

2010

GCT

GCT真题模拟题归类解析及知识点清单

数学分册

全国GCT辅导用书编写组 编著



中国人民大学出版社

GCT 真题模拟题归类 解析及知识点清单 数学分册

全国 GCT 辅导用书编写组 编著

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

GCT 真题模拟题归类解析及知识点清单. 数学分册
全国 GCT 辅导用书编写组编著. 3 版
北京: 中国人民大学出版社, 2010
ISBN 978-7-300-08926-3

I. ①G…
II. ①全…
III. ①高等数学-研究生-入学考试-解题
IV. ①G643-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 222961 号

GCT 真题模拟题归类解析及知识点清单

数学分册

全国 GCT 辅导用书编写组 编著

GCT Zhenti Moniti Guilei Jiexi ji Zhishidian Qingdan Shuxue Fence

出版发行	中国人民大学出版社	
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码 100080
电 话	010-62511242(总编室)	010-62511398(质管部)
	010-82501766(邮购部)	010-62514148(门市部)
	010-62515195(发行公司)	010-62515275(盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn	
	http://www.1kao.com.cn (中国 1 考网)	
经 销	新华书店	
印 刷	北京鑫丰华彩印有限公司	
规 格	185 mm×230 mm 16 开本	版 次 2008 年 3 月第 1 版 2010 年 1 月第 3 版
印 张	28.75	印 次 2010 年 1 月第 1 次印刷
字 数	589 000	定 价 47.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

前 言

由国务院学位办实行的 GCT（硕士专业学位研究生入学资格考试），依据往年学位办文件，主要参加对象为参加工程硕士、农业推广硕士、兽医硕士、风景园林硕士、翻译硕士、汉语国际教育硕士以及高等学校教师和中等职业学校教师在职攻读硕士学位等入学考试的考生。GCT 考试试卷由四部分构成：语言表达能力测试、数学基础能力测试、逻辑推理能力测试和外语运用能力测试（即：语文分册、数学分册、逻辑分册、英语分册）。

为了满足广大 GCT 考生的迫切需要，基于对考生高度负责的精神，我们根据自己多年的考试辅导经验，紧密结合考试大纲，精心编写了本套书。本套书具有如下特色：

一、专家主笔，编写阵容强大

本套书编者多年来一直从事 GCT 的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，深谙命题规律和出题动态。可以说，本套书的出版凝结着参与编写的专家、学者多年教学、命题、评卷的经验，具有极强的权威性和实战性，针对性强。

二、系统、全面、深入剖析历年真题，考试知识点一览无余

我们希望帮助考生做到以下几点：（1）系统而轻松地掌握大纲要求的知识点。（2）对历年真题按考点进行归类，在归纳常考知识点清单的基础上，将考点融会贯通。（3）进行系统的模拟训练，严格按照实际的考试时间和难度进行模拟测试。

本套书以近七年（2003—2009 年）的考试真题带考点，不仅讲解真题，更归纳考点，梳理知识清单，为考生指明高效复习、应试取胜的方向。

三、精辟阐明解题思路，全面展现题型特点

本套书对历年真题和自测试题都进行了详细的解析，尤其是对解题思路和题型特点都作了深入和细致的分析。考生在作答本套书的试题时，要坚持独立思考、自主分析，独立作出解答，然后才去对照答案，否则起不到模拟测试的作用。此外，要学会不断归纳总结。对于平时做错的试题，要找出症结所在，以便下次不再犯同样的错误。

作为命题成果的集合，本套书中的试题可以反复练习，以便考生掌握试题的重要知识点、题型套路及解题技巧。

复习备考 GCT 是一个很艰苦的过程。在编写本套书的过程中，作者根据多年的辅导

经验，诠释 GCT 的技巧，让广大考生能够在有限的时间内，正确把握考试要领，紧紧抓住考试的重点环节，进行全真的试题模拟，做到事半功倍。

尽管本套书的编者本着对考生认真负责的态度，力求达到完美的境地，但是由于时间仓促，缺点和纰漏在所难免，还望广大考生和专家批评指正。

编者

目 录

第一部分 GCT 数学考试分析

一、基本考情分析	3
二、数学应试技巧分析	3
三、备考与应试策略	9

第二部分 历年真题考点归类与自测

第一编 算术	15
第一章 算术	15
考点 1: 特殊运算法则	15
考点 2: 分数与百分数	15
考点 3: 比例的计算	17
考点 4: 比的概念与计算	18
考点 5: 数的整除	19
考点 6: 算术平均值	20
考点 7: 素数与合数	21
七年真题考点归纳	24
考点自测	24
考点自测答案与解析	25
第二编 初等代数	28
第二章 数和代数式	28
考点 1: 数轴与绝对值	28

