河北省

高中总复习

GAO ZHONG ZONG FU XI

文科

数学

河北人民出版社组织编写

河北出版传媒集团
河北人民出版社

目　录

讲　义

一课一练(以下为活页)

讲　义

第一章　集合与常用逻辑用语

第一节　集合的概念及运算

复习要点

1. 集合与元素

（1）集合元素的三个特征：确定性、互异性、无序性.

（2）元素与集合的关系是属于或不属于关系，用符号$\in$或$\notin$表示.

（3）集合的表示法：列举法、描述法、Venn图.

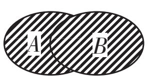
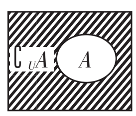
（4）常见集合的符号表示

数集	自然数集	正数数集	整数集	有理数集	实数集
符号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}^*$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

2. 集合间的基本关系

$A=B$，$A\subseteq B$或$A\supseteq B$，$A\not\subset B$

3. 集合的基本运算

运算 / 表示	集合的并集	集合的交集	集合的补集
符号表示	$A\cup B$	$A\cap B$	若全集为U，则集合A的补集为$\complement_U A$
图形表示			
数学表达式	$A\cup B=\left\{x\middle\|\begin{matrix}x\in A\text{或}\\x\in B\end{matrix}\right\}$	$A\cap B=\left\{x\middle\|\begin{matrix}x\in A\text{且}\\x\in B\end{matrix}\right\}$	$\complement_U A=\left\{x\middle\|\begin{matrix}x\in U\text{且}\\x\notin A\end{matrix}\right\}$

4. 运算结论

$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$　　　$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$

用这两个结论时一定要注意不要忘记集合$A=\varnothing$这一特例.

5. 概念辨析

注意$\varnothing$，$\{\varnothing\}$，$\{0\}$的区别：

集合$\{\varnothing\}$不是空集，空集是不含任何元素的集合，而$\{\varnothing\}$中有一个元素$\varnothing$．集合$\{\varnothing\}$与$\{0\}$的区别是它们的元素不同，其中$\{\varnothing\}$中的元素是$\varnothing$，$\{0\}$中的元素是0，所以$\varnothing\in\{\varnothing\}$同时$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$.

典型示例

【例1】若a，$b\in\mathbf{R}$，集合$\{1,a+b,a\}=\left\{0,\dfrac{b}{a},b\right\}$.

求$b^{2012}-a^{2012}$的值.

解：由$\{1,a+b,a\}=\left\{0,\dfrac{b}{a},b\right\}$可知$a\neq 0$，

则只能$a+b=0$．则有以下对应关系：

$\begin{cases}a+b=0\\ \dfrac{b}{a}=a\\ b=1\end{cases}$　①　　　或$\begin{cases}a+b=0\\ b=a\\ \dfrac{b}{a}=1\end{cases}$　②

由①得$\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$符合题意；②无解.

$\therefore b^{2012}-a^{2012}=0$.

方法总结：本题考察集合的性质，也可经过分析得出$a\neq 0$，则只能是$a+b=0$，所以$\dfrac{b}{a}=-1$，所以$a=-1$，所以$b=1$，综合分析题目能更快捷更准确的找到答案.

【例2】$A=\{x|y=x^2+1\}$，$B=\{y|y=x^2+1\}$，

$C=\{(x,\ y)|y=x^2+1\}$，$D=\{x|y=2x+1,\ 1<y<2\}$，

试求$A\cap B$，$B\cap C$，$B\cap D$.

解：可知$A=\{x|y=x^2+1\}=\mathbf{R}$，

$B=\{y|y=x^2+1\}=\{y|y\geqslant 1\}=[1,+\infty)$，

$D=\{x|y=2x+1,1<y<2\}=\left\{x\middle|0<x<\dfrac{1}{2}\right\}=(0,\dfrac{1}{2})$，

$\therefore A\cap B=[1,\ +\infty)$，$B\cap C=\varnothing$，$B\cap D=\varnothing$.

【例3】已知集合$A=\{x|x^2-3x-10\leqslant 0\}$.

（1）若$B\cup A=A$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，求实数$m$的取值范围；

（2）若$B\cap A=A$，$B=\{x|m-6\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，求实数$m$的取值范围；

（3）是否存在实数m，使得$B=\{x|m-6\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，$A=B$？若存在，求出实数$m$的值，若不存在，请说明理由.

解：由$A=\{x|x^2-3x-10\leqslant 0\}$，得$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$.

（1）若$B=\varnothing$，则$2m-1<m+1$，即$m<2$，

此时满足$B\subseteq A$.

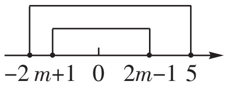
若$B\neq\varnothing$，如图①所示，

则有$\begin{cases}2m-1\geqslant m+1\\ m+1\geqslant -2\\ 2m-1\leqslant 5\end{cases}$，　解得$2\leqslant m\leqslant 3$.

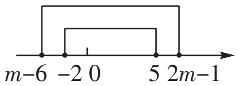
综上，知m的取值范围是$(-\infty,\ 3]$.

（2）$\because A\subseteq B$，且$A\neq\varnothing$，如图②所示，

$\therefore\begin{cases}2m-1\geqslant m-6\\ m-6\leqslant -2\\ 2m-1\geqslant 5\end{cases}$，解得$3\leqslant m\leqslant 4$.



①



②

故 m 的取值范围是[3，4].

（3）不存在.

理由：若 $A=B$．则必有 $\begin{cases}2m-1=5\\m-6=-2\end{cases}$ 此方程组无解，

即不存在 m 值，使得 $A=B$．

方法总结：①求范围问题，边界值细分析；②用 $A\subseteq B$ 就要小心 $A=\varnothing$．

【例4】 已知集合 $\begin{cases}A=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0，x\in\mathbf{R}\}\\B=\{x|x^2-2mx+m^2-4\leqslant 0，x\in\mathbf{R}\}\end{cases}$

（1）若 $A\cap B=[1，3]$，求实数 m 的值；

（2）若 $A\subseteq \complement_{\mathbf{R}}B$，求实数 m 的取值范围.

解：$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|m-2\leqslant x\leqslant m+2\}$．

（1）$\because A\cap B=[1，3]$，$\therefore \begin{cases}m-2=1\\m+2\geqslant 3\end{cases}$，得 $m=3$.

（2）$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x<m-2或x>m+2\}$．

$\because A\subseteq\complement_{\mathbf{R}}B$，$\therefore m-2>3或m+2<-1$.

$\therefore m>5或m<-3$.

