奥数典型题

举一反三

长春出版社

图书在版编目（CIP）数据

奥数典型题举一反三．小学六年级/单墫主编—长春：长春出版社，2006．6
ISBN 7-80664-230-7

Ⅰ．奥... Ⅱ．单... Ⅲ．数学-小学-教学参考资料
Ⅳ．G624．246
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 049799 号

责任编辑：杨爱萍
封面设计：郝　威

出版发行：长春出版社　　总编室电话：0431-8563443
发行部电话：0431-8561180　读者服务部电话：0431-8561177
地　　址：吉林省长春市建设街 1377 号
邮　　编：130061
网　　址：www.cccbs.net
制　　版：长春国栋文化传播中心
印　　刷：吉林省吉育印业有限公司
经　　销：新华书店

开　　本：880×1230　　32 开
字　　数：280 千字
印　　张：9.5
版　　次：2006 年 6 月第 1 版　2006 年 9 月第 3 次印刷
印　　数：1-10 000 册
定　　价：11.00 元

丛书主编　单　墫
本册主编　张鸿亮
编　　委　陆　俊　张海宁　吴　白
　　　　　黄宝兴　陈丽军　刘英俊
　　　　　白树仁　夏　博　陶　然
　　　　　陈泳红

编写说明

全国小学生数学奥林匹克竞赛是当前我国在小学生中开展素质教育的最高层次的学科知识竞赛。它注重能力的考核，内容广泛，命题新颖，思路开阔，对学生创新能力的培养和发散思维的训练具有极强的指导作用。近几年的全国各省市小学数学奥赛试题，都强调了紧扣新课标要求，与小学数学教学内容相结合的命题特点。因此掌握奥数试题的解题思路和答题技巧，不但对参加奥数、奥赛学有余力的同学培养冲刺竞赛奖牌的能力很有帮助，就是对一般学生补充深化课本知识、开拓思维也大有裨益。

为此我们编写了这套《奥赛典型题举一反三》丛书，本书具有以下特点：

1. **权威性**

丛书总主编单墫为国家著名奥赛教练员，南京师范大学教授，博士生导师。曾任国家数学奥赛教练组组长，中国数学奥林匹克代表队领队。全书所有参加编写的人员都是国家、省级奥赛优秀教练员，有着丰富的奥赛指导经验和奥赛图书编写经验，它们指导的学生在各种竞赛中都取得了优异的成绩。

2. **系统性**

本书不同于一般的竞赛试题汇编和单纯的方法讲解，而是将所学内容按竞赛中常见的典型题归纳整理，由浅入深、循序渐进。读者通过对典型题的学习，举一反三即可系统掌握所学内容。

3. **全面性**

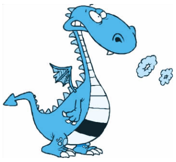
⑴ 能力培养全。本书对学生的思维能力、实验能力、观察检测能力、想象能力、自学能力等多方面能力进行培养训练，全面开发学生智力。 ⑵ 题型收录全。本书类型齐全，覆盖面广，全书悉数收入数学奥赛的热点题、开放题、经典题、与 STS 联系题，以拓宽学生视野，开拓学生思路。 ⑶ 解答提示全。本书不但对精选的典型例题有详尽的分析解答，对一般习题也有详尽的解答提示，便于学生自学、自测。

4. **实用性**

本书各章节编排与小学教学内容同步，编排科学、体例新颖。全书均设有 ⑴ 知识 · 规律 · 方法。归纳知识要点，总结一般规律，提炼基本方法。 ⑵ 范例 · 解析 · 拓展。精选典型范例，深入分析讲解，纵向思维拓展。 ⑶ 检测 · 反 * 馈 · 应用。选编一定量的与本章内容密切相关、难度适中、有较好区分度的习题，检测知识掌握情况，提高解题能力。 ⑷ 思路 · 点拨 · 详解。为师、生讲解练习之用，附详细解题过程，点拨思路、指导方法，每份试题实际上就是名师的辅导。书后所附的模拟试卷是在认真研究了近几年全国数学奥赛试题的指导思想、命题特点、题型配置的基础上精心设计的，供学生在复习训练结束时自我检测。

