总主编　单墫　熊斌

奥数教程（第四版）

·六年级·　学习手册

本册主编　杭顺清
参编者　庄国志　郭凯福

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程学习手册.六年级/杭顺清主编.—上海:华东师范大学出版社,2007.3
ISBN 978-7-5617-5284-5

Ⅰ.奥…　Ⅱ.杭…　Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 039099 号

奥数教程（第四版）
学习手册
·六年级·

总 主 编　单　墫　熊　斌
本册主编　杭顺清
策划组稿　倪　明　徐　金
文字编辑　段贵霞
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电　　话　021-62450163 转各部　行政传真 021-62572105
网　　址　www.ecnupress.com.cn　www.hdsdbook.com.cn
市 场 部　传真 021-62860410　021-62602316
邮购零售　电话 021-62869887　021-54340188

印 刷 者　江苏省常熟市文化印刷有限公司
开　　本　890×1240　32 开
印　　张　6.5
字　　数　171千字
版　　次　2007 年 6 月第一版
印　　次　2007 年 6 月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5617-5284-5/G·3104
定　　价　9.50元

出 版 人　朱杰人

著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生致青少年数学爱好者

致 读 者

《奥数教程》的出版已有七八个年头了.在这个过程中,包含了作者和编辑的辛勤劳作,更多的是让我们感到欣慰.这套书,曾荣获了第十届全国教育图书展的优秀畅销书奖;香港现代教育研究社出版了她的繁体字版和网络版,并成为香港的畅销图书之一,并因此获得了版权输出奖;据北京开卷图书市场研究所的监控销售数据,近几年《奥数教程》的销量名列同类书前茅,尤其是初一和高一分册分别获得数学竞赛图书初中段和高中段的第一.这些成绩的取得与作者们精到的创作,广大读者的支持、呵护是分不开的.

为了使《奥数教程》更健康、更成熟地发展,为了使学生的学习生活更主动、更有效,不断提高图书的质量,我们差不多每两年修订一次,现在已经是第四版了.应广大读者的要求,方便读者自学,为四年级至九年级出版了相应的“学习手册”.如果将“学习手册”与“教程”配套使用,收效一定更佳.

四五年前,我们开展了“有奖订正”和“巧解共享”两项活动,得到了读者的支持与配合,不少读者纷纷来信、来电提出订正意见和更好的解法.这是对我们的鼓励,更是对我们的鞭策.我们计划继续开展下列活动,希望有更多的读者朋友乐于参与.

一、有奖订正

2007 年 9 月到 2008 年 8 月期间,欢迎读者朋友对《奥数教程》(第四版,12 册),提出改正意见,我们将对“纠错能手”给予奖励.

二、巧解共享

欢迎读者朋友对《奥数教程》中例题与习题,提供更巧妙的解法.我们将选择有新意的、合适的解法在网上公布,以与其他读者朋友共享.凡在修订时被采用者,我们将署上提供者的姓名,并支付相应的稿酬.

我们衷心祝愿《奥数教程》永远成为您的好朋友.

华东师范大学出版社

前　言

据说在很多国家，特别是美国，孩子们害怕数学，把数学作为“不受欢迎的学科”. 但在中国，情况很不相同，很多少年儿童喜爱数学，数学成绩也都很好. 的确，数学是中国人擅长的学科，如果在美国的中小学，你见到几个中国学生，那么全班数学的前几名就非他们莫属.

在数(shǔ)数(shù)阶段，中国儿童就显出优势.

中国人能用一只手表示 1～10，而很多国家非用两只手不可.

中国人早就有位数的概念，而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有 12 进制，60 进制的残余).

中国文字都是单音节，易于背诵，例如乘法表，学生很快就能掌握，再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”. 但外国人，一学乘法，头就大了. 不信，请你用英语背一下乘法表，真是佶屈聱牙，难以成诵.

圆周率 $\pi=3.14159\cdots$. 背到小数后五位，中国人花一两分钟就够了. 可是俄国人为了背这几个数字，专门写了一首诗，第一句三个单词，第二句一个，……要背 π 先背诗，这在我们看来简直是自找麻烦，可他们还作为记忆的妙法.

