚点.

11. 若 $x_n \rightarrow x^*$, 则集合 $\{x^*, x_1, x_2, \dots\}$ 是紧的.

12. 在子序列的定义中, 有时不要求 $n_1 < n_2 < \dots$, 而只要求 $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$.

如果采用这个定义, 紧性的概念是否要改变?

13. 柯西序列是具有性质 $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i, j > n} d(x_i, x_j) = 0$ 的序列 $\{x_1, x_2, \dots\}$. 若

每一个柯西序列都收敛, 则称距离空间是完备的. 证明: 每一个紧距离空间是完备的.

14. 两个紧集的和集是否是紧集?

15. 从极值可达定理可以得出: 连续实值函数在紧集上有界.

16. 若 x 是位于开集 O 内的一点, 则对某个 $\varepsilon > 0$ 有

$$\{y: d(x, y) \leq \varepsilon\} \subset O.$$

17. 置 $\text{dist}(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y)$. 证明 $\text{dist}(x, K)$ 是连续的. 证明:

$\text{dist}(x, K) > 0$ 对所有 $x \notin K$ 都成立当且仅当 K 是闭的.

3. 赋范线性空间

许多逼近问题的背景是一类特殊的距离空间, 称之为赋范线性空间. 读者会从学过的代数中记得, 线性空间有下列三要素:

(i) 集合 E , 其元素称为向量或点;

(ii) E 中的一个运算称为加法, 它遵守平常的算术法则;

(iii) 实数和向量的乘法运算, 遵守平常的算术法则.

这里所谓“平常的算术法则”, 其内容可以概述如下. 对于 E 中所有的 f, g 和 h 及对于所有的实数 λ 和 μ : $f + g = g + f$; $f + (g + h) = (f + g) + h$; $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$; $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$; $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$; $1 \cdot f = f$; 存在一个向量 0 , 满足 $0 + f = f$; 对应于 f , 存在一个向量 $-f$, 满足 $-f + f = 0$.

赋范线性空间是一个线性空间，在其向量上定义了一个实值函数，称为范数，用 $\|\cdot\|$ 表示，具有性质：

- (i) $\|f\| > 0$ ，当 $f \neq 0$ 时 (正性)；
- (ii) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ (齐次性)；
- (iii) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (三角不等式)。

虽然巴拿赫(Banach)空间和希尔伯特(Hilbert)空间的概念在本书中起的作用不大，但是在此提到它们是合适的。巴拿赫空间是一个赋范线性空间，它满足完备性公理：

(iv) 若向量序列 $f_1, f_2, \dots$ 具有柯西性质，即 $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\| = 0$ ，则存在向量 g ，使 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\| = 0$ 。

然后我们能够指出，希尔伯特空间是一个巴拿赫空间，在该空间内成立平行四边形定律：

$$(v) \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2.$$

我们注意到，范数的性质(i)，(ii)，(iii)又是关于绝对值函数的熟知的事实，因此范数可以解释为广义的或抽象的长度。正如把 $|x-y|$ 看成是实数集中的距离一样，也将证明 $\|x-y\|$ 是在任何赋范线性空间中的一个距离。

定理 在赋范线性空间中，公式 $d(f, g) = \|f-g\|$ 定义一个距离。加法、数乘和范数都是在此距离下的连续函数。

证明 距离的性质(i)，(ii)，(iii)可立即得到验证： $d(f, f) = \|f-f\| = \|0 \cdot f\| = |0| \cdot \|f\| = 0$ ；若 $f \neq g$ ，则 $f-g \neq 0$ ，如此 $d(f, g) = \|f-g\| > 0$ ； $d(f, g) = \|f-g\| = |-1| \|f-g\| = \|g-f\| = d(g, f)$ ； $d(f, g) = \|f-g\| = \|f-h+h-g\| \leq \|f-h\| + \|h-g\| = d(f, h) + d(h, g)$ 。对于加法的连续性，我们有 $d(f^*+g^*, f_n+g_n) = \|f^*+g^-(f_n+g_n)\| \leq \|f^*-f_n\| + \|g^*-g_n\| = d(f^*, f_n) + d(g^*, g_n)$ 。这样，若 $g_n \rightarrow g^*$ 及 $f_n \rightarrow f^*$ ，则 $f_n +$

