# 河北省

# 高中总复习

GAO ZHONG ZONG FU XI

理科

## 数学

河北人民出版社组织编写

河北出版传媒集团
河北人民出版社

# 目　录

## 讲　义

## 一课一练(以下为活页)

# 讲义

## 第一章　集合与常用逻辑用语

### 第一节　集合的概念及运算

#### 复习要点

**1. 集合与元素**

集合元素的三个特征：确定性、互异性、无序性.

（1）元素与集合的关系是属于或不属于关系，用符号$\in$或$\notin$表示.

（2）集合的表示法：列举法、描述法、Venn图.

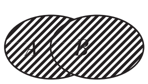
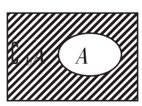
（3）常见集合的符号表示

| 数集 | 自然数集 | 正整数集 | 整数集 | 有理数集 | 实数集 |
|---|---|---|---|---|---|
| 符号 | $\mathbf{N}$ | $\mathbf{N}_+$或$\mathbf{N}^*$ | $\mathbf{Z}$ | $\mathbf{Q}$ | $\mathbf{R}$ |

**2. 集合间的基本关系**

$A \subsetneqq B$或$B \supsetneqq A$、$\varnothing \subseteq B$、$\varnothing \subsetneqq B$（$B \neq \varnothing$）

**3. 集合的基本运算**

| 运算<br>表示 | 集合的并集 | 集合的交集 | 集合的补集 |
|---|---|---|---|
| 符号表示 | $A \cup B$ | $A \cap B$ | 若全集为$U$,则集合$A$的补集为$\complement_U A$ |
| 图形表示 |   |   |   |
| 数学表达式 | $A \cup B=\left\{x \middle\vert \begin{matrix} x \in A或 \\ x \in B \end{matrix}\right\}$ | $A \cap B=\left\{x \middle\vert \begin{matrix} x \in A且 \\ x \in B \end{matrix}\right\}$ | $\complement_U A=\left\{x \middle\vert \begin{matrix} x \in U且 \\ x \notin A \end{matrix}\right\}$ |

**4. 运算结论**

$A \cap B=A \Leftrightarrow A \subseteq B$　　$A \cup B=B \Leftrightarrow A \subseteq B$

用这两个结论时一定要注意不要忘记集合$A=\varnothing$这一特例.

**5. 概念辨析**

注意$\varnothing$，$\{\varnothing\}$，$\{0\}$的区别：

集合$\{\varnothing\}$不是空集，空集是不含任何元素的集合，而$\{\varnothing\}$中有一个元素$\varnothing$.集合$\{\varnothing\}$与$\{0\}$的区别是他们的元素不同，其中$\{\varnothing\}$中的元素是$\varnothing$，$\{0\}$中的元素是0，所以$\varnothing \in \{\varnothing\}$同时$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$.

#### 典型示例

**【例1】** 若$a$，$b \in \mathbf{R}$，集合$\{1,\ a+b,\ a\}=\left\{0,\ \dfrac{b}{a},\ b\right\}$.求$b^{2012}-a^{2012}$的值.

解：由$\{1,\ a+b,\ a\}=\left\{0,\ \dfrac{b}{a},\ b\right\}$可知$a \neq 0$，则只能$a+b=0$，则有以下对应关系：

$\begin{cases} a+b=0 \\ \dfrac{b}{a}=a \\ b=1 \end{cases}$ ①或$\begin{cases} a+b=0 \\ b=a \\ \dfrac{b}{a}=1 \end{cases}$ ②

由①得$\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$符合题意；②无解.

$\therefore b^{2012}-a^{2012}=0$.

方法总结：本题考察集合的性质也可经过分析得出$a \neq 0$，则只能是$a+b=0$，所以$\dfrac{b}{a}=-1$，所以$a=-1$，所以$b=1$.综合分析题目能更快捷更准确的得到答案.

**【例2】** $A=\{x \mid y=x^2+1\}$，$B=\{y \mid y=x^2+1\}$，

$C=\{(x,\ y) \mid y=x^2+1\}$，$D=\{x \mid y=2x+1,\ 1<y<2\}$

试求$A \cap B$，$B \cap C$，$B \cap D$.