拓展提高

1．已知 $M=\{x|x-a=0\}$，$N=\{x|ax-1=0\}$，若 $M\cap N=N$，则实数 a 的值为（　　）

A．1　　B．−1　　C．1或−1　　D．0或1或−1

2．设全集为 $\mathbf{R}$，若集合 $A=\{x||x-2|\leqslant 3\}$，$B=\{x|y=\lg(x-1)\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=$（　　）

A．$\{x|1<x\leqslant 5\}$

B．$\{x|x\leqslant -1或x>5\}$

C．$\{x|x\leqslant 1或x>5\}$

D．$\{x|-1\leqslant x\leqslant 5\}$

3．已知 $P=\{\vec{a}|\vec{a}=(1，0)+m(0，1)，m\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{\vec{b}|\vec{b}=(1，1)+n(-1，1)，n\in\mathbf{R}\}$，则 $P\cap Q=$（　　）

A．$\{(1，1)\}$　　B．$\{(-1，1)\}$

C．$\{(1，0)\}$　　D．$\{(0，1)\}$

4．在集合 $\{a，b，c，d\}$ 上定义两种运算 ⊕ 和 ⊗ 如下：

⊕	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	b	b
c	c	b	c	b
d	d	b	b	d

⊗	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	c	a
d	a	d	a	d

那么 $d\otimes(a\oplus c)=$（　　）

A．a　　B．b　　C．c　　D．d

5．某班共30人，其中15人喜爱篮球运动，10人喜爱乒乓球运动，8人对这两项运动都不喜爱，则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为________.

6．设集合 $A=\{x|x^2-2x+2m+4=0\}$，$B=\{x|x<0\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 m 的取值范围为____________.

7．已知集合 $A=\{x|a+1\leqslant x\leqslant 2a-1\}$，

集合 $B=\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x\leqslant 2\right\}$.

若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

8．若集合 $A=\{x|x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x|x-m<0\}$．

（1）若 $m=3$，全集 $U=A\cup B$，试求 $A\cap(\complement_U B)$；

（2）若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围；

（3）若 $A\cap B=A$，求实数 m 的取值范围.

答案

1．D　2．C　3．A　4．A　5．12

6．$\complement_U M=\{m|m<-2\}$

（解：设 $M=\{m|关于x的方程x^2-2x+2m+4=0的两根均为非负实数\}$，

则 $\begin{cases}\Delta=-2m-3\geqslant 0\\x_1+x_2=2>0\\x_1\cdot x_2=2m+4\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow -2\leqslant m\leqslant -\frac{3}{2}$.

设全集 $U=\{m|\Delta\geqslant 0\}=\left\{m\middle|m\leqslant -\frac{3}{2}\right\}$，

$\because M=\left\{m\middle|-2\leqslant m\leqslant -\frac{3}{2}\right\}$，

$\therefore m$ 的取值范围是 $\complement_U M=\{m|m<-2\}$．）

7．解：当 $a+1>2a-1$，

即 $a<2$ 时，$A=\varnothing$，满足条件；

当 $a+1\leqslant 2a-1$，即 $a\geqslant 2$ 时，

$\begin{cases}a+1>-\frac{1}{2}\\2a-1\leqslant 2\end{cases}$ 解之得 $-\frac{3}{2}<a\leqslant\frac{3}{2}$，$\therefore a$ 不存在.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $a<2$.

8．解：（1）由 $x^2-2x-8<0$，得 $-2<x<4$，

$\therefore A=\{x|-2<x<4\}$．

当$m=3$时，由$x-m<0$，得$x<3$，$\therefore B=\{x|x<3\}$，

$\therefore U=A\cup B=\{x|x<4\}$，$\complement_U B=\{x|3\leqslant x<4\}$.

$\therefore A\cap(\complement_U B)=\{x|3\leqslant x<4\}$．

（2）$\because A=\{x|-2<x<4\}$，$B=\{x|x<m\}$，

又 $A\cap B=\varnothing$，$\therefore m\leqslant -2$.

（3）$\because A=\{x|-2<x<4\}$，$B=\{x|x<m\}$，

由 $A\cap B=A$，得$A\subseteq B$，$\therefore m\geqslant 4$.

第二节　命题及其关系、充分条件与必要条件

复习要点

1. 命题

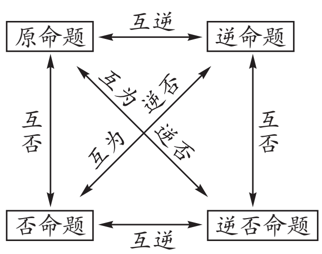
用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题，其中判断为真的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做假命题.

2. 四种命题及其关系

（1）四种命题的定义及表述形式

命题	表述形式
原命题	若 p 则 q
逆命题	若 q 则 p
否命题	若 $\neg p$ 则 $\neg q$
逆否命题	若 $\neg q$ 则 $\neg p$

（2）四种命题间的相互关系



（3）四种命题的真假关系

①两个命题互为逆否命题，它们有相同的真假性；

②两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性没关系.

3. 充分条件、必要条件与充要条件

（1）“若 p 则 q ”为真命题，记 $p\Rightarrow q$ ，则 p 是 q 的充分条件， q 是 p 的必要条件.

（2）如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，记作：$p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充要条件，q 也是 p 的充要条件.

(3）用集合判断

记 p ， q 对应的集合分别为 A，B

若 $A\subseteq B$,则 p 是 q 的充分条件；

若 $A\supseteq B$,则 p 是 q 的必要条件；

若 $A=B$,则 p 是 q 的充要条件.

4. 概念辨析

“命题的否定”与“否命题”的区别：

“命题的否定”与“否命题”是两个不同的概念，如果原命题是“若 p 则 q ”，那么这个命题的否定式“若 p 则 $\neg q$ ”，即只否定结论；而否命题则是“若 $\neg p$ 则 $\neg q$ ”即既否定条件又否定结论.

典型示例

【例 1】关于命题“若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下，则 $\{x|ax^2+bx+c<0\}\neq\varnothing$ ”的逆命题、否命题、逆否命题，下列结论成立的是　　　　（　　）

A．都真　　　　B．都假

C．否命题真　　　　D．逆否命题真

解：对于原命题：“若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下，则 $\{x|ax^2+bx+c<0\}\neq\varnothing$ ”这是一个真命题，所以其逆否命题也为真命题，但其逆命题：“若 $\{x|ax^2+bx+c<0\}\neq\varnothing$ 则抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下”是一个假命题，因为当不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集非空时，可以有 $a>0$ ，即抛物线的开口可以向上．因此否命题也是假命题，故选D.

【例2】设命题 p：$(4x-3)^2\leqslant 1$；命题 q：$x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$ ，若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

解：设 $A=\{x|(4x-3)^2\leqslant 1\}$ ，

$B=\{x|x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0\}$ ，

易知 $A=\{x|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\}$ ， $B=\{x|a\leqslant x\leqslant a+1\}$ ，

由 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，

从而 p 是 q 的充分不必要条件，即 $A\Rightarrow B$.

$\therefore\begin{cases}a\leqslant\frac{1}{2}\\a+1\geqslant 1\end{cases}$ 故所求实数 a 的取值范围是 $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.

【例3】已知 $P=\{x|x^2-8x-20\leqslant 0\}$ ，

$S=\{x|1-m\leqslant x\leqslant 1+m\}$.

（1）是否存在实数 m，使 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的充要条件，若存在，求出 m 的范围.

（2）是否存在实数 m，使 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，若存在，求出 m 的范围.

（3）若 $\neg P$ 是 $\neg S$ 的必要不充分条件，求实数 m 的取值范围.

解：(1）由 $x^2-8x-20\leqslant 0$，得 $-2\leqslant x\leqslant 10$，

$\therefore P=\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$.