考点 2: 复数的运算与模	29
考点 3: 共轭复数	30
考点 4: 复数的辐角	30
考点 5: 因式分解	31
考点 6: 分式的加减运算与恒成立的条件	32
七年真题考点归纳	40
考点自测	40
考点自测答案与解析	43
第三章 方程和方程组	49
考点 1: 一元一次方程的应用与求解	49
考点 2: 一元二次方程的求解与韦达定理	51
考点 3: 二元一次方程组及其求解	53
七年真题考点归纳	55
考点自测	56
考点自测答案与解析	58
第四章 不等式	62
考点 1: 数的比较与不等式	62
考点 2: 不等式的建立和求解	64
七年真题考点归纳	66
考点自测	66
考点自测答案与解析	69
第五章 集合、映射和函数	77
考点 1: 集合的概念与运算	77
考点 2: 二次函数及其图像	79
考点 3: 函数的定义域	80
考点 4: 函数图像的对称性	82
考点 5: 分段函数与复合函数	82
七年真题考点归纳	86
考点自测	86
考点自测答案与解析	89
第六章 数列、数学归纳法	96
考点 1: 数列及其通项公式	96
考点 2: 等差数列	97

考点 3: 等比数列	99
七年真题考点归纳	101
考点自测	102
考点自测答案与解析	105
第七章 排列、组合、二项式定理和古典概率	113
考点 1: 排列和组合的概念与计算	113
考点 2: 古典概型的概率计算	115
考点 3: 独立事件与概率计算	117
考点 4: 伯努利试验的概率计算	118
七年真题考点归纳	124
考点自测	124
考点自测答案与解析	127
第三编 几何与三角学	134
第八章 常见的几何图形	134
考点 1: 三角形的性质与计算	134
考点 2: 四边形的性质与计算	137
考点 3: 圆的性质与计算	139
考点 4: 长方体和球体的性质与计算	141
考点 5: 圆柱体的性质与计算	142
考点 6: 圆锥体的性质与计算	143
七年真题考点归纳	145
考点自测	146
考点自测答案与解析	149
第九章 三角学	155
考点 1: 三角函数值的计算	155
考点 2: 解三角形	157
七年真题考点归纳	164
考点自测	164
考点自测答案与解析	167
第十章 平面解析几何	175
考点 1: 圆	175
考点 2: 平面距离和空间距离求解	177
考点 3: 斜率和直线方程	178

考点 4: 双曲线	182
考点 5: 椭圆	184
考点 6: 抛物线	186
七年真题考点归纳	189
考点自测	190
考点自测答案与解析	193
第四编 一元函数微积分	201
第十一章 极限与连续	201
考点 1: 函数的极限及其性质	201
考点 2: 函数极限与数列极限的关系及其计算	203
七年真题考点归纳	211
考点自测	212
考点自测答案与解析	215
第十二章 一元函数微分学	224
考点 1: 导数的物理意义和几何意义	224
考点 2: 函数的求导运算	226
考点 3: 函数极值与曲线拐点的判定	230
考点 4: 曲线的渐近线	232
七年真题考点归纳	238
考点自测	238
考点自测答案与解析	244
第十三章 一元函数积分学	257
考点 1: 定积分的几何意义与应用	257
考点 2: 定积分的计算与方法	260
考点 3: 变上限积分函数	263
考点 4: 不定积分的计算	265
七年真题考点归纳	271
考点自测	272
考点自测答案与解析	278
第五编 线性代数	292
第十四章 行列式	292
考点 1: 行列式的展开	292