四则运算应用题及其算术解法，也是中国数学的一大特色. 从很古的时候开始，中国人就编了很多应用题，或联系实际，或饶有兴趣，解法简洁优雅，机敏而又多种多样，有助于提高学生的学习兴趣，启迪学生的智慧. 例如：

“一百个和尚一百个馒头，大和尚一个人吃三个，小和尚三个人吃一个，问有几个大和尚，几个小和尚？”

外国人多半只会列方程解. 中国却有多种算术解法，如将每个大和尚“变”成 9 个小和尚，100 个馒头表明小和尚是 300 个，多出 200 个和尚，是由于每个大和尚变小和尚，多变出 8 个，从而 $200\div8=25$ 即是大和尚人数. 小和尚自然是 75 人，或将一个大和尚与 3 个小和尚编成一组，平均每人吃一个馒头. 恰好与总体的平均数相等. 所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少，即大和尚是 $100\div(3+1)=25$(人).

中国人善于计算，尤其善于心算.古代还有人会用手指计算（所谓“掐指一算”）.同时，中国很早就有计算的器械，如算筹、算盘.后者可以说是计算机的雏形.

在数学的入门阶段——算术的学习中，我国的优势显然，所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科.

几何推理，在我国古代并不发达（但关于几何图形的计算，我国有不少论著），比希腊人稍逊一筹.但是，中国人善于向别人学习.目前我国中学生的几何水平，在世界上遥遥领先.曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班，他们认为所教的几何内容太深，学生不可能接受，但听课之后，不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解，而且掌握得很好.

我国数学教育成绩显著.在国际数学竞赛中，我国选手获得众多奖牌，就是最有力的证明.从1986年我国正式派队参加国际数学奥林匹克以来，中国队已经获得了12次团体冠军，可谓是成绩骄人.当代著名数学家陈省身先生曾对此特别赞赏.他说：“今年一件值得庆祝的事，是中国在国际数学竞赛中获得第一.……，去年也是第一名.”（陈省身1990年10月在台湾成功大学的讲演“怎样把中国建为数学大国”）

陈省身先生还预言：“中国将在21世纪成为数学大国.”

成为数学大国，当然不是一件容易的事，不可能一蹴而就，它需要坚持不懈地努力.我们编写这套丛书，日的就是：(1)进一步普及数学知识，使数学为更多的青少年喜爱，帮助他们取得好的成绩；(2)使喜爱数学的同学得到更好地发展，通过这套丛书，学到更多的知识和方法.

“天下大事，必作于细.”我们希望，而且相信，这套丛书的出版，在使我国成为数学大国的努力中，能起到一点作用.本丛书初版于2000年，现根据课程改革的要求对各册再作不同程度的修订.

著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问，并为青少年数学爱好者题词，我们表示衷心的感谢.还要感谢华东师范大学山版社及倪明先生，没有他们，这套丛书不会是现在这个样子.

单墫 熊斌

2007年5月

目　　录

习题详细解答

竞赛热点精讲

全真赛题热身

第 1 讲

分数的计算

1 **原式** $=(9+8+\cdots+4)-\frac{16}{39}\times(9+8+\cdots+4)$

$=(9+8+\cdots+4)\times\left(1-\frac{16}{39}\right)$

$=39\times\frac{23}{39}=23.$

2 **原式** $=1.25\times 88\frac{6}{15}\times 8-125\%\times 78\frac{2}{3}\times 8+$

$8\times\frac{1}{3}\times 1\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times 3\frac{1}{3}$

$=(1.25\times 8)\times\left(88\frac{6}{15}-78\frac{10}{15}\right)+\frac{10}{3}+\frac{4}{3}$

$=10\times 9\frac{11}{15}+4\frac{2}{3}=90+\frac{22}{3}+4\frac{2}{3}=102.$

3 **原式** $=1\times 11+\frac{7}{33}\times(1+2+3+\cdots+11)=25.$

4 **原式** $=70\times\frac{6}{7}+\frac{7}{6}\times\frac{6}{7}+60\times\frac{5}{6}+\frac{6}{5}\times\frac{5}{6}+$

$50\times\frac{4}{5}+\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}+40\times\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}+$

$30\times\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=205.$

5 **把分母相同的编为一组，得分母为 1 那组分数的和是 1，分母为 2 的那一组分数的和是 2，分母为 3 的那一组和为 3，……分母为 1995 的那一组分数的和是 1995. 所以原式** $=1+2+3+\cdots+1994+1995=(1+1995)\times 1995\div 2=1\,991\,010.$