$\because x\in P$ 是 $x\in S$ 的充要条件， $\therefore P=S$，

$\therefore\begin{cases}1-m=-2\\1+m=10\end{cases}$ ， $\therefore\begin{cases}m=3\\m=9\end{cases}$ ，$\therefore$这样的 m 不存在.

(2）由题意 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，则 $S\subseteq P$.

$\therefore\begin{cases}1-m\geqslant -2\\1+m\leqslant 10\end{cases}$ ， $\therefore m\leqslant 3$.

(3）由上题知 $P=\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$,$\because\neg P$ 是 $\neg S$ 的必要不

充分条件，$\therefore P\Rightarrow S$ 且 S 推不出 P.

$\therefore[-2,10]\subset[1-m,1+m]$.

$\therefore\begin{cases}1-m\leqslant-2\\1+m>10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-m<-2\\1+m\geqslant10\end{cases}$.

$\therefore m\geqslant9$，即 m 的取值范围是$[9,+\infty)$.

【例4】已知 $a>0$,设命题 p:函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，q：不等式 $x+|x-2a|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，若 p和q 中有且只有一个命题为真命题，求 a 的取值范围.

解：由函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减知 $0<a<1$，所以命题 p 为真命题时 a 的取值范围是 $0<a<1$，

令 $y=x+|x-2a|$，则 $y=\begin{cases}2x-2a & (x\geqslant2a)\\2a & (x<2a)\end{cases}$.

不等式 $x+|x-2a|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，只要 $y_{\min}>1$ 即可，

而函数 y 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $2a$，所以 $2a>1$，即 $a>\frac{1}{2}$.

即 q 真 $\Leftrightarrow a>\frac{1}{2}$；若 p真q假,则 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$；若 p 假 q 真，则 $a\geqslant1$,所以命题 p和q 有且只有一个命题正确时，a 的取值范围是 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $a\geqslant1$.

拓展提高

1．给出下列命题：

①原命题为真，它的否命题为假；

②原命题为真，它的逆命题不一定为真；

③一个命题的逆命题为真，它的否命题一定为真；

④一个命题的逆否命题为真，它的否命题一定为真；

⑤“若 $m>1$，则 $mx^2-2(m+1)x+m+3>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$”的逆命题.

其中真命题是________.（把正确命题的序号都填在横线上）

2．下列各题中，p是q 的什么条件?

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，p：$\angle A=\angle B$，q：$\sin A=\sin B$；

(2) p：$\frac{f(-x)}{f(x)}=1$，q：$y=f(x)$是偶函数；

(3) p：$|x|=x$，q：$x^2+x\geqslant0$；

(4) 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，$p:\sin^2x<1$，$q:x\sin x<1$.

3．“$m<\frac{1}{4}$”是“一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 有实数解”的 (　　)

A．充分非必要条件

B．充分必要条件

C．必要非充分条件

D．非充分非必要条件

4．已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{R}\left|\frac{1}{2}<2^x<8\right.\right\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|-1<x<m+1\}$，若 $x\in B$ 成立的一个充分不必要的条件是 $x\in A$，则实数 m 的取值范围是 (　　)

A．$m\geqslant2$　　　B．$m\leqslant2$

C．$m>2$　　　D．$-2<m<2$

5．若集合 $A=\{x|2<x<3\}$,$B=\{x|(x+2)(x-a)<0\}$，则“$a=1$”是“$A\cap B=\varnothing$”的 (　　)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

6．已知 p：$2x^2-9x+a<0$，q：$\begin{cases}x^2-4x+3<0\\x^2-6x+8<0\end{cases}$ 且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分条件，求实数 a 的取值范围.

7．已知命题 p: $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根；命题 q: $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根．若命题 p 与命题 q 有且只有一个为真，求实数 m 的取值范围.

答案

1．②③⑤

2．(1) p是q的充要条件．(2) p是q的充分不必要条件．(3) p是q的充分不必要条件．(4) p是q的必要不充分条件.

3．A　4．C　5．A

6．解：由 $\begin{cases}x^2-4x+3<0\\x^2-6x+8<0\end{cases}$，得 $\begin{cases}1<x<3\\2<x<4\end{cases}$，即 $2<x<3$，

$\therefore q$ 的解集为 $\{x|2<x<3\}$.

设 $A=\{x|2x^2-9x+a<0\}$，$B=\{x|2<x<3\}$，

$\because\neg p\Rightarrow\neg q$，$\therefore q\Rightarrow p$. $\therefore B\subseteq A$.

即 $2<x<3$ 满足不等式 $2x^2-9x+a<0$.

$\therefore 2<x<3$ 满足不等式 $a<9x-2x^2$.

$\because$当 $2<x<3$ 时，$9x-2x^2=-2(x-\frac{9}{4})^2+\frac{81}{8}$ 的值大于9且小于等于 $\frac{81}{8}$，即 $9<9x-2x^2\leqslant\frac{81}{8}$　$\therefore a\leqslant9$.

7．解：$\because x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根，

$\therefore \begin{cases} m^2-4>0 \\ -m<0 \end{cases}$，得 $m>2$.

$\because 4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根，

$\therefore 16(m-2)^2-16<0$，得 $1<m<3$.

有且只有一个为真，若 p 真 q 假，得 $m\geqslant 3$，

若 p 假 q 真，得 $1<m\leqslant 2$，

综合上述，得 $m\geqslant 3$，或 $1<m\leqslant 2$.

第三节　简单的逻辑联结词、全称量词与存在量词

复习要点

1．逻辑联结词

（1）命题中的或（$\vee$），且（$\wedge$），非（$\neg$）叫做逻辑联结词.

（2）命题 $p\wedge q$，$p\vee q$，$\neg p$ 的真假判断.

p、q 中至少有一假，则 $p\wedge q$ 为假，p、q 中至少有一真，则 $p\vee q$ 为真，p 与 $\neg p$ 必定是真假相反.

2．全称量词与全称命题

短语“所有的”、“任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词，并用符号“$\forall$”表示．含有全称量词的命题，叫做全称命题．全称命题“对 M 中任意一个 x，有 $p(x)$ 成立”，可用符号简记为：$\forall x\in M$，$p(x)$.

3．存在量词与特称命题

短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词，并用符号“$\exists$”表示．含有特称量词的命题，叫做特称命题．特称命题“存在 M 中的一个 x_0，使 $p(x_0)$ 成立”，可用符号简记为：$\exists x_0\in M$，$p(x_0)$.

4．全称命题和特称命题的否定

命题	命题的否定
$\forall x\in M$，$p(x)$	$\exists x_0\in M$，$\neg p(x_0)$
$\exists x_0\in M$，$p(x_0)$	$\forall x\in M$，$\neg p(x)$

典型示例

【例1】指出下列命题的真假：

（1）命题：“不等式 $|x+2|\leqslant 0$ 没有实数解”；

（2）命题：“-1 是偶数或奇数”；

（3）命题：“$\sqrt{2}$ 属于集合 $\mathbf{Q}$，也属于集合 $\mathbf{R}$”.

解：（1）此命题是“$\neg p$”的形式，其中 p：不等式 $|x+2|\leqslant 0$ 有实数解．因为 $x=-2$ 是该不等式的一个解，所以命题 p 为真命题，即 $\neg p$ 为假命题．所以原命题为假命题.