考点 2: 行列式的性质	294
七年真题考点归纳	298
考点自测	298
考点自测答案与解析	303
第十五章 矩阵	313
考点 1: 矩阵的转置、乘法运算和方阵的行列式	313
考点 2: 可逆矩阵、伴随矩阵及其求解	316
考点 3: 矩阵的秩	319
七年真题考点归纳	325
考点自测	326
考点自测答案与解析	333
第十六章 向量	346
考点 1: 向量的基本运算	346
考点 2: 向量的线性相关性	347
考点 3: 向量组的极大无关组	350
考点 4: 向量组的秩	350
七年真题考点归纳	352
考点自测	352
考点自测答案与解析	357
第十七章 线性方程组	369
考点 1: 非齐次线性方程组有无解的判定	369
考点 2: 齐次线性方程组的解向量、基础解系与系数矩阵的秩	371
考点 3: 齐次线性方程组有无非零解的判定	372
七年真题考点归纳	377
考点自测	377
考点自测答案与解析	384
第十八章 矩阵的特征值和特征向量	396
考点 1: 矩阵的特征值与特征向量及其求解	396
考点 2: 矩阵的相似关系和对角化	398
七年真题考点归纳	401
考点自测	401
考点自测答案与解析	406
附录一	415
模拟试题	415

模拟试题参考答案与解析	418
附录二	426
2007年GCT入学资格考试数学基础能力测试试题	426
2007年GCT入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析	429
2008年GCT入学资格考试数学基础能力测试试题	435
2008年GCT入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析	438
2009年GCT入学资格考试数学基础能力测试试题	443
2009年GCT入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析	446

第一部分 GCT
数学考试分析

一、基本考情分析

GCT 入学资格考试数学部分的考试以数学基础知识为背景,重点考查考生的基本数学素养及对基本数学概念的理解,考查考生逻辑思维能力、数学运算能力、空间想象能力以及分析解决问题的能力。数学试题由五部分内容组成:算术、初等代数、几何与三角学、一元函数微积分、线性代数。考试题目共 25 个,考试时间 45 分钟。

GCT 入学考试数学部分有如下的特点:

第一,内容繁杂,综合性强。考试内容囊括算术、初等代数、几何与三角学、一元函数微积分以及线性代数的基础知识,包括小学、初中、高中以及大学的数学知识。

第二,考试时间很紧张。要在 45 分钟内解决 25 道题,平均每道试题的解题时间不到 2 分钟。

二、数学应试技巧分析

著名数学家、教育家 G. 波利亚(G. Polya)说:“解题是智力的特殊成就,而智力乃是人类的天赋。因此,解题可以被认为是人类最富有特征性的活动。”本书给 GCT 入学资格考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。在看本书试题时,应该先自己动手做题,然后将自己所得的结果与书中的答案加以比较,看自己哪些做对了、哪些做错了,为什么会做错。建议考生把本书的全部试题做 2~3 遍,应该做到对所有的题目一见到就能够熟练、正确地解答出来。

数学考试要在 45 分钟内完成,时间是很紧张的。考生如果能在牢固掌握基础知识的基础上,掌握一定的解题技巧,必将大大提高解题速度。下面就一些比较典型的题型,介绍几种解题方法和技巧。当然,这些解题方法并非具有通用性,考生应该具体情况具体分析。

1. 结合图形解题,一目了然

【例 1】要使方程 $3x^2 + (m-5)x + m^2 - m - 2 = 0$ 的两个实根分别满足 $0 < x_1 < 1$ 和 $1 < x_2 < 2$, 实数 m 的取值范围是()。

A. $-2 < m < -1$ B. $-4 < m < -1$ C. $-4 < m < -2$ D. $-3 < m < 1$

【技巧分析】这里主要考查二次函数(方程)的性质。如果用一元二次方程根与系数的关系解题,比较繁琐,我们不妨结合图形解题。

解:如图 1 所示,设

$$f(x) = 3x^2 + (m-5)x + m^2 - m - 2$$

则 $f(x)$ 开口向上,与 x 轴交于 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$ 两点,有不等式组
$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) < 0, \text{从而有} \\ f(2) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m^2 - 4 < 0 \\ m^2 + m > 0 \end{cases}$$