限于我们的水平，书中疏漏之处恐难避免，恳请各位读者批评批正。

编　者



第一章 数与计算

第一单元　同余问题

知识·规律·方法

1. **知识前提。**

(1) **整除** 如果整数 a 除以自然数 b，所得的商恰好是整数而没有余数（余数为 0），我们就称 a 能被 b 整除或 b 能整除 a。

(2) **乘方的意义** 求 n 个相同因数的乘积的运算，叫做乘方，乘方的结果叫做幂。n 个相同因数 a 相乘，即 $\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n个a}$，记做 a^n。其中 a 叫做底，n 叫做指数，a^n 读做 a 的 n 次方。

(3) **幂的运算法则：**

①同底数的幂相乘，底数不变，指数相加。即

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$。

②幂的乘方，底数不变，指数相乘。即

$(a^n)^m = a^{mn}$。

③积的乘方，等于把积的每一个因数分别乘方，再把所得的幂相乘。即 $(ab)^n = a^n \cdot b^n$。

2. **同余。**

如果两个整数 a、b 除以同一个自然数 m 所得的余数相同，那么就说

a、b 对于 m 是同余的，记为 a = h (modm)。我们把 m 称为模。如果 a、b 对于 m 是同余的，那么 a 与 b 的差能被 m 整除；反之，如果 a 与 b 的差能被 m 整除，那么 a、b 对于 m 是同余的。

3. 规律、方法应用。

(1) 反身性规律：a 和 a 对于 m 同余。

(2) 对称性规律：a 和 b 对于 m 同余，那么 b 和 a 对于 m 同余。

(3) 传递性规律 如果 a 和 b 对于 m 同余，b 和 c 对于 m 同余，那么 a 和 c 对于 m 同余。

(4) 同余的加减法、乘法规律 如果 a 和 b 对于 m 同余，c 和 d 对于 m 同余，那么 $a+c$ 和 $b+d$，$a-c$ 和 $b-d$，ac 和 bd 对于 m 同余。

(5) 同余的乘方规律 如果 a 和 b 对于 m 同余，那么 a^n 和 b^n 也对于 m 同余。

(6) 同余的连加规律：a_1 和 b_1 对于 m 同余，a_2 和 b_2 对于 m 同余，a_3 和 b_3 对于 m 同余……a_n 和 b_n 对于 m 同余，那么 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 和 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$ 也对于 m 同余。

范例·解析·拓展

例 1 有一个不等于 1 的整数，它除 300，262，205 得到的余数相同，这个整数是多少？

解析 由于同一个数去除 300，262，205 得到的余数相同，因此所求的整数一定能整除 300，262，205 两两相减的差。$300-262=38=2\times19$，$262-205=57=3\times19$，$300-205=95=5\times19$，这些差的公约数 19 就是所求的整数。

拓展一 如果某数除 492，2241，3195 都余 15，那么这个数是几？

答案提示 因为 $492-15=477=3\times3\times53$，$2241-15=2226=2\times3\times7\times53$，$3195-15=3180=2\times2\times3\times5\times53$，相同的因数是 3 和 53，3 比 15 小，所以这个整数是 53 或 $53\times3=159$。

拓展二　自然数 16520，14903，14177 除以 m 的余数相同，m 的最大值是多少？

答案提示　因为 16520、14903、14177 对于 m 同余，所以这三个数两两相减的差对于 m 也同余，

$14903-14177=726=2\times3\times11\times11$

$16520-14903=1617=3\times7\times7\times11$

$16520-14177=2343=3\times11\times71$

比较上面三个差的质因数，可以发现，m 应该是这些差共有的质因数的积，所以 m 的最大值为 $3\times11=33$。

拓展三　若 2836，4582，5164，6522 这 4 个数被同一个数相除，所得的余数相同且为两位数，则除数和余数的和为多少？

答案提示　设除数为 A。因为 2836，4582，5164，6522 除以 A 的余数相同，所以它们两两之差必能被 A 整除。又因为余数是两位数，所以 A 至少是两位数：

$4582-2836=1746$，

$5164-4582=582$，

$6522-5164=1358$。

因为 (1746，582，1358) $=194$，所以 A 是 194 大于 10 的约数，194 的大于 10 的约数只有 97 和 194，如果 $A=194$，$2836\div194=14\cdots\cdots120$，余数不是两位数，与题意不符 如果 A 是 97，经检验，余数都是 23，符合题意 ;因此除数与余数的和为 $97+23=120$。

例 2　求 2003×59 除以 7 的余数。

解析　因为 2003 除以 7 的余数是 1，59 除以 7 的余数是 3，根据 2003×59 除以 7 的余数应该与 2003、59 分别除以 7 的余数的积再除以 7 的余数相同，因为两个余数 $1\times3=3$，3 除以 7 的余数仍为 3，所以 2003×59 除以 7 的余数也是 3。