（2）此命题是“$p\vee q$”的形式，其中 p：-1 是偶数，q：-1 是奇数，因为命题 p 为假命题，命题 q 为真命题，所以“$p\vee q$”为真命题，故原命题为真命题.

（3）此命题为“$p\wedge q$”的形式，其中 p：$\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$，q：$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$，因命题 p 为假命题，命题 q 为真命题，所以“$p\wedge q$”为假命题．故原命题为假命题.

方法总结：①确定复合命题的构成形式；②判断其中简单命题的真假；③根据其真值表判断复合命题的真假.

【例2】有四个关于三角函数的命题：

p_1：$\exists x\in\mathbf{R}$，$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$

p_2：$\exists x$，$y\in\mathbf{R}$，$\sin(x-y)=\sin x-\sin y$

p_3：$\forall x\in[0,\pi]$，$\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}=\sin x$

p_4：$\sin x=\cos y\Rightarrow x+y=\frac{\pi}{2}$

其中的假命题是　（　　）

A．p_1，p_4　　B．p_2，p_4

C．p_1，p_3　　D．p_2，p_3

解：$\because$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$，均有 $\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$，

而不是 $\frac{1}{2}$，故 p_1 为假命题.

当 x，y，$x-y$ 有一个为 $2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）时，

$\sin x-\sin y=\sin(x-y)$ 成立，故 p_2 是真命题.

$\because \cos 2x=1-2\sin^2 x$，$\therefore \frac{1-\cos 2x}{2}=\sin^2 x$，

又 $x\in[0,\pi]$ 时，$\sin x\geqslant 0$，

$\therefore$ 对任意 $x\in[0,\pi]$，均有 $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}=\sin x$，

因此 p_3 是真命题.

当 $\sin x=\cos y$，即 $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$ 时，

$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-y$ 即 $x+y=2k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$），

故 p_4 为假命题．故选A.

【例3】写出下列命题的“否定”，并判断其真假.

（1）p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$；

（2）q：所有的正方形都是矩形；

（3）r：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2\leqslant 0$；

（4）s：至少有一个实数 x，使 $x^3+1=0$.

解：（1）$\neg p$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}<0$，是假命题，这是因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$ 恒成立.

（2）$\neg q$：存在一个正方形不是矩形，假命题.

（3）$\neg r$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2>0$，真命题，这是由于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2=(x+2)^2+1\geqslant 1>0$ 成立.

（4）$\neg s$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^3+1\neq 0$，假命题．这是由于 $x=-1$ 时，$x^3+1=0$.

方法总结：对于全称（特称）命题，关键在于看是否含有全称（存在）量词，特别注意有的可能省略量词.

【例4】已知两个命题 $r(x)$：$\sin x+\cos x>m$，$s(x)$：$x^2+mx+1>0$. 如果对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$r(x)$ 与 $s(x)$ 有且仅有一个是真命题．求实数 m 的取值范围.

解：$\because \sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant-\sqrt{2}$，

$\therefore$ 当 $r(x)$ 是真命题时，$m<-\sqrt{2}$.

又 $\because \forall x\in\mathbf{R}$，$s(x)$ 为真命题，

即 $x^2+mx+1>0$ 恒成立，

有 $\Delta=m^2-4<0$，$\therefore -2<m<2$.

$\therefore$ 当 $r(x)$ 为真，$s(x)$ 为假时，

$m<-\sqrt{2}$，同时 $m\leqslant-2$ 或 $m\geqslant2$，即 $m\leqslant-2$；

当 $r(x)$ 为假，$s(x)$ 为真时，

$-\sqrt{2}\leqslant m$ 且 $-2<m<2$，

即 $-\sqrt{2}\leqslant m<2$.

综上，实数 m 的取值范围是 $m\leqslant-2$ 或 $-\sqrt{2}\leqslant m<2$.

拓展提高

1．写出由下列各组命题构成的“$p\wedge q$”“$p\vee q$”“$\neg p$”形式的复合命题并判断真假.

（1）p：$6<6$，q：$6=6$.

（2）p：函数 $y=x^2+x+2$ 的图象与 x 轴没有公共点.

q：方程 $x^2+x+2=0$ 没有实根.

2．已知命题 p_1：函数 $y=2^x-2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，p_2：函数 $y=2^x+2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，则在命题 q_1：$p_1\vee p_2$，q_2：$p_1\wedge p_2$，q_3：$(\neg p_1)\vee p_2$，q_4：$p_1\wedge(\neg p_2)$ 中，真命题是（　　）

A．q_1，q_3　　B．q_2，q_3

C．q_1，q_4　　D．q_2，q_4

3．下列命题中，真命题是（　　）

A．$\exists m\in\mathbf{R}$，使函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数

B．$\exists m\in\mathbf{R}$，使函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数

C．$\forall m\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$ 都是偶函数

D．$\forall m\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x^2+mx(x\in\mathbf{R})$ 都是奇函数

4．写出下列命题的否定形式：

（1）有些三角形的三个内角都等于60°；

（2）能够被3整除的整数，能够被6整除；

（3）$\exists\theta\in\mathbf{R}$，使得函数 $y=\sin(2x+\theta)$ 是偶函数；

（4）$\forall x$，$y\in\mathbf{R}$，$|x+1|+|y-1|>0$.

5．写出下列命题的否定，并判断命题的否定的真假，指出命题的否定属全称命题还是特称命题.

（1）所有的有理数是实数；

（2）有的三角形是直角三角形；

（3）每个二次函数的图象都与 y 轴相交；

（4）$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x>0$.

6．已知 $a>0$，设命题 p：函数 $y=a^x$，$\mathbf{R}$ 上单调递增；命题 q：不等式 $ax^2-ax+1>0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立．若“p 且 q”为假，“p 或 q”为真，求 a 的取值范围.

答案

1．（1）$p\wedge q$：$6<6$ 且 $6=6$．假命题；$p\vee q$：$6<6$ 或 $6=6$．真命题；$\neg p$：$6\geqslant6$．真命题.

（2）$p\wedge q$：函数 $y=x^2+x+2$ 的图象与 x 轴没有公共点，且方程 $x^2+x+2=0$ 没有实根．真命题；$p\vee q$：函数 $y=x^2+x+2$ 的图象与 x 轴没有公共点或方程 $x^2+x+2=0$ 没有实根．真命题；$\neg p$：函数 $y=x^2+x+2$ 的图象与 x 轴有公共点．假命题.

2．C　3．A

4．（1）任意一个三角形的三个内角不能都等于60°.

（2）存在一个能够被3整除的整数，不能够被6整除.

（3）$\forall\theta\in\mathbf{R}$，函数 $y=\sin(2x+\theta)$ 都不是偶函数.

（4）$\exists x$，$y\in\mathbf{R}$，$|x+1|+|y-1|\leqslant0$.

5．（1）$\neg p$：存在一个有理数不是实数．为假命题，属特称命题.

（2）$\neg p$：所有的三角形都不是直角三角形．为假命题，属全称命题.

（3）$\neg p$：有的二次函数的图象与 y 轴不相交．为假命题，属特称命题.

（4）$\neg p$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x\leqslant0$ 为真命题，属特称命题.