6 **因为** $1-\frac{1}{1995^2}=\left(1+\frac{1}{1995}\right)\times\left(1-\frac{1}{1995}\right)=\frac{1996}{1995}\times\frac{1994}{1995}$，$1-\frac{1}{1994^2}=\left(1+\frac{1}{1994}\right)\times\left(1-\frac{1}{1994}\right)=\frac{1995}{1994}\times\frac{1993}{1994}$，…$1-\frac{1}{2^2}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}$，**所以原式** $=2\times\left(\frac{1996}{1995}\times\frac{1995}{1994}\times\frac{1994}{1993}\times\cdots\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{1994}{1995}\times\frac{1993}{1994}\times\frac{1992}{1993}\times\cdots\times\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1996}{2}\times\frac{1}{1995}=1\frac{1}{1995}$.

7 **原式**

$$
\begin{aligned}
&=\left[1949\times\left(\frac{1}{47}-\frac{1}{1996}\right)+\frac{1949}{1949}\right]+\left[47\times\left(\frac{1}{1949}-\frac{1}{1996}\right)+\frac{47}{47}\right]-\left[1996\times\left(\frac{1}{1949}+\frac{1}{47}\right)-\frac{1996}{1996}\right]+1000\\
&=1949\times\left(\frac{1}{47}-\frac{1}{1996}+\frac{1}{1949}\right)+47\times\left(\frac{1}{1949}-\frac{1}{1996}+\frac{1}{47}\right)-1996\times\left(\frac{1}{1949}+\frac{1}{47}-\frac{1}{1996}\right)+1000=\left(\frac{1}{1949}+\frac{1}{47}-\frac{1}{1996}\right)\times(1949+47-1996)+1000\\
&=\left(\frac{1}{1949}+\frac{1}{47}-\frac{1}{1996}\right)\times 0+1000=1000.
\end{aligned}
$$

8 **设** $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}=A$.

原式

$$
\begin{aligned}
&=A^2+\frac{1}{2}A-(1+A)\times\left(A-\frac{1}{2}\right)\\
&=A^2+\frac{1}{2}A-\left(A-\frac{1}{2}+A^2-\frac{1}{2}A\right)\\
&=A^2+\frac{1}{2}A-A+\frac{1}{2}-A^2+\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

9 因为式中 $3\frac{7}{8}-3.875=0$，所以原式等于 0.

10 原式 $=\frac{11+21+31+41+51+61+71+81}{90}$

$=\frac{368}{90}=4\frac{4}{45}.$

11 原式 $=1\div\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}\div\frac{4}{5}\div\frac{5}{6}\div\frac{6}{7}\div\frac{7}{8}\div\frac{8}{9}$

$=1\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times\frac{7}{6}\times\frac{8}{7}\times\frac{9}{8}$

$=\frac{9}{2}=4.5.$

12 原式 $=6\div\left\{\left[1-\frac{1}{3}-\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}\right]\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\right\}$

$=6\div\left\{\frac{4}{9}\times\frac{3}{4}\right\}=18.$

13 设原式为 S，利用错位相减法，得：$3S-S=3-\frac{1}{3^{100}}$，所以 $S=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^{100}}\right).$

14 原式 $=\left(1+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(1+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{98}-\frac{1}{100}\right)=47+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{100}\right)=47\frac{47}{300}$.（因为 7 到 99 有 47 个奇数）

15 将同分母的项相加，当 $2\leqslant n\leqslant 60$ 时，$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}[1+2+3+\cdots+(n-1)]=\frac{n-1}{2}$，所以原式 $=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{59}{2}=\frac{1}{2}\times(1+2+3+\cdots+59)=885.$

第 2 讲

分数的大小比较

1 (1) $\frac{579}{580}=1-\frac{1}{580}$, $\frac{44}{45}=1-\frac{1}{45}$, $\frac{1652}{1653}=1-\frac{1}{1653}$,因为$\frac{1}{45}>\frac{1}{580}>\frac{1}{1653}$,所以 $1-\frac{1}{45}<1-\frac{1}{580}<1-\frac{1}{1653}$,所以$\frac{44}{45}<\frac{579}{580}<\frac{1652}{1653}$.