解：可知$A=\{x \mid y=x^2+1\}=\mathbf{R}$，

$B=\{y \mid y=x^2+1\}=\{y \mid y \geqslant 1\}=[1,\ +\infty)$，

$D=\{x \mid y=2x+1,\ 1<y<2\}=\left\{x \middle\vert 0<x<\dfrac{1}{2}\right\}=\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，

$\therefore A \cap B=[1,\ +\infty)$，$B \cap C=\varnothing$，$B \cap D=\varnothing$.

**【例3】** 已知集合$A=\{x \mid x^2-3x-10 \leqslant 0\}$.

（1）若$B \cup A=A$，$B=\{x \mid m+1 \leqslant x \leqslant 2m-1\}$，求实数$m$的取值范围；

（2）若$B \cap A=A$，$B=\{x \mid m-6 \leqslant x \leqslant 2m-1\}$，求实数$m$的取值范围；

（3）是否存在实数$m$，使得$B=\{x \mid m-6 \leqslant x \leqslant 2m-1\}$，$A=B$？若存在，求出实数$m$的值，若不存在，请说明理由.

解：由$A=\{x \mid x^2-3x-10 \leqslant 0\}$，得$A=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 5\}$.

（1）若$B=\varnothing$，则$2m-1<m+1$，即$m<2$.

此时满足$B \subseteq A$.

若$B \neq \varnothing$，

则有$\begin{cases} 2m-1 \geqslant m+1 \\ m+1 \geqslant -2 \\ 2m-1 \leqslant 5 \end{cases}$，解得$2 \leqslant m \leqslant 3$.

综上，知$m$的取值范围是$(-\infty,\ 3]$.

（2）$\because A \subseteq B$，且$A \neq \varnothing$，

$\therefore \begin{cases} 2m-1 \geqslant m-6 \\ m-6 \leqslant -2 \\ 2m-1 \geqslant 5 \end{cases}$，解得$3 \leqslant m \leqslant 4$.

故 $m$ 的取值范围是[3，4].

（3）不存在，理由如下：

若 $A=B$，则必有 $\begin{cases}2m-1=5\\m-6=-2\end{cases}$，此方程组无解，

即不存在 $m$ 值，使得 $A=B$.

注：①求范围问题，边界值细分析；②一用 $A\subseteq B$ 就要小心 $A=\varnothing$.

【例4】已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0，x\in \mathbf{R}\}$，

$B=\{x|x^2-2mx+m^2-4\leqslant 0，x\in \mathbf{R}\}$.

（1）若 $A\cap B=[1，3]$，求实数 $m$ 的值；

（2）若 $A\subseteq \complement_{\mathbf{R}}B$，求实数 $m$ 的取值范围.

解：$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|m-2\leqslant x\leqslant m+2\}$.

（1）$\because A\cap B=[1，3]$，$\therefore \begin{cases}m-2=1\\m+2\geqslant 3\end{cases}$，得 $m=3$.

（2）$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x<m-2或x>m+2\}$.

$\because A\subseteq \complement_{\mathbf{R}}B$，$\therefore m-2>3或m+2<-1$.

$\therefore m>5或m<-3$.

## 拓展提高

1．已知 $M=\{x|x-a=0\}$，$N=\{x|ax-1=0\}$，若 $M\cap N=N$，则实数 $a$ 的值为（　　）

A．1　B．−1　C．1或−1　D．0或1或−1

2．设全集为 $\mathbf{R}$，若集合 $A=\{x||x-2|\leqslant 3\}$，$B=\{x|y=\lg(x-1)\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=$（　　）

A．$\{x|1<x\leqslant 5\}$

B．$\{x|x\leqslant -1或x>5\}$

C．$\{x|x\leqslant 1或x>5\}$

D．$\{x|-1\leqslant x\leqslant 5\}$

3．已知 $P=\left\{\vec{a}\middle|\vec{a}=(1，0)+m(0，1)，m\in \mathbf{R}\right\}$，$Q=\left\{\vec{b}\middle|\vec{b}=(1，1)+n(-1，1)，n\in \mathbf{R}\right\}$，则 $P\cap Q=$（　　）