$g_n \rightarrow f^* + g^*$. 对于数乘的连续性, 有 $d(\lambda^* f^*, \lambda_n f_n) = \|\lambda^* f^* - \lambda_n f_n\| = \|\lambda^* f^* - \lambda^* f_n + \lambda^* f_n - \lambda_n f_n\| \leq |\lambda^*| \|f^* - f_n\| + |\lambda^* - \lambda_n| \|f_n\|$. 序列 $\|f_n\|$ 是有界的, 因为 $\|f_n\| \leq \|f_n - f^*\| + \|f^*\|$. 这样, 若 $\lambda_n \rightarrow \lambda^*$ 及 $f_n \rightarrow f^*$, 则 $\lambda_n f_n \rightarrow \lambda^* f^*$. 最后, $\|f\| \leq \|f - g\| + \|g\|$, 因此 $\|f\| - \|g\| \leq \|f - g\|$. 交换 f 和 g , 得到 $|\|f\| - \|g\|| \leq \|f - g\|$, 这就证明了 $\|f\|$ 的连续性. **】**

正如读者所知道的, 具有特殊重要性的一个线性空间是 n 维空间 R_n , 其向量为 n 元实数组 $f = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$, $g = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]$, 等等. 定义 $f + g = [\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n]$ 和 $\lambda f = [\lambda \xi_1, \dots, \lambda \xi_n]$. 可以用多种方式引进不同的范数使 R_n 成为赋范线性空间. 比如,

$$\|f\| = \max\{|\xi_1|, \dots, |\xi_n|\},$$

$$\|f\| = |\xi_1| + \dots + |\xi_n|.$$

这两种范数是下列范数族

$$\|f\| = \sqrt[p]{|\xi_1|^p + \dots + |\xi_n|^p} \quad (p \geq 1)$$

的对应于 $p = \infty$ 和 $p = 1$ 的情形. $p = 2$ 的情形即是所谓的“欧几里得”范数.

另一个特别重要的赋范线性空间是定义在区间 $[a, b]$ 上的连续实值函数空间 $C[a, b]$. 在此空间中定义:

$$\text{加法} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$\text{数乘} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$$\text{范数} \quad \|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

我们推荐给读者作为一个练习来验证 $C[a, b]$ 是一个赋范线性空间. 实际上, $C[a, b]$ 是巴拿赫空间, 这一点我们现在就来证明.

定理 空间 $C[a, b]$ 是完备的.

证明 设向量列 $f_1, f_2, \dots$ 具有柯西性质. 则对每个 $\varepsilon > 0$, 都存在一个 N , 使每当 $n, m \geq N$ 时, 总有 $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. 由该范数的定义得出, 对每一个固定的 x , 每当 $n, m \geq N$ 时 $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. 如此, 由柯西判别法, 实数列 $f_1(x), f_2(x), \dots$ 收敛到一个数, 可将它表成 $f(x)$ (因它依赖于 x). 此处我们利用了 R_1 是完备的这一事实, 这可从下面证明的推论中得出. 如果能证明 $f \in C[a, b]$, 定理的证明就完成了. 首先注意到, 在上述不等式中令 $m \rightarrow \infty$, 得到下列结果: 对每个 ε 都对应一个 n , 使对所有 x 都有 $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. 根据 f_n 在点 x_0 的连续性, 存在 $\delta > 0$, 只要 $|x_0 - y| < \delta$, 就有 $|f_n(x_0) - f_n(y)| < \varepsilon$. 这样, 对所有这些 y , 有

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(y)| &\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(y)| \\ &\quad + |f_n(y) - f(y)| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

由于 ε 是任意的, 故 f 在 x_0 连续. 因为 x_0 在 $[a, b]$ 中是任意的, 所以 f 在 $[a, b]$ 上连续. **■**

距离空间中关于紧性的几个基本准则在上一节已经引证. 赋范线性空间中可得到一个补充的准则, 即将在下面讨论. 赋范线性空间中的一个集合称为有界, 如果它包含在形如 $\{f: \|f\| \leq \alpha\}$ 的某个集合中.

引理 在范数为 $\|\lambda\| = \max |\lambda_i|$ 的 n 元数组 $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ 的空间中, 每一个有界闭集是紧集.

证明 首先对维数 n 进行归纳证明: 集合 $M_n = \{\lambda: \|\lambda\| \leq 1\}$ 是紧集. 由于 $M_1 = [-1, 1]$, 波尔察诺-维尔斯特拉斯定理(第2节)表明 M_1 为紧集. 现在来证若 M_n 为紧集, 将得出 M_{n+1} 为紧集. 事实上, 设 $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots$ 是 M_{n+1} 中的任一向量序列. 这些向量中的每一个都具有形式 $\lambda^{(k)} = [\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_{n+1}^{(k)}]$. 因为这些向量的所有分量都位于 $[-1, 1]$ 内, 所以, 如有必要

可过渡到子序列, 可以假定, $\lambda_{n+1}^{(k)}$ 当 $k \rightarrow \infty$ 时收敛. 按 M_n 是紧集的假设, 可以过渡到更进一步的子序列, 使 $\lambda^{(k)}$ 的前 n 个分量也收敛. 若所有的分量都收敛, 则向量本身收敛. 因此 M_{n+1} 为紧集. 今设 F 是 n 维空间的任意一个有界闭集. 那么对某个 c , cM_n 包含 F . 由于映射 $\lambda \rightarrow c\lambda$ 连续, 因此 cM_n 是紧集(第6页定理). 因为 F 是紧集的一个闭子集, 所以它也是紧集(第6页定理). **】**

定理 赋范线性空间中的每一个有限维的有界闭集是紧集.