拓展一　求 $1871\times253\times1594$ 除以 13 的余数。

答案提示　1871 除以 13 的余数是 12，253 除以 13 的余数是 6，1594

除以 13 的余数是 8，所以 $1871 \times 253 \times 1594$ 除以 13 的余数与 $12 \times 6 \times 8$ 除以 13 的余数相同。$12 \times 6 \times 8 = 12 \times 48$，12 除以 13 的余数是 12，48 除以 13 的余数是 9，所以 $12 \times 6 \times 8$ 除以 13 的余数与 12×9 除以 13 的余数相同。$12 \times 9 = 108$ 除以 13 的余数是 4，由此可知，$1871 \times 253 \times 1594$ 的乘积除以 13 的余数也是 4。

拓展二　求 $2814 \times 323 + 3875 \times 2413 - 289 \times 786$ 除以 11 的余数。

答案提示　2814 除以 11 的余数是 9，323 除以 11 的余数是 4，3875 除以 11 的余数是 3，2413 除以 11 的余数是 4，289 除以 11 的余数是 3，786 除以 11 的余数是 5，因此，$2814 \times 323 + 3875 \times 2413 - 289 \times 786$ 除以 11 的余数与 $9 \times 4 + 3 \times 4 - 3 \times 5 = 33$ 除以 11 的余数相同。而 33 除以 11 的余数是 0（正好整除），所以 $2814 \times 323 + 3875 \times 2413 - 289 \times 786$ 除以 11 的余数也是 0。

拓展三　求 $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 + 6^6 + 7^7 + 8^8 + 9^9$ 的结果除以 3 的余数。

答案提示　(1) 3 的倍数的任何次方（0 除外）除以 3 的余数都为 0，由此可知，$3^3 + 6^6 + 9^9$ 除以 3 的余数为 0；

(2) 不是 3 的倍数的偶次方除以 3 的余数为 1，可知 2^2、4^4、8^8 分别除以 3 的余数都是 1；

(3) 剩下的 1^1 除以 3 余 1；5^5 与 2^5 对于 3 同余，它们除以 3 余 2；7^7 与 1^7 对于 3 同余，它们除以 3 余 1。

因为 $(1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1)$ 除以 3 的余数是 1，所以 $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 + 7^7 + 8^8 + 9^9$ 除以 3 的余数也是 1。

拓展四　把 1 至 2002 这 2002 个自然数依次写下来，得到一个多位数 A = 1234…200020012002，试求 A 除以 9 的余数

答案提示　因为一个数除以 9 的余数与这个数的各位数字之和除以 9 的余数相同，所以

$$A \equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + 7 + 8 + 9 + (1 + 0) + (1 + 1) + \cdots + (2 + 0 + 0 + 0) + (2 + 0 + 0 + 1) + (2 + 0 + 0 + 2)$$

$$\equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + 2001 + 2002$$

$\equiv 1001\times 2003$

$\equiv(1+0+0+1)\times(2+0+0+3)\equiv 1\ (\text{mod}9)$

所以 A 除以 9 的余数为 1。

例 3　10^{100}被 7 除的余数是多少？

解析　10 和 3 对于 7 同余，故 10^2 和 3^2 对于 7 同余。由于 $3^2=9$ 和 2 对于 7 同余，10^2 和 2 对于 7 同余，因此 $(10^2)^3$ 和 2^3 对于 7 同余，得 10^6 和 8 和 1 对于 7 同余。

由于 $100=96+4$。因此 $(10^6)^{16}$和 1^{16}对于 7 同余，得 10^{96}和 1 对于 7 同余。

又由于 $(10^2)^2$ 和 2^2 对于 7 同余，即 10^4 和 4 对于 7 同余。

所以 $10^{96}\times 10^4$和 1×4 对于 7 同余，也就是 10^{100}和 4 对于 7 同余。

由此可知，10^{100}被 7 除的余数是 4。

拓展一　2^{1000}除以 13 的余数是多少？

答案提示　2^4和 3 对于 13 同余，考虑到被除数要大于除数 13，所以 $(2^4)^3$和 3^3对于 13 同余，也就是 2^{12}、27、1 对于 13 同余。

又因为 $1000=12\times 83+4$，所以 $(2^{12})^{83}$和 1^{83}对于 13 同余，即 2^{996}和 1 对于 13 同余。