A．$\{(1，1)\}$　B．$\{(-1，1)\}$

C．$\{(1，0)\}$　D．$\{(0，1)\}$

4．在集合 $\{a，b，c，d\}$ 上定义两种运算 $\oplus$ 和 $\otimes$ 如下：

| $\oplus$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $c$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $b$ | $d$ | $b$ |

| $\otimes$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $a$ | $c$ | $c$ | $a$ |
| $d$ | $a$ | $d$ | $a$ | $d$ |

那么 $d\otimes(a\oplus c)=$（　　）

A．$a$　B．$b$　C．$c$　D．$d$

5．某班共30人，其中15人喜爱篮球运动，10人喜爱乒乓球运动，8人对这两项运动都不喜爱，则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为__________.

6．设集合 $A=\{x|x^2-2x+2m+4=0\}$，$B=\{x|x<0\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 $m$ 的取值范围为__________.

7．已知集合 $A=\{x|a+1\leqslant x\leqslant 2a-1\}$，集合 $B=\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x\leqslant 2\right\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 $a$ 的取值范围.

8．若集合 $A=\{x|x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x|x-m<0\}$.

（1）若 $m=3$，全集 $U=A\cup B$，试求 $A\cap(\complement_U B)$；

（2）若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 $m$ 的取值范围；

（3）若 $A\cap B=A$，求实数 $m$ 的取值范围.

### 答案

1．D　2．C　3．A　4．A　5．12

6．解：设 $M=\{m|关于 x 的方程 x^2-2x+2m+4=0 的两根均为非负实数\}$，

则 $\begin{cases}\Delta=-2m-3\geqslant 0\\x_1+x_2=2>0\\x_1\cdot x_2=2m+4\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow -2\leqslant m\leqslant -\frac{3}{2}$.

设全集 $U=\{m|\Delta\geqslant 0\}=\left\{m\middle|m\leqslant -\frac{3}{2}\right\}$，

$\because M=\left\{m\middle|-2\leqslant m\leqslant -\frac{3}{2}\right\}$，

$\therefore m$ 的取值范围是 $\complement_U M=\{m|m<-2\}$.

7．解：当 $a+1>2a-1$，

即 $a<2$ 时，$A=\varnothing$，满足条件；

当 $a+1\leqslant 2a-1$，即 $a\geqslant 2$ 时，

$\begin{cases}a+1>-\frac{1}{2}\\2a-1\leqslant 2\end{cases}$，解之得 $-\frac{3}{2}<a\leqslant\frac{3}{2}$，$\therefore a$ 不存在.

综上所述，实数 $a$ 的取值范围为 $a<2$.

8．解：（1）由 $x^2-2x-8<0$，得 $-2<x<4$，

$\therefore A=\{x|-2<x<4\}$.

当$m=3$时，由$x-m<0$，得$x<3$，$\therefore B=\{x|x<3\}$，

$\therefore U=A\cup B=\{x|x<4\}$，$\complement_U B=\{x|3\leqslant x<4\}$.

$\therefore A\cap(\complement_U B)=\{x|3\leqslant x<4\}$.

（2）$\because A=\{x|-2<x<4\}$，$B=\{x|x<m\}$，

又 $A\cap B=\varnothing$，$\therefore m\leqslant -2$.

（3）$\because A=\{x|-2<x<4\}$，$B=\{x|x<m\}$，

由 $A\cap B=A$，得$A\subseteq B$，$\therefore m\geqslant 4$.

## 第二节　命题、充分条件与必要条件

### 复习要点

**1．命题**

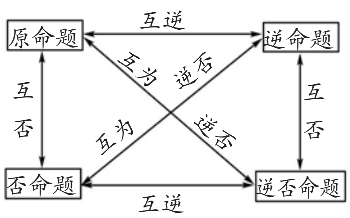
用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题，其中判断为真的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做假命题.