证明 设 F 是这样的集合. 则存在一个线性无关集 $\{g_1, \dots, g_n\}$ 具有以下性质: 每个元素 $f \in F$ 都可唯一地表成 $f = \sum \lambda_i g_i$ 的形式. 以 T 表示映射 $\lambda \rightarrow f$. 若将 n 维空间赋以范数 $\|\lambda\| = \max |\lambda_i|$, 由于 $\|T\lambda - T\mu\| = \|\sum \lambda_i g_i - \sum \mu_i g_i\| = \|\sum (\lambda_i - \mu_i) g_i\| \leq \sum |\lambda_i - \mu_i| \|g_i\| \leq \|\lambda - \mu\| \sum \|g_i\|$, 则 T 是连续的. 集合 F 是集合 $M = \{\lambda: T\lambda \in F\}$ 在映射 T 之下的映象. 按第6页的定理, F 的紧性可由 M 的紧性得出. 由上面的引理, 只须证明 M 是闭的及有界的. 若 $\lambda^{(k)} \in M$ 及 $\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda$, 则 $T\lambda = T(\lim \lambda^{(k)}) = \lim T(\lambda^{(k)})$. 由于 F 是闭的, 因此 $T\lambda \in F$, 由此 $\lambda \in M$. 这证明了 M 是闭的. 现在证明 M 是有界的. 既然集合 $\{\lambda: \|\lambda\| = 1\}$ 是紧的而 T 是连续的, 故 $\|T\lambda\|$ 的下确界 α 在该集合上能取到. 由于 $\{g_1, \dots, g_n\}$ 线性无关, 从而 $\alpha > 0$. 这样, 对任何 $\lambda \neq 0$, 有 $\|T\lambda\| = \|T(\lambda/\|\lambda\|)\| \cdot \|\lambda\| \geq \alpha \|\lambda\|$. 因为 $\|T\lambda\|$ 在 M 上有界, 所以 $\|\lambda\|$ 在 M 上有界. **】**

推论 每个有限维赋范线性空间是完备的.

证明 设 $\{f_n\}$ 是这样的空间中的任一柯西序列. 则它必有界, 因为若取指标 N 使

$$n \geq N \Rightarrow \|f_n - f_N\| \leq 1,$$

这时不等式 $\|f_n\| \leq \|f_n - f_N\| + \|f_N\|$ 表明 $\|f_n\| \leq 1 + \max_{k \leq N} \|f_k\| \equiv M$. 据集合 $\{f: \|f\| \leq M\}$ 的紧性, 序列 $\{f_n\}$ 含有一个收敛子列 f_{n_k} , 其极限比方说是 f^* . 从不等式 $\|f_n - f^*\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f^*\|$ 及柯西性质, 得出 $f_n \rightarrow f^*$.]

习 题

1. 证明范数的下列性质: (a) $\|0\| = 0$; (b) $\|f+g\| \geq |\|f\| - \|g\||$; (c) 若 $\|f_n - g\| \rightarrow 0$ 及 $\|f_n - h\| \rightarrow 0$, 则 $g = h$; (d) $\left\| \sum_{n=1}^m f_n \right\| \leq \sum_{n=1}^m \|f_n\|$; (e) 若 f 有范数 $\lambda \neq 0$, 则 f/λ 有范数 1.
2. 证明下列各式为 R_n 上的范数: (a) $\|f\|_T = \max_k |\xi_k|$, (b) $\|f\|_1 = \sum |\xi_k|$.
3. 参考诸如 [Hardy, Littlewood, Pólya, 1934] 的书, 查出闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

的证明, 这里 $\|f\|_p = (\sum |\xi_k|^p)^{1/p}$.

4. 证明: 可用等式 $\|f\| = \max_x |f(x)|$ 来定义 $C[a, b]$ 上的一个范数.
5. 在 $C[a, b]$ 中, $\|f_n - g\| \rightarrow 0$ 当且仅当 f_n 一致收敛于 g ; 即, 对每个 $\varepsilon > 0$, 都对应一个 N , 使对所有 x , $n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$.
6. 对于函数列的点态收敛是否存在一个范数? 提示: 考虑图形如下图的那些函数.



7. 在集合 $G \subset R_n$ 上求出一个必要且充分的条件, 可使 $N(f) =$