由于 2^4和 3 对于 13 同余，得到 $2^{996}\times 2^4$和 1×3 对于 13 同余，也就是 2^{1000}和 3 对于 13 同余。

综上所述，2^{1000}除以 13 的余数是 3。

拓展二　今天是星期日，过 2^{1991}天是星期几？

答案提示　因为一星期是 7 天，这道题相当于求 2^{1991}除以 7 的余数是多少。

因为 2^3和 1 对于 7 同余，$1991=3\times 663+2$，所以 $(2^3)^{663}$和 1^{663}对于 7 同余，也就是 2^{1989}和 1 对于 7 同余。

又因为 2^2和 4 对于 7 同余，所以 $2^{1989}\times 2^2$和 1×4 对于 7 同余，即 2^{1991}和 4 对于 7 同余。

由此可知，2^{1991}除以 7 的余数是 4，所以说，再过 2^{1991}天是星期四。

拓展三　求 7^{355}的末两位数是多少？

答案提示 因为7^3和43对于100同余，7^6、43^2和49对于100同余，这样7^{12}、49^2和1对于100也同余。而$355=12\times29+7$，所以$(7^{12})^{29}$和1^{29}对于100同余，7^7、49×7和43对于100同余。由此可知，$7^{355}=[(7^{12})^{29}\cdot7^7]$和$1\times43=43$对于100也同余，所以$7^{355}$的末两位数是43。

拓展四 (1) 2005年全年有几个星期日？全年有几个月有五个星期日？(2005年1月1日是星期六) (2) 2008年全年有几个星期日？全年有几个月有五个星期日？(2008年1月1日是星期二)

答案提示 平年一年是365天，闰年一年是366天，2005年是平年，2008年是闰年。从某一天算起，到某两天的天数被7除，如果同余的话，那两天的星期几是一样的，即星期几是一个被7除同余的问题。

(1) 2005年1月1日是星期六，$365=7\times52+1$。所以2005年12月31日也是星期六，所以2005年共52个星期日，又每月天数n满足$28\leqslant n\leqslant31$，故$n=7\times4+r$ $(r=0,1,2,3)$，即每月有4个整星期又多几天，所以每月星期日的个数为4或5，现$52=4\times12+4$，所以2005年有4个月有五个星期日。

(2) 2008年是闰年，共366天，2008年1月1日是星期二，故由$366=7\times52+2$，及$52=4\times12+4$。2008年有52个星期日，其中有3个月有五个星期日。

检测·反馈·应用

一、选择题

1. 已知69，90，125被N除余数相同，求81被N除的余数是（　　）。

   A. 4　　　B. 7　　　C. 5　　　D. 2

2. 1991和1769除以某一个自然数n，余数分别为2和1，n的最小值是（　　）。

   A. 23　　　B. 13　　　C. 17　　　D. 18

3. $16\times17\times37\times38$除以13的余数是（　　）。

   A. 12　　　B. 11　　　C. 9　　　D. 7

4. 1999^{1999}除以 3 所得的余数是（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 0　　D. 3