**2．四种命题及其关系**

（1）四种命题的定义及表述形式

| 命题 | 表述形式 |
|---|---|
| 原命题 | 若 $p$ 则 $q$ |
| 逆命题 | 若 $q$ 则 $p$ |
| 否命题 | 若 $\neg p$ 则 $\neg q$ |
| 逆否命题 | 若 $\neg q$ 则 $\neg p$ |

（2）四种命题间的相互关系




（3）四种命题的真假关系

①两个命题互为逆否命题，它们有相同的真假性；

②两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性没关系.

**3．充分条件、必要条件与充要条件**

（1）“若 $p$ 则 $q$ ”为真命题，记 $p\Rightarrow q$ ，则 $p$ 是 $q$ 的充分条件， $q$ 是 $p$ 的必要条件.

（2）如果既有$p\Rightarrow q$，又有$q\Rightarrow p$，记$p\Leftrightarrow q$，则$p$是$q$的充要条件，$q$也是$p$的充要条件.

（3）用集合判断，记 $p$ ， $q$ 对应的集合分别为$A$，$B$.

若 $A\subseteq B$ ，则 $p$ 是 $q$ 的充分条件；

若 $A\supseteq B$ ，则 $p$ 是 $q$ 的必要条件；

若 $A=B$ ，则 $p$ 是 $q$ 的充要条件；

**4．概念辨析**

“命题的否定”与“否命题”是两个不同的概念，如果原命题是“若 $p$ 则 $q$ ”，那么这个命题的否定式“若 $p$ 则 $\neg q$ ”，即只否定结论；而否命题则是“若 $\neg p$ 则 $\neg q$ ”即既否定条件又否定结论.

### 典型示例

**【例 1】**关于命题“若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下，则 $\{x|ax^2+bx+c<0\}\neq\varnothing$ ”的逆命题、否命题、逆否命题，下列结论成立的是　　　（　　）

A．都真　　　　B．都假

C．否命题真　　　　D．逆否命题真

解：对于原命题：“若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下，则 $\{x|ax^2+bx+c<0\}\neq\varnothing$ ”这是一个真命题，所以其逆否命题也为真命题，但其逆命题：“若 $\{x|ax^2+bx+c<0\}\neq\varnothing$ 则抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下”是一个假命题，因为当不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集非空时，可以有 $a>0$ ，即抛物线的开口可以向上．因此否命题也是假命题．选D.

**【例2】**设$0<x<\frac{\pi}{2}$，则“$x\sin^2x<1$”是“$x\sin x<1$”的　　（　　）

A．充分而不必要条件　　　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

解：先分清条件和结论，再分析由前者能否推出后者，由后者能否推出前者，即可判断出是什么条件．选B.

**【例3】**设命题$p$:$(4x-3)^2\leqslant 1$；命题$q$：$x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$．若$\neg p$是$\neg q$的必要不充分条件，求实数$a$的取值范围.

解：设 $A=\{x|(4x-3)^2\leqslant 1\}$ ，

$B=\{x|x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0\}$ ，

易知 $A=\{x|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\}$ ， $B=\{x|a\leqslant x\leqslant a+1\}$ ，

由 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，

从而 $p$是$q$ 的充分不必要条件，

即 $A\Rightarrow B$ ，$\therefore\begin{cases}a\leqslant\frac{1}{2}\\a+1\geqslant 1\end{cases}$ .

故所求实数 $a$ 的取值范围是$\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$.

**【例4】**已知 $P=\{x|x^2-8x-20\leqslant 0\}$ ，

$S=\{x|1-m\leqslant x\leqslant 1+m\}$ .

（1）是否存在实数 $m$，使$x\in P$是$x\in S$ 的充要条件，若存在，求出 $m$ 的范围；

（2）是否存在实数 $m$，使$x\in P$是$x\in S$ 的必要条件，若存在，求出 $m$ 的范围.

解：（1）由 $x^2-8x-20\leqslant 0$得$-2\leqslant x\leqslant 10$，

$\therefore P=\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$ .