(2) $\frac{777}{9999}=0.\dot{0}77\dot{7}$, $\frac{7777}{99\,999}=0.\dot{0}77\,7\,\dot{7}$, $0.\dot{0}77\dot{7}<0.\dot{0}77\,7\dot{7}$;
$\frac{777+7777}{9999+99\,999}=0.077\,765<0.\dot{0}77\,7\dot{7}$,所以

$$\frac{777}{9999}<\frac{777+7777}{9999+99\,999}<\frac{7777}{99\,999}.$$

2 $\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$, $\frac{17}{11}=1\frac{6}{11}$, $\frac{8}{7}=1\frac{1}{7}$,因为$\frac{1}{15}<\frac{1}{7}<\frac{6}{11}$,所以$\frac{16}{15}<\frac{8}{7}<\frac{17}{11}$;又$\frac{7}{9}<\frac{7}{8}$, $\frac{2}{3}<\frac{4}{5}$,且$\frac{2}{3}<\frac{7}{9}$, $\frac{4}{5}<\frac{7}{8}$,所以$\frac{2}{3}<\frac{7}{9}<\frac{4}{5}<\frac{7}{8}<\frac{16}{15}<\frac{8}{7}<\frac{17}{11}$.

3 由 $\frac{185}{1994}<\frac{37}{\square}$,得 $\square\leqslant 398.8$,由$\frac{37}{\square}<2$,得 $\square>18.5$,综合得到 $19\leqslant\square\leqslant 398$. 所以可填的数共有 $398-19+1=380$(个). 这些数的平均数是 $(19+398)\div 2=208.5$.

4 因为 $\frac{43^{2001}}{43^{2000}}=43>0$,即 $43^{2001}>43^{2000}$,所以

$$\frac{43^{2001}}{43^{2000}}<\frac{43^{2001}-2001}{43^{2000}-2001}.\ \left(a>b\text{ 时},\frac{a}{b}<\frac{a-k}{b-k},\ k<b\right)$$

5 $\frac{35\,861}{35\,862}=1-\frac{1}{35\,862}$，$\frac{52\,971}{52\,974}=1-\frac{3}{52\,974}$.

因为$\frac{1}{35\,862}<\frac{3}{52\,974}$，**所以** $1-\frac{1}{35\,862}>1-\frac{3}{52\,974}$，**所以**

$$\frac{35\,861}{35\,862}>\frac{52\,971}{52\,974}.$$

6 **如同第** 5 **题的方法得**：$\frac{98}{99}<\frac{987}{988}<\frac{9876}{9877}<\frac{98\,765}{98\,766}$.

7 $\frac{1}{11}+\frac{1}{33}=\frac{4}{33}$，$\frac{4}{33}$**的倒数** 8.25；

$\frac{1}{12}+\frac{1}{29}=\frac{41}{348}$，$\frac{41}{348}$**的倒数** 8.49；

$\frac{1}{13}+\frac{1}{25}=\frac{38}{325}$，$\frac{38}{325}$**的倒数** 8.55；

$\frac{1}{14}+\frac{1}{21}=\frac{5}{42}$，$\frac{5}{42}$**的倒数** 8.40.

因为 $8.25<8.40<8.49<8.55$，**所以**

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{33}>\frac{1}{14}+\frac{1}{21}>\frac{1}{12}+\frac{1}{29}>\frac{1}{13}+\frac{1}{25}.$$

8 ① $\frac{22\,222\,421}{44\,444\,844}=\frac{22\,222\,422}{44\,444\,844}-\frac{1}{44\,444\,844}$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{44\,444\,844},$$

$\frac{22\,222\,341}{44\,444\,684}=\frac{22\,222\,342}{44\,444\,684}-\frac{1}{44\,444\,684}=\frac{1}{2}-\frac{1}{44\,444\,684}$.

因为 $\frac{1}{44\,444\,684}>\frac{1}{44\,444\,844}$，**所以**$\frac{22\,222\,342}{44\,444\,684}-\frac{1}{44\,444\,684}<\frac{22\,222\,422}{44\,444\,844}-\frac{1}{44\,444\,844}$，**所以** $\frac{22\,222\,341}{44\,444\,684}<\frac{22\,222\,421}{44\,444\,844}$.