6．解：$\because y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$\therefore p$：$a>1$.

又不等式 $ax^2-ax+1>0$，$\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

$\therefore\Delta<0$，即 $a^2-4a<0$，$\therefore 0<a<4$，

$\therefore q$：$0<a<4$.

命题 p 且 q 为假，p 或 q 为真，那么 p、q 中有且只有一个为真，一个为假.

（1）若 p 真，q 假，则 $a\geqslant4$；

（2）若 p 假，q 真，则 $0<a\leqslant1$.

所以 a 的取值范围为 $(0,1]\cup[4,+\infty)$.

第二章　函　　数

第一节　函数的概念及其表示

复习要点

1. 函数的有关概念

（1）设集合A是一个非空的数集，对A内的任意数x，按照确定的法则f，都有唯一确定的数值y与它对应，则这种对应关系叫做集合A上的一个函数，记作$y=f(x)$，$x\in A$，其中x叫做自变量，自变量取值的范围（数集A）叫做这个函数的定义域.

（2）如果自变量取值a，则由法则f确定的值y称为函数在a处的函数值，记作$y=f(a)$或$y|_{x=a}$，所有函数值构成的集合$\{y|y=f(x),\ x\in A\}$叫做这个函数的值域.

2. 映射定义

设A、B是两个非空集合，如果按照某种对应法则f，对A内任意一个元素x，在B中有且仅有一个元素y与x对应，则称f是集合A到集合B的映射．函数可理解为数集到数集的映射.

3. 函数的表示方法

表示函数的常用方法有：解析法、图象法和列表法.

4. 分段函数

若函数在其定义域的不同子集上，因对应法则不同而分别用几个不同的式子来表示，这种函数称为分段函数．分段函数的定义域等于各段函数的定义域的并集，其值域等于各段函数的值域的并集，分段函数虽由几个部分组成，但它表示的是一个函数.

典型示例

【例1】 试判断以下各组函数是否表示同一函数？

（1）$f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$；

（2）$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$g(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$

（3）$f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+1}$，$g(x)=\sqrt{x^2+x}$；

（4）$f(x)=x^2-2x-1$，$g(t)=t^2-2t-1$.

解：（1）由于$f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，　$g(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$，故它们的值域及对应法则都不相同，所以它们不是同一函数.

（2）由于函数$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而$g(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$的定义域为$\mathbf{R}$，所以它们不是同一函数.

（3）由于函数$f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+1}$的定义域为$\{x|x\geqslant 0\}$，而$g(x)=\sqrt{x^2+x}$的定义域为$\{x|x\leqslant -1$或$x\geqslant 0\}$，它们的定义域不同，所以它们不是同一函数.

（4）函数的定义域、值域和对应法则都相同，所以它们是同一函数.

方法总结：形式上相同的两个函数不一定为同一个函数，两个函数相同，本质为定义域与对应法则相同（此时值域也必然相同）.

【例2】（1）$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & x\geqslant 4\\ f(x+1), & x<4\end{cases}$，

则$f(\log_2 3)=$______.

（2）$f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant -1\\ 2x, & -1<x<2\\ \dfrac{x^2}{2}, & x\geqslant 2\end{cases}$，

若$f(a)=3$，则$a=$______.

解：（1）$\because 1<\log_2 3<2$，

$\therefore f(\log_2 3)=f(\log_2 3+1)$

$=f(\log_2 3+2)=f(\log_2 3+3)$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 3+3}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{24}$.

（2）当$a\leqslant -1$时，$f(a)=a+2$，

由$f(a)=3$，得$a=1$，

与$a\leqslant -1$矛盾，舍去.

当$-1<a<2$时，$f(a)=2a$，由$f(a)=3$，得$a=\dfrac{3}{2}$.

当$a\geqslant 2$时，$f(a)=\dfrac{a^2}{2}$，由$f(a)=3$，得$a=\pm\sqrt{6}$，

$\therefore a=\sqrt{6}$.

综上，$a=\dfrac{3}{2}$或$\sqrt{6}$.

方法总结：分段函数分段处理，将符合题意每一段上情况都考虑周全，综合起来解题.

【例3】（1）已知函数$y=f(x)$的定义域为（0，1），求函数$y=f(2x+1)$的定义域.

（2）已知函数$y=f(2x+1)$的定义域为（0，1），求函数$y=f(x)$的定义域.

解：（1）$\because$函数$y=f(x)$的定义域为（0，1），

$\therefore$对于$y=f(2x+1)$有$0<2x+1<1$，解得$-\dfrac{1}{2}<x<0$.

即$y=f(2x+1)$定义域为$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$.

（2）$\because$函数$y=f(2x+1)$的定义域为（0，1），

$\therefore 1<2x+1<3$，即$y=f(x)$定义域为（1，3）.

方法总结：① f后面括号里内层函数值域相同，复合函数$y=f(ax+b)$的自变量仍为x，求其定义域即求x的范

围；②先求 f 后面括号里内层函数的值域，再求x的范围.

【例4】求下列函数的解析式：

（1）已知$f(x)$为二次函数，且$f(3x+1)=9x^2-6x+5$，求$f(x)$.

（2）已知$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$，求$f(x)$.

（3）已知$f(2^x)=2x+1$，求$f(x)$.

（4）已知$3f(x)+5f\left(\frac{1}{x}\right)=2x+1$，求$f(x)$.

解：(1) 方法一：$f(3x+1)=9x^2-6x+5=(3x+1)^2-12x+4=(3x+1)^2-4(3x+1)+8$，

所以 $f(x)=x^2-4x+8$.

方法二：令$3x+1=t$，则$x=\frac{t-1}{3}$，

由$f(3x+1)=9x^2-6x+5$，

得$f(t)=9\left(\frac{t-1}{3}\right)^2-6\left(\frac{t-1}{3}\right)+5=t^2-4t+8$，

$\therefore f(x)=x^2-4x+8$.

方法三：设$f(x)=ax^2+bx+c$，

$\therefore f(3x+1)=a(3x+1)^2+b(3x+1)+c$

$=9ax^2+(6a+3b)x+a+b+c$,

又$\because f(3x+1)=9x^2-6x+5$，$\therefore\begin{cases}9a=9\\6a+3b=-6\\a+b+c=5\end{cases}$.

$\therefore$得$\begin{cases}a=1\\b=-4\\c=8\end{cases}$. $\therefore f(x)=x^2-4x+8$.

(2) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right]$,

又$\because x+\frac{1}{x}\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$,

$\therefore f(x)=x(x^2-3)=x^3-3x$，$x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

(3) 令 $2^x=t$,则$x=\log_2 t(t>0)$,

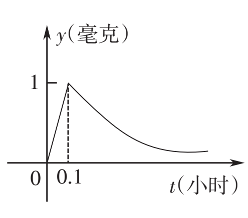
$\therefore f(t)=2\log_2 t+1(t>0)$，$\therefore f(x)=2\log_2 x+1(x>0)$.

(4) $\begin{cases}3f(x)+5f\left(\frac{1}{x}\right)=2x+1\\3f\left(\frac{1}{x}\right)+5f(x)=\frac{2}{x}+1\end{cases}$,

解得 $f(x)=\frac{-3x^2+x+5}{8x}$.