$\because x\in P$是$x\in S$ 的充要条件，$\therefore P=S$，

$\therefore\begin{cases}1-m=-2\\1+m=10\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}m=3\\m=9\end{cases}$，$\therefore$这样的 $m$ 不存在.

（2）由题意 $x\in P$是$x\in S$ 的必要条件，则 $S\subseteq P$ .

$\therefore\begin{cases}1-m\geqslant -2\\1+m\leqslant 10\end{cases}$，$\therefore m\leqslant 3$ .

综上，可知 $m\leqslant 3$时， $x\in P$是$x\in S$ 的必要条件.

变式：本题条件不变，若 $\neg P$ 是 $\neg S$ 的必要不充分条件，求实数 $m$ 的取值范围.

解：由上题知 $P=\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$ ，

$\because\neg P$ 是 $\neg S$ 的必要不充分条件，

$\therefore P\Rightarrow S$ 且 $S$ 推不出 $P$，

$\therefore[-2,10]$真包含于$[1-m,1+m]$，

$\therefore\begin{cases}1-m\leqslant -2\\1+m>10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-m<-2\\1+m\geqslant 10\end{cases}$，

$\therefore m\geqslant 9$,即 $m$ 的取值范围是$[9,+\infty)$.

【例5】已知 $a>0$，设命题 $p$:函数 $y=a^x$ 在 **R** 上单调递减，$q$：不等式 $x+|x-2a|>1$ 的解集为 **R**，若 $p$和$q$ 中有且只有一个命题为真命题，求 $a$ 的取值范围.

解：由函数 $y=a^x$ 在 **R** 上单调递减知 $0<a<1$，

所以命题 $p$ 为真命题时 $a$ 的取值范围是 $0<a<1$，

令 $y=x+|x-2a|$，

则 $y=\begin{cases}2x-2a\ (x\geqslant 2a)\\2a\ (x<2a)\end{cases}$.

不等式 $x+|x-2a|>1$ 的解集为 **R**，只要 $y_{\min}>1$ 即可，

而函数 $y$ 在 **R** 上的最小值为 $2a$，所以 $2a>1$，

即 $a>\frac{1}{2}$，即 $q$ 真 $\Leftrightarrow a>\frac{1}{2}$.

若 $p$真$q$假，则 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，若 $p$ 假 $q$ 真，则 $a\geqslant 1$.

所以命题 $p$和$q$ 有且只有一个命题正确时，$a$ 的取值范围是 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $a\geqslant 1$.

## 拓展提高

1．给出下列命题：

① 原命题为真，它的否命题为假；

② 原命题为真，它的逆命题不一定为真；

③ 一个命题的逆命题为真，它的否命题一定为真；

④ 一个命题的逆否命题为真，它的否命题一定为真；

⑤“若 $m>1$，则 $mx^2-2(m+1)x+m+3>0$ 的解集为 R”的逆命题.

其中真命题是________.（把正确命题的序号都填在横线上）

2．下列各题中，$p$是$q$ 的什么条件？

（1）在 $\triangle ABC$ 中，$p$：$\angle A=\angle B$，$q$：$\sin A=\sin B$；

（2）$p$:$\frac{f(-x)}{f(x)}=1$；$q$：$y=f(x)$是偶函数；

（3）$p$:$|x|=x$，$q$：$x^2+x\geqslant 0$.

3．“$m<\frac{1}{4}$”是“一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 有实数解”的（　　）

A．充分非必要条件

B．充分必要条件

C．必要非充分条件

D．非充分非必要条件

4．已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{R}\left|\frac{1}{2}<2^x<8\right.\right\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|-1<x<m+1\}$，若 $x\in B$ 成立的一个充分不必要的条件是 $x\in A$，则实数 $m$ 的取值范围是（　　）

A．$m\geqslant 2$　　B．$m\leqslant 2$

C．$m>2$　　D．$-2<m<2$

5．若集合 $A=\{x|2<x<3\}$，$B=\{x|(x+2)(x-a)<0\}$，则“$a=1$”是“$A\cap B=\varnothing$”的（　　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

6．已知 $p$：$2x^2-9x+a<0$，$q$：$\begin{cases}x^2-4x+3<0\\x^2-6x+8<0\end{cases}$，且$\neg p$ 是$\neg q$ 的充分条件，求实数 $a$ 的取值范围.