答案：A。

【例 2】设 $\varphi(x)$ 是 x 到离 x 最近的整数的距离，求 $\int_0^{100} \varphi(x) dx$ 。

【技巧分析】此题至少有两种解法。直接用积分的方法也能算出答案，但是比较繁琐，如果借助于图形，答案就一目了然了。其实所求积分就是如图 2 所示的 100 个三角形的面积之和。

解法 1：如图所示，

$$\int_0^{100} \varphi(x) dx = 100 \times 0.25 = 25。$$

解法 2：

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - i, & i \leq x < i + 0.5 \\ i + 1 - x, & i + 0.5 \leq x < i + 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{100} \varphi(x) dx &= \sum_{i=0}^{99} \int_i^{i+1} \varphi(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{99} \left[\int_i^{i+0.5} (x - i) dx + \int_{i+0.5}^{i+1} (i + 1 - x) dx \right] \\ &= 25。 \end{aligned}$$

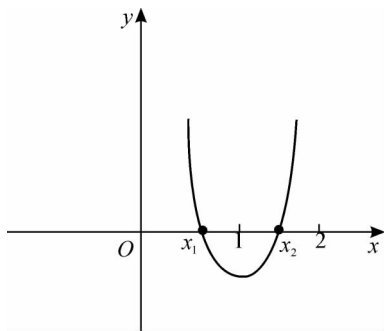


图 1

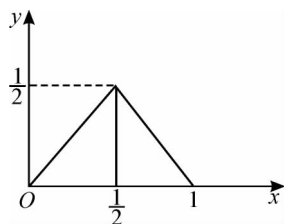


图 2

2. 典型的比例问题，借助比例系数求解

【例 3】设 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = 4 : 5 : 6$ ，则使 $x + y + z = 74$ 成立的 y 值是()。

- A. 24 B. 36 C. $\frac{74}{3}$ D. $\frac{37}{2}$

【技巧分析】这是很典型的比例问题，一般的题是两个数值之间的比例问题，这里是三个数值之间的比例问题，按照 $\frac{1}{x}$ ， $\frac{1}{y}$ ， $\frac{1}{z}$ 各自的比例直接计算此题，不如借助于比例系数计算来得快。

解：令 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = k$

有 $\begin{cases} x = \frac{1}{4k} \\ y = \frac{1}{5k} \\ z = \frac{1}{6k} \end{cases}$

根据题意有 $\frac{1}{4k} + \frac{1}{5k} + \frac{1}{6k} = 74$, 解得 $k = \frac{1}{120}$

所以 $y = \frac{1}{5k} = 24$

答案: A.

3. 直观判断常数项

在判断 n 值给定的情况下, 二项展开式是否存在常数项的问题时, 用直接判断法比代入条件验证结论要简便得多, 下面结合例题进行分析。

【例 4】 当 () 时, $(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 有常数项。

A. $n = 1$

B. $n = 2$

C. $n = 4$

D. $n = 7$

【技巧分析】 二项展开式中, 位于分母的指数为 $\frac{1}{3}$, 位于分子的指数是 $\frac{1}{4}$, 它们的比值为 $\frac{3}{4}$, $3 + 4 = 7$, 只有当 $n = 7$ 的整数倍时, 展开式才存在常数项。

答案: D.

4. 等价变形, 运用转换法

【例 5】 设实数 x, y 符合等式 $x^2 - 4xy + 4y^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{3}y - 6 = 0$, 则 $x + y$ 的最大值为 ()。

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{2}$

【技巧分析】 把 $x + y$ 视作一个整体来解题, 有些麻烦, 问题比较复杂。但是如果能将原等式进行等价变换, 则会“柳暗花明”。

解: 对原式作等价变形, 有

$$\sqrt{3}(x + y) = 6 - (x - 2y)^2$$

$$\text{可得 } x + y = \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2y)^2$$

$$\text{由 } (x - 2y)^2 \geq 0$$

$$\text{可得 } \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2y)^2 \geq 0$$

$$\text{所以 } x + y \leq \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

答案: C.