② $\frac{22\,222\,421}{22\,222\,341}$**和**$\frac{44\,444\,844}{44\,444\,684}$**与上面的结论比较，发现两个分数的分母与分子交换了位置，根据比例的性质得**：

$$\frac{22\,222\,421}{22\,222\,341}>\frac{44\,444\,844}{44\,444\,684}.$$

9 这五个分数的倒数分别是

$$51\frac{9}{10},\ 51\frac{11}{14},\ 51\frac{11}{15},\ 51\frac{17}{21},\ 51\frac{29}{35}.$$

因为 $\frac{9}{10} > \frac{29}{35} > \frac{17}{21} > \frac{11}{14} > \frac{11}{15}$,所以

$$\frac{10}{519} < \frac{35}{1814} < \frac{21}{1088} < \frac{14}{725} < \frac{15}{776}.$$

10 $A = 9.86 + \frac{9.86}{987}$, $B = 8.75 + \frac{8.75}{876}$.

A 的整数部分大于 B 的整数部分,所以 A 较大.

11 每个分数都写成 $1 - \frac{1}{n}$, 由于 $\frac{1}{1996}$ 均大于其他三个分数单位,所以 $\frac{1995}{1996}$ 是这四个分数中最小的.

12 由 $\frac{1}{A} = 4 + \frac{234}{1\,234\,567} = 4 + \frac{468}{2\,469\,134}$,

$$\frac{1}{B} = 4 + \frac{468}{3\,456\,789}, \text{知} \frac{1}{A} > \frac{1}{B}.$$

所以 $A < B$, 即 B 比 A 大.

13 因为 $\frac{2001^{2002}}{2002^{2001}} = \left(\frac{2001}{2002}\right)^{2001} \times 2001$

$$
\begin{aligned}
& > (0.999)^{2001} \times 2001 \\
& = 0.998\,001^{1000} \times 0.999 \times 2001 \\
& > (0.998)^{1000} \times 0.999 \times 2001 \\
& > (0.996)^{500} \times 0.999 \times 2001 \\
& > (0.992)^{250} \times 0.999 \times 2001 \\
& > (0.984)^{125} \times 2000 \cdots \\
& > 0.2 \times 780 > 1,
\end{aligned}
$$

所以
$$\frac{2001^{2002}}{2002^{2001}} > \frac{2001^{2002} + 2002}{2002^{2001} + 2002}.$$

14 原式 $= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots +$

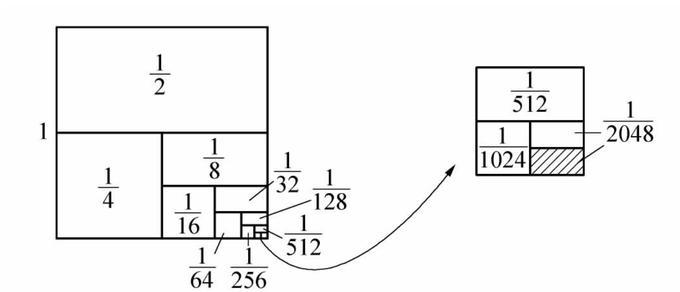
$\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$，$1-\frac{1}{n+1}>\frac{1921}{2001}$，$\frac{80}{2001}>\frac{1}{n+1}$，$n+1>\frac{2001}{80}$，$n>24\frac{1}{80}$，**所以 n 最小等于** 25.

15 满足条件的分数有$\frac{13}{31}$，$\frac{17}{71}$，$\frac{37}{73}$，$\frac{79}{97}$，$\frac{17}{71}<\frac{13}{31}<\frac{37}{73}<\frac{79}{97}$.

第 3 讲

巧算分数的和

1 **原式** $=\frac{1}{2048}$. **用图解表示如下：**



阴影部分即为所求.

2 **原式** $=\frac{1}{8}\times 64+\frac{64}{24}+\frac{64}{48}+\frac{64}{80}+\frac{64}{120}+\frac{64}{168}+\frac{64}{224}$

$=8+\frac{8}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{5}+\frac{8}{15}+\frac{8}{21}+\frac{2}{7}=14.$

3 **原式** $=(1+3+5+7+9+11)+\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)\right]\times\frac{1}{2}$

$=36+\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right]\times\frac{1}{2}=36\frac{2}{15}.$

4 **原式** $=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{17}\right)+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{22}\right)+\left(\frac{1}{22}-\frac{1}{27}\right)+\left(\frac{1}{27}-\frac{1}{32}\right)$