5. 今天是星期二，再过 99^{2002}天是星期（　　）。

A. 三　　B. 四　　C. 五　　D. 六

6. 1998^{1999}的个位数字是（　　）。

A. 3　　B. 2　　C. 4　　D. 6

7. $11^{1997}\times13^{995}\times17^{1025}$的个位数字是（　　）。

A. 3　　B. 1　　C. 9　　D. 6

8. $3^{50}+4^{51}+5^{52}+7^{53}$的个位数字是（　　）。

A. 3　　B. 1　　C. 9　　D. 5

9. 在小于 2002 的自然数中，被 18 及 33 除余数相同的数有（　　）个。

A. 17　　B. 198　　C. 34　　D. 51

10. 一个三位数，它的 29 倍加上 5 能被 2002 整除，这个三位数是（　　）。

A. 345　　B. 121　　C. 150　　D. 267

11. 一个整数乘以 13 后，积的最后三位数是 123，这样的整数最小是（　　）。

A. 157　　B. 253　　C. 942　　D. 471

12. 用 1，9，8，8 这四个数能排出（　　）个被 11 除余 8 的四位数。

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

13. 71427×19 的积被 7 除的余数是（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 5

二、解答题

14. 试证明：$111^{111}+112^{112}+113^{113}$能被 10 整除。

15. 求乘积 $34\times37\times41\times43$ 除以 13 所得的余数。

16. 今天是星期五，再过 365^{364}天是星期几？

17. 求 3979^{1234}除以 39 所得的余数。

18. 求 $1999^{323}+323^{1999}$的个位数字。

19. $131^{13}+132^{14}+133^{15}$除以 13 余几？

20. 试证明：$3^{1990}+4^{1990}$是 5 的倍数。

21. 70 个数排成一行，除了两头的两个数以外，每个数的三倍恰好等

于它两边两个数的和。这一行最左边的几个数是这样的：0，1，3，8，21，…，问最右边的一个数被 6 除余几？

22. 2002 年全年有几个星期日？全年有几个月有 5 个星期日？（2002 年 1 月 1 日是星期二）

23. 某年的 10 月有五个星期六，4 个星期日，这年的 10 月 1 日是星期几？

24. 甲、乙两人轮流报数，必须报不大于 2 的自然数（零除外），把两人报出的数依次加起来，谁报数后加起来的数是 20，谁就获胜，如甲要取胜，是先报还是后报？报几？以后怎样报？

25. 设 A 是一个有 35 位循环节的循环小数 $A=0.\dot{a}_1a_2a_3\cdots\dot{a}_{35}$，把 A 的所有奇数位画去，得到一个新的无限小数：$A_1=0.a_2a_4a_6a_8\cdots$再把 A_1 的所有奇数位画去，得到一个新的无限小数：$A_2=0.a_4a_8a_n\cdots$如此继续下去，能否仍得到原来的循环小数？

思路·点拨·详解

1. A。因为 69，90，125 被 N 除余数相同，所以 90 和 69 对于 N 同余，125 和 90 对于 N 同余。因此，90 - 69 能被 N 整除，125 - 90 能被 N 整除，也就是 N 能分别整除 21 和 35，这说明 N 是 21 和 35 的公约数，所以 N 是 7。因此 81 被 N 除余数是 4。

2. B。1991 - 2 = 1989 能被 n 整除，同样 1769 - 1 = 1768 也能被这个数 n 整除。所以 n 是 1989 和 1768 的最大公约数的约数，且应该大于 2。

   而 1989 和 1768 的最大公约数是 13 × 17，所以 n 的最小值是 13。

3. B。因为 $16\equiv3\pmod{13}$，$17\equiv4\pmod{13}$，$37\equiv11\pmod{13}$，$38\equiv12\pmod{13}$，所以 $16\times17\times37\times38\equiv3\times4\times11\times12=1584\equiv11\pmod{13}$。

4. A。$1999\equiv1\pmod{3}$，故 $1999^{1999}\equiv1^{1999}\equiv1\pmod{3}$。

5. A。$99\equiv1\pmod{7}$，故 99^{2002} 天 $\equiv1^{2002}\equiv1\pmod{7}$，所以再过 99^{2002} 是

星期三。

6. B。$1999=4\times499+3$，故 1998^{1999} 的个位数字与 1998^{3} 的个位数字相同，为 2。

7. C。$1997=4\times499+1$，$995=4\times248+3$，$1025=4\times256+1$，所以 $11^{1997}\times13^{995}\times17^{1025}$ 的个位数字与 $11\times13^{3}\times17$ 的个位数字相同，为 9。

8. D。因为 $3^{50}\equiv3^{2}\equiv9\pmod{10}$，$4^{51}\equiv4^{3}\equiv4\pmod{10}$，$5^{52}\equiv5^{4}\equiv5\pmod{10}$，$7^{53}\equiv7^{1}\equiv7\pmod{10}$。所以 $3^{50}+4^{51}+5^{52}+7^{53}$ 的个位数字与 $9+4+5+7$ 的个位数字相同，为 5。

9. B。$[18.33]=198$，$2002=198\times10+22$。被 18 及 33 除余数相同的数有 $0,1,2,\cdots,17,198,198+1,\cdots,198+17,198\times2,198\times2+1,\cdots,198\times2+17,\cdots,198\times10,198\times10+1,\cdots,198\times10+17$，共有 $18\times11=198$ 个。

10. A。设这个三位数为 x，则 $2002\mid(29x+5)$ 为整数，故可设 $29x+5=2002y$。因为 $2002\equiv1\pmod{29}$，所以 $y\equiv5\pmod{29}$。又 $100\leqslant x<999$，$2905\leqslant2002y<38976$，$2\leqslant y\leqslant14$。因此 $y=5$，$x=\dfrac{2002\times5-5}{29}=345$。