5. 运用待定系数法求解

【例 6】 已知 $x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 4$ 是一个二次三项式的完全平方式，则 a, b 的值分别为()。

A. $a = 13, b = -12$ 或者 $a = 5, b = 12$

B. $a = 6, b = 1$

C. $a = -6, b = 4$

D. $a = 13, b = -12$

【技巧分析】 此类题采用待定系数法就比较简单，直接根据未知的系数来推算答案是比较麻烦的。

解：设原式 $= (x^2 + Ax + B)^2$ ，有

$$x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 4 = x^4 + 2Ax^3 + (A^2 + 2B)x^2 + 2ABx + B^2$$

$$\text{得} \begin{cases} 2A = -6 \\ A^2 + 2B = a \\ 2AB = b \\ B^2 = 4 \end{cases}$$

解得 $A = -3, B = \pm 2$

当 $B = -2$ 时，有 $a = 5, b = 12$ ；当 $B = 2$ 时，有 $a = 13, b = -12$

答案：A。

6. 求不等式解集：“根排序法”

【例 7】 不等式 $\frac{x^2 - 4x + 3}{x + 5} \leq 0$ 的解集是()。

A. $(-\infty, -5) \cup [1, 3]$

B. $(-\infty, -5) \cup (1, 3)$

C. $(-5, 3)$

D. $(-\infty, 8)$

【技巧分析】 直接对不等式求解显然很麻烦，我们用“根排序法”会很轻松。

解：对原不等式作同解变形

$$\text{得} \begin{cases} (x-1)(x-3)(x+5) \leq 0 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

令 $(x-1)(x-3)(x+5) = 0$ ，有 $x_1 = -5, x_2 = 1, x_3 = 3$ ，将 x_1, x_2, x_3 从左到右依大小进行排序，得

$$\begin{array}{ccccccc} -5 & & +1 & & +3 & & \\ - & & + & & - & & + \end{array}$$

由上面的排序可得到答案：不等式的解集是 $(-\infty, -5) \cup [1, 3]$

答案：A。

7. “特值代入法”，准确而又高效的技巧

【例 8】 $C_n^1 + 3C_n^2 + 3^2C_n^3 + \cdots + 3^{n-1}C_n^n$ 的值为()。

A. $\frac{1}{3}(4^n - 1)$

B. 4^n

C. 3×4^n

D. $\frac{4^n}{3} - 1$

【技巧分析】本题可用代公式的方法计算出答案，但是，在考场上用“特值代入法”，准确而又高效，可以节省大量的时间。请看下面两种解法，很明显，解法2是考生所愿意采纳的方法。

$$\begin{aligned} \text{解法 1: 原式} &= \frac{1}{3}(3C_n^1 + 3^2C_n^2 + 3^3C_n^3 + \cdots + 3^nC_n^n) \\ &= \frac{1}{3}[(3^0C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \cdots + 3^nC_n^n) - 3^0C_n^0] \\ &= \frac{1}{3}[(1+3)^n - 1] \\ &= \frac{1}{3}(4^n - 1) \end{aligned}$$

答案：A。

解法 2：用 $n=1$ 代入，正如 A 选项，故为正确答案。如果不放心，用 $n=2$ 代入，也成立。即可知，只有 A 选项符合。

答案：A。

【例 9】若 $x = a^2 - bc$ ， $y = b^2 - ac$ ， $z = c^2 - ab$ ， a 、 b 、 c 是不完全相等的任意实数，则 x 、 y 、 z ()。

A. 至少有一个大于 0

B. 都大于 0

C. 至少有一个小于 0

D. 都不小于 0

【技巧分析】像这种考题，按照规矩的方法，花一些时间可以求出答案。考生可以比较下面两种解题方法，当然解法 1 比较简单，但考生在紧张的状态下不一定想得到，所以用解法 2 是快速而又保险的做法。

$$\text{解法 1: } x + y + z = a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2]$$

因为 a 、 b 、 c 不完全相等，所以有

$$x + y + z = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2] > 0$$

x 、 y 、 z 中至少有一个大于 0。

答案：A。

解法 2：不妨令 $a=0$ ， $b=1$ ， $c=2$ ，很快排除 B、D。再令 $a=1$ ， $b=0$ ， $c=-1$ ，又排除 C。

只有 A 选项正确。

答案：A。