方法总结：①若已知函数 $f(x)$的类型，常采用待定系数法；②若已知 $f[g(x)]$表达式，常采用换元法或采用配凑法；③求解时注意定义域限制.

【例5】为了预防流感，某学校对教室用药熏消毒法进行消毒，已知药物释放过程中，室内每立方米空气中的含药量y（毫克）与时间t（小时）成正比；药物释放完毕后，y与t的函数关系式为$y=\left(\frac{1}{16}\right)^{t-a}$（$a$为常数），如图所示．根据图中提供的信息，回答下列问题：



（1）从药物释放开始，每立方米空气中的含药量y（毫克）与时间t（小时）之间的函数关系式为________.

（2）根据测定，当空气中每立方米的含药量降低到0.25毫克以下时，学生方可进教室，那么从药物释放开始，至少需要经过________小时，学生方能回教室.

解：(1) 当$0\leqslant t\leqslant 0.1$时，设$y=kt$，

将（0.1，1）代入得k=10.

当$t>0.1$时，$y=\left(\frac{1}{16}\right)^{t-a}$，

将（0.1，1）代入可得a=0.1.

$\therefore y$与t的关系式为$y=\begin{cases}10t\ (0\leqslant t\leqslant 0.1)\\\left(\frac{1}{16}\right)^{t-0.1}\ (t>0.1)\end{cases}$.

(2) 由$\left(\frac{1}{16}\right)^{t-0.1}<0.25=\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$得$t>0.6$.

故至少需要经过0.6小时，学生方能回教室.

拓展提高

1．函数$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)}$的定义域是　（　　）

A．$[-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2}]$

B．$(-\sqrt{3},-1)\cup(1,\sqrt{2})$

C．$[-2,-1]\cup(1,2)$

D．$(-2,-1)\cup(1,2)$

2．设函数$f(x)=\begin{cases}x^2-4x+6, & x\geqslant 0\\x+6, & x<0\end{cases}$，则不等式$f(x)>f(1)$的解集是　（　　）

A．$(-3,1)\cup(3,+\infty)$

B．$(-3,1)\cup(2,+\infty)$

C　$(-2,0)\cup(1,3)$

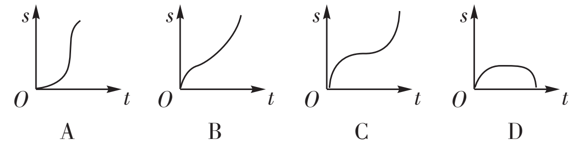
D．$(-\infty,-3)\cup(1,3)$

3．某学校要召开学生代表大会，规定各班每10人推选一名代表，当各班人数除以10的余数大于6时再增选一名代表．那么，各班可推选代表人数y与该班人数x之间的函数关系用取整函数$f(x)=[x]$（$[x]$表示不大于x的最大整数）可以表示为　（　　）

A．$y=\left[\frac{x}{10}\right]$　　B．$y=\left[\frac{x+3}{10}\right]$

C．$y=\left[\frac{x+4}{10}\right]$　　D．$y=\left[\frac{x+5}{10}\right]$

4．汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车，若把这一过程中汽车的行驶路程s看作时间t的函数，其图象可能是　（　　）



A　　B　　C　　D

5．设 $f(x)$是 R 上的函数，满足 $f(0)=1$,并且对任意的实数 x，y 都有 $f(x-y)=f(x)-y(2x-y+1)$，求 $f(x)$的表达式.

6．(1) 已知 $f(1-\cos x)=\sin^2 x$，求 $f(x)$；

(2) 已知 $f(x)$是二次函数，若 $f(0)=0$，且 $f(x+1)=f(x)+x+1$，试求 $f(x)$的表达式.

答案

1．A　2．A　3．B　4．A

5．方法一：设 $x=y$，得 $f(0)=f(x)-x(2x-x+1)$，所以 $f(x)=x^2+x+1$.

方法二：令 $x=0$，得 $f(0-y)=f(0)-y(-y+1)$，即 $f(-y)=1-y(-y+1)$.

又将 $-y$ 用 x 代换到上式中得 $f(x)=x^2+x+1$.

6．解：(1) ∵ $f(1-\cos x)=\sin^2 x=1-\cos^2 x$，

令 $1-\cos x=t$，则 $\cos x=1-t$.

∵$-1\leqslant\cos x\leqslant 1$，∴$0\leqslant 1-\cos x\leqslant 2$，∴$0\leqslant t\leqslant 2$，

∴ $f(t)=1-(1-t)^2=-t^2+2t$ $(0\leqslant t\leqslant 2)$，

故 $f(x)=-x^2+2x$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

(2) 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$，

由 $f(0)=0$ 知 $c=0$，$f(x)=ax^2+bx$.

又由 $f(x+1)=f(x)+x+1$，

得 $a(x+1)^2+b(x+1)=ax^2+bx+x+1$，

即 $ax^2+(2a+b)x+a+b=ax^2+(b+1)x+1$，

故有 $\begin{cases}2a+b=b+1\\a+b=1\end{cases}\Rightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$.

因此，$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x$.

第二节　函数的值域

复习要点

常见函数的值域：

1．$y=kx+b$ $(k\neq 0)$的值域为 R；

2．$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的值域为 $\left\{y|y\geqslant\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right\}$；

3．$y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$的值域为 $\{y|y\neq 0\}$；

4．$y=\log_a x$ $(a>0，a\neq 1)$的值域为 R；

5．$y=a^x$ $(a>0，a\neq 1)$的值域为 $(0，+\infty)$；

6．$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的值域为 $[-1，1]$；

7．$y=\tan x$ 的值域为 R；

8．$y=x+\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$的值域为 $(-\infty，-2]\cup[2，+\infty)$.

典型示例

【例1】(1) 求 $y=2x-1-\sqrt{13-4x}$ 的值域.

(2) 求 $y=4^x+2^{x+1}$，$0\leqslant x\leqslant 2$ 的值域.

(3) 求 $y=(\log_3 x)^2-2\log_3 27x^2-6$，$3\leqslant x\leqslant 243$ 的值域.

解：(1) 方法一：令 $t=\sqrt{13-4x}$，则 $x=\dfrac{13-t^2}{4}$ $(t\geqslant 0)$，

$\therefore y=2\cdot\dfrac{13-t^2}{4}-t-1=-\dfrac{1}{2}t^2-t+\dfrac{11}{2}=-\dfrac{1}{2}(t+1)^2+6$，

$\therefore t=0$ 时，$y_{max}=-\dfrac{1}{2}(0+1)^2+6=\dfrac{11}{2}$，

∴其值域为 $\left(-\infty，\dfrac{11}{2}\right]$.

方法二：$y_1=2x-1$ 在 $\left(-\infty，\dfrac{13}{4}\right]$ 单调递增，

$y_2=-\sqrt{13-4x}$ 在 $\left(-\infty，\dfrac{13}{4}\right]$ 单调递增，

$\therefore y=2x-1-\sqrt{13-4x}$ 在定义域内单调递增.

当 $x=\dfrac{13}{4}$ 时，$y_{max}=\dfrac{11}{2}$，即其值域为 $\left(-\infty，\dfrac{11}{2}\right]$.