11. D。设所求整数为 x，则 $13x=1000y+123$，其中 y 为整数。因为 $1000\equiv12\pmod{13}$，$123\equiv6\pmod{13}$，所以 $0\equiv12y+6\pmod{13}$，$y\equiv y+(12y+6)\equiv6\pmod{13}$，$y$ 最小是 6，从而 x 是 $(1000\times6+123)\div13=471$。

12. B。$1+9+8+8=26$，即奇数位数字和 + 偶数位数字和 = 26，而奇数位数字和 - 偶数位数字和 = 8。故奇数位数字和 = 17，偶数位数字和 = 9，故奇数位的两个数字只能是 8 和 9，经试验，符合题意的结果有 1988，8918，1889，8819 四个。

13. B。71427 被 7 除余 6，19 被 7 除余 5。$5\times6=30$，30 被 7 除余 2。

14. 显然 111^{111} 的个位数字为 1，$112^{112}=112^{4\times27+4}$，又 2^{4} 的个位数字为 6，则 112^{112} 的个位数字为 6。$113^{113}=113^{4\times28+1}$，又 3^{1} 的个位数字为 3。则 113^{113} 的个位数字为 3。所以 $111^{111}+112^{112}+113^{113}$ 的个位数字为 $1+6+3$ 的个位数字，即为 0。故 $111^{111}+112^{112}+113^{113}$

能被 10 整除。

15. 2。$34 \equiv 8 \pmod{13}$，$37 \equiv 11 \pmod{13}$，$41 \equiv 2 \pmod{13}$，$43 \equiv 4 \pmod{13}$，所以 $34 \times 37 \times 41 \times 43 \equiv 8 \times 11 \times 2 \times 4 = 704 \equiv 2 \pmod{13}$。所以 $34 \times 37 \times 41 \times 43$ 除以 13 的余数是 2。

16. 星期六。$365 \equiv 1 \pmod{7}$，所以 $365^{364} \equiv 1 \pmod{7}$。所以再过 365^{364} 天是星期六。

17. 余数是 1。因为 3979 除以 39 的余数是 1，所以 3979^{1234} 和 1^{1234} 和 1 对于 39 同余，因此 3979^{1234} 除以 39 的余数是 1。

18. 个位数字是 6。$1999^{323} = 1999^{4 \times 80 + 3}$，而 9^3 的个位数字是 9，$323^{1999} = 323^{4 \times 499 + 3}$，而 3^3 的个位数字是 7，$9 + 7$ 的个位数字为 6。故所求的个位数字是 6。

19. 余数是 6。因为 $131^{13} + 132^{14} + 133^{15} \equiv 1^{13} + 2^{14} + 3^{15} = 1 + 2^{12} \times 2^2 + 3^{12} \times 3^3 \equiv 1 + 1 \times 4 + 1 \times 1 = 6 \pmod{13}$。

20. $3^{1990} = 3^{4 \times 497 + 2}$，而 3^2 的个位数字是 9，$4^{1990} = 4^{4 \times 497 + 2}$，而 4^2 的个位数字是 6，$9 + 6 = 15$，故 $3^{1990} + 4^{1990}$ 是 5 的倍数。

21. 这一列数的每个数被 6 除的余数构成的一列数具有以下的性质：第一个数是 0，第二个数是 1，从第三个数开始，每一个数等于它的前面一个数的 3 倍减去它的前面的第二个数，然后除以 6 的余数。这样得到的一列数是：0，1，3，2，3，1，0，5，3，4，3，5，…以下开始循环，因为 $70 = 5 \times 12 + 10$，所以原来的一列数的第 70 个数除以 6 的余数等于上面的一列数中的第 10 个数，即 4。

22. 2002 年 1 月 1 日是星期二，2002 年有 365 天，$365 = 7 \times 52 + 1$，所以 2002 年有 52 个星期日，有 5 个星期日的月份有 3 月、9 月、12 月，全年有 3 个月有 5 个星期日。

23. 由条件可知，这年的 10 月 31 日为星期六，$31 \div 7 = 4 \cdots\cdots 3$，从而可知这年的 10 月 1 日为星期四。

24. $20 \div (2 + 1) = 6 \cdots\cdots 2$，甲要取胜，应该先报 2，以后若乙报 1，甲则报 2，乙若报 2，甲则报 1，这样，甲必胜。

25. 能。由于第一次画去后留下第 2、4、6、8、10……位，第二次画去后留下第 2^2、2×2^2、3×2^2……位，第三次画去后留下第 2^3、$2 \times$