(2) 方法一：令 $t=2^x$，$0\leqslant x\leqslant 2$，则 $1\leqslant t\leqslant 4$，

$\therefore y=t^2+2t=(t+1)^2-1$，当 $t=1$ 时，$y_{min}=3$，

当 $t=4$ 时，$y_{max}=24$，∴其值域为 $[3，24]$.

方法二：$y_1=4^x$ 在 $[0，2]$ 单调递增，

$y_1=2^{x+1}$ 在 $[0，2]$ 单调递增，

$\therefore y=4^x+2^{x+1}$ 在 $[0，2]$ 单调递增.

当 $x=0$ 时，$y_{min}=3$，当 $x=2$ 时，$y_{max}=24$，

∴其值域为 $[3，24]$

(3) $y=\log_3{}^2x-2\log_3 27x^2-6$

$=\log_3{}^2x-2(\log_3 27+\log_3 x^2)-6$

$=\log_3{}^2x-4\log_3 x-12$

令 $t=\log_3 x$，$3\leqslant x\leqslant 243$，则 $1\leqslant t\leqslant 5$，

$\therefore y=t^2-4t-12=(t-2)^2-16$，

当 $t=2$ 时，$y_{min}=-16$，当 $t=5$ 时，$y_{max}=-7$，

∴其值域为 $[-16，-7]$.

方法总结：解析式中如果隐含有平方关系，可通过换元转化为二次形式的最值问题，注意保证换元的等价性.

【例2】求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{2x-3}{x+5}$；(2) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

解：(1) $y=\dfrac{2x-3}{x+5}=\dfrac{2(x+5)-13}{x+5}=2-\dfrac{13}{x+5}$，

$\because x+5\neq 0$，$\therefore \dfrac{13}{x+5}\neq 0$，$y\neq 2$，

$\therefore$ 值域为（$-\infty$，2）$\cup$（2，$+\infty$）.

方法总结：$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的值域为 $\left\{y\middle|y\neq\dfrac{a}{c}\right\}$.

（2）方法一：$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}=1-\dfrac{1}{x^2+1}$，

$\because 0<\dfrac{1}{x^2+1}\leqslant 1$，

$\therefore y\in[0,1)$,即值域为$[0,1)$.

方法二：$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}\Leftrightarrow(x^2+1)y=x^2\Leftrightarrow x^2(1-y)=y$，

当$y=1$时，等式不成立，

当$y\neq 1$时，$x^2=\dfrac{y}{1-y}\geqslant 0$，

得$y\in[0,1)$，即值域为$[0,1)$.

方法三：$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}\Leftrightarrow(x^2+1)y=x^2\Leftrightarrow x^2(1-y)-y=0$，

当$y=1$时，关于x方程无解，

$y\neq 1$时，由$\Delta=4y(1-y)\geqslant 0$，得$y\in[0,1)$，即值域为$[0,1)$.

方法总结：上述求值域方法称作判别式法，常用来处理下列三类函数的值域问题.

$y=\dfrac{dx+e}{ax^2+bx+c}$，$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$，$y=\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$.

【例3】（1）求函数 $y=\log_{0.5}\left(x^2+\dfrac{1}{x^2-3}+5\right)(x>\sqrt{3}$或$x<-\sqrt{3})$ 的值域.

（2）求函数 $y=\log_{0.5}\left(x^2+\dfrac{1}{x^2-3}+5\right)(x\geqslant 3)$ 的值域.

（3）求函数 $y=2x+\dfrac{1}{3x-3}$ 的值域.

解：（1）$\because x^2-3+\dfrac{1}{x^2-3}+8\geqslant 2+8=10$，

（当且仅当$(x^2-3)^2=1$，即 $x=\pm 2$ 等号成立）

$\therefore y\leqslant\log_{0.5}10$，值域为$(-\infty,\ \log_{0.5}10]$.

（2）令 $t=x^2-3$（$x\geqslant 3$），则 $t\geqslant 6$，

令 $y=t+\dfrac{1}{t}+8$（$t\geqslant 6$），

由对勾函数单调性可知 $y=t+\dfrac{1}{t}+8$ 在 $[6,+\infty)$ 上递增，

$y_{\min}=6+\dfrac{1}{6}+8=\dfrac{85}{6}$，

所求函数的最大值为 $\log_{0.5}\dfrac{85}{6}$，值域为$\left(-\infty,\ \log_{0.5}\dfrac{85}{6}\right]$.

（3）$y=2x+\dfrac{1}{3x-3}=2(x-1)+\dfrac{1}{3x-3}+2$，

当 $x>1$时，

$y=2(x-1)+\dfrac{1}{3x-3}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

（当且仅当 $x=1+\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时，取等号）

当 $x<1$时，

$y=-\left(2(1-x)+\dfrac{1}{3-3x}\right)\leqslant -2\sqrt{\dfrac{2}{3}}=-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

（当且仅当 $x=1-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时，取等号）

所求值域为$\left(-\infty,\ -\dfrac{2\sqrt{6}}{3}+2\right]\cup\left[\dfrac{2\sqrt{6}}{3}+2,\ +\infty\right)$.

方法总结：①如果解析式形式为分式与整式相结合，并且整式与与分母相类似（如本题中 x^2-3 与 $\dfrac{1}{x^2-3}$），可将整式配凑为分母的形式，利用重要不等式求最值；②注意验证等号能否取到.

【例4】（1）求 $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ 的值域.

（2）求 $y=x+\sqrt{4-x^2}$ 的值域.

解：（1）设 $x=\cos^2\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，

则 $y=|\cos\theta|+|\sin\theta|=\cos\theta+\sin\theta$

$=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\theta+\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\theta\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\because\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{3}{4}\pi$，$\therefore 1\leqslant y\leqslant\sqrt{2}$，即值域为$\left[1,\sqrt{2}\right]$.

方法总结：形如 $y=\sqrt{ax}+\sqrt{b-cx}$ 形式的函数，均可三角换元，通过换元后可得到正余弦的齐次形式，然后通过辅助角公式，根据角的范围，得到值域.

（2）解：设 $x=2\cos\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，

（系数为2，主要是照顾根号化解的简便性）

则 $y=2\cos\theta+2|\sin\theta|$

$=2\cos\theta+2\sin\theta=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$

$=2\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\theta+\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\theta\right)=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\because\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{5}{4}\pi$，$\therefore -2\leqslant y\leqslant 2\sqrt{2}$，即值域为$\left[-2,\ 2\sqrt{2}\right]$.

方法总结：$y=\sqrt{a-bx^2}-cx+d$ 形式的求值域问题，均可采取三角换元.

【例5】已知 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\ln x$.

（1）求函数在$[1,e]$的最值.

（2）求证：在区间$[1,+\infty)$上，函数 $f(x)$的图象在 $g(x)=\dfrac{2}{3}x^3$ 图象的下方.

解:（1）$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\ln x$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上递增，

$\therefore$ 当$x\in[1,e]$时，$f_{\min}=f(1)=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore f_{\max}=f(e)=\dfrac{1}{2}e^2+1$.

（2）设 $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\ln x-\dfrac{2}{3}x^3$，

$F'(x)=x+\dfrac{1}{x}-2x^2=\dfrac{(1-x)(1+x+2x^2)}{x}$，

$\because x>1$，$\therefore F'(x)<0$

$\therefore$在$(1,+\infty)$上，$F(x)$单调递减，

$\therefore$在$(1,+\infty)$上，$F(x)<F(1)<-\frac{1}{6}<0$，

即$\frac{1}{2}x^2+\ln x<\frac{2}{3}x^3$，

即$f(x)$的图象恒在$g(x)$图象的下方.

方法总结：图象的高低问题可转化为最值问题处理.

拓展提高

1．求下列函数的值域：

（1）$y=\sqrt{-x^2-6x-5}$；

（2）$y=\frac{a^x-1}{a^x+1}(a>0,a\neq 1)$；

（3）$y=x+4\sqrt{1-x}$；

（4）$y=\frac{2x^2-x+1}{2x-1}\left(x>\frac{1}{2}\right)$.

2．已知函数$y=\frac{ax+b}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$的值域为$[-1,4]$，求常数$a$，$b$.

3．设函数$f(x)=\log_2\frac{x+1}{x-1}+\log_2(x-1)+\log_2(p-x)$.

（1）求函数的定义域；

（2）问$f(x)$是否存在最大值与最小值？如果存在，请把它写出来；如果不存在，请说明理由.

4．设$f(x)=\frac{2x^2}{x+1}$，$g(x)=ax+5-2a$（$a>0$）.

（1）求$f(x)$在$x\in[0,1]$上的值域；

（2）若对于任意$x_1\in[0,1]$，总存在$x_0\in[0,1]$，使得$g(x_0)=f(x_1)$成立，求a的取值范围.

答案

1．解：（1）设$\mu=-x^2-6x-5$（$\mu\geqslant 0$），

则原函数可化为$y=\sqrt{\mu}$.

又$\because \mu=-x^2-6x-5=-(x+3)^2+4\leqslant 4$，

$\therefore 0\leqslant\mu\leqslant 4$，故$\sqrt{\mu}\in[0,2]$，

$\therefore y=\sqrt{-x^2-6x-5}$的值域为$[0,2]$.

（2）$(-1,1)$

（3）设$t=\sqrt{1-x}\geqslant 0$，则$x=1-t^2$，

∴原函数可化为 $y=1-t^2+4t=-(t-2)^2+5\ (t\geqslant 0)$，

∴ $y\leqslant 5$，∴原函数值域为 $(-\infty, 5]$.

（4） $y=\dfrac{2x^2-x+1}{2x-1}=\dfrac{x(2x-1)+1}{2x-1}$

$$=x+\frac{1}{2x-1}=x-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2},$$

∵ $x>\dfrac{1}{2}$，∴ $x-\dfrac{1}{2}>0$，

$$\therefore x-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}\geqslant 2\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)}}=\sqrt{2},$$

当且仅当 $x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}$ 时，即 $x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

∴ $y\geqslant\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$，∴原函数的值域为 $[\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}, +\infty)$.

2．解：$y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}\Leftrightarrow yx^2+y=ax+b\Leftrightarrow yx^2-ax+y-b=0$，

∵ $x\in\mathbf{R}$　∴ $\Delta=(-a)^2-4y(y-b)\geqslant 0$，

即 $4y^2-4by-a^2\leqslant 0$.

由题意：$y\in[-1, 4]\Leftrightarrow (y+1)(y-4)\leqslant 0\Leftrightarrow y^2-3y-4\leqslant 0\Leftrightarrow 4y^2-12y-16\leqslant 0$，

所以 $4b=12$，$a^2=16$，即 $b=3$，$a=\pm 4$.

3．解：（1）由 $\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}>0\\ x-1>0\\ p-x>0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x>1\\ x<p\end{cases}$ ①

当 $p\leqslant 1$ 时，①不等式解集为 $\varnothing$；

当 $p>1$ 时，①不等式解集为 $\{x|1<x<p\}$.

∴ $f(x)$ 的定义域为 $(1, p)\ (p>1)$.

（2）原函数即

$f(x)=\log_2[(x+1)(p-x)]$

$$=\log_2\left[-\left(x-\frac{p-1}{2}\right)^2+\frac{(p+1)^2}{4}\right],$$

当 $\dfrac{p-1}{2}\leqslant 1$，即 $1<p\leqslant 3$ 时，

函数 $f(x)$ 既无最大值又无最小值；

当 $1<\dfrac{p-1}{2}<p$，即 $p>3$ 时，

函数 $f(x)$ 有最大值 $2\log_2(p+1)-2$，但无最小值.

4．解：（1）方法一：$f'(x)=\dfrac{4x(x+1)-2x^2}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2}\geqslant 0$ 在 $x\in[0, 1]$ 上恒成立.

∴ $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，∴ $f(x)$ 值域 $[0, 1]$.

方法二：$f(x)=\dfrac{2x^2}{x+1}=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}, & x\in(0, 1]\end{cases}$，

用复合函数求值域.

方法三：$f(x)=\dfrac{2x^2}{x+1}=\dfrac{2(x+1)^2-4(x+1)+2}{x+1}$

$=2(x+1)+\dfrac{2}{x+1}-4$，

用对勾函数求值域.

（2）$f(x)$ 值域 $[0, 1]$，

$g(x)=ax+5-2a\ (a>0)$ 在 $x\in[0, 1]$ 上的值域为 $[5-2a, 5-a]$.

由条件，只须 $[0, 1]\subseteq[5-2a, 5-a]$，

∴ $5-2a\leqslant 0$ 且 $5-a\geqslant 1\Rightarrow\dfrac{5}{2}\leqslant a\leqslant 4$.

第三节　函数的奇偶性

复习要点

1．奇偶性定义

若对于定义域内任意的 x，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数（变式：$f(-x)+f(x)=0$）.

若对于定义域内任意的 x，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数（变式：$f(-x)-f(x)=0$）.

如果函数 $f(x)$ 不具有上述性质，则 $f(x)$ 不具有奇偶性. 如果函数同时具有上述两条性质，则 $f(x)$ 既是奇函数，又是偶函数.

2．奇偶性的性质

（1）对称性：奇函数关于原点对称，反过来也成立，即关于原点对称的函数也是奇函数.

偶函数关于 y 轴对称，反过来也成立，即关于 y 轴对称的函数也是偶函数.

（2）组合关系：设 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域分别是 D_1，D_2，那么在它们的公共定义域上：

奇+奇=奇，奇×奇=偶，偶+偶=偶，偶×偶=偶，奇×偶=奇.

（3）$f(x)$ 为奇函数，且在 $x=0$ 处有定义，则有 $f(0)=0$，$f(x)$ 为偶函数，则有 $f(x)=f(|x|)$.

（4）$f(x)$ 为奇函数，$f(x)+a\ (a\neq 0)$ 为非奇非偶函数，$f(x)$ 为偶函数，$f(x)+a\ (a\neq 0)$ 为偶函数.

典型示例

【例1】 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=|x+1|-|x-1|$；

（2）$f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；

（3）$f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$；

（4）$f(x)=\begin{cases}x(1-x) & (x<0)\\ x(1+x) & (x>0)\end{cases}$；

（5）$f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$；