7．已知命题 $p:x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根；命题 $q:4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根．若命题 $p$ 与命题 $q$ 有且只有一个为真，求实数 $m$ 的取值范围.

### 答案

1．②③⑤

2．（1）$p$是$q$的充要条件　（2）$p$是$q$的充分不必要条件　（3）$p$是 $q$ 的充分不必要条件

3．A　4．C　5．A

6．解：由 $\begin{cases}x^2-4x+3<0\\x^2-6x+8<0\end{cases}$，得 $\begin{cases}1<x<3\\2<x<4\end{cases}$，即 $2<x<3$，

$\therefore q$ 的解集为 $\{x|2<x<3\}$.

设 $A=\{x|2x^2-9x+a<0\}$，$B=\{x|2<x<3\}$，

$\because\neg p\Rightarrow\neg q$，$\therefore q\Rightarrow p$，$\therefore B\subseteq A$.

即 $2<x<3$ 满足不等式 $2x^2-9x+a<0$，

$\therefore 2<x<3$ 满足不等式 $a<9x-2x^2$.

$\because$ 当 $2<x<3$ 时，

$9x-2x^2=-2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{81}{8}$ 的值大于9且小于等于 $\frac{81}{8}$，

即 $9<9x-2x^2\leqslant\frac{81}{8}$，$\therefore a\leqslant 9$.

7．解：$\because x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根，

$\therefore \begin{cases} m^2-4>0 \\ -m<0 \end{cases}$，得 $m>2$.

$\because 4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根，

$\therefore 16(m-2)^2-16<0$，得 $1<m<3$.

$\because$ 有且只有一个为真，若 $p$ 真 $q$ 假，得 $m\geqslant 3$.

若 $p$ 假 $q$ 真，得 $1<m\leqslant 2$.

综合上述，$m\geqslant 3$，或 $1<m\leqslant 2$.

## 第三节　简单的逻辑联结词、全称量词与存在量词

### 复习要点

**1．逻辑联结词**

（1）命题中的或（∨），且（∧），非（¬）叫做逻辑联结词.

（2）命题 $p\wedge q$，$p\vee q$，$\neg p$ 的真假判断.

$p$、$q$ 中有一假，则 $p\wedge q$ 为假，$p$、$q$ 中有一真，则 $p\vee q$ 为真，$p$ 与 $\neg p$ 必定是真假相反.

**2．全称量词与全称命题**

短语“所有的”、“任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词，并用符号“∀”表示．含有全称量词的命题，叫做全称命题．全称命题“对 $M$ 中任意一个 $x$，有 $p(x)$ 成立”可用符号简记为：$\forall x\in M, p(x)$.

**3．存在量词与特称命题**

短语“存在一个”、“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词，并用符号“∃”表示．含有特称量词的命题，叫做特称命题．特称命题“存在 $M$ 中的一个 $x_0$，使 $p(x_0)$ 成立”可用符号简记为：$\exists x_0\in M, p(x_0)$.

**4．全称命题和特称命题的否定**

| 命题 | 命题的否定 |
|---|---|
| $\forall x\in M, p(x)$ | $\exists x_0\in M, \neg p(x_0)$ |
| $\exists x_0\in M, p(x_0)$ | $\forall x\in M, \neg p(x)$ |

### 典型示例

【例1】指出下列命题的真假：

（1）命题：“不等式 $|x+2|\leqslant 0$ 没有实数解”；

（2）命题：“$-1$ 是偶数或奇数”；

（3）命题：“$\sqrt{2}$ 属于集合 $\mathbf{Q}$，也属于集合 $\mathbf{R}$”.

解：（1）此命题是“$\neg p$”的形式，其中 $p$：不等式 $|x+2|\leqslant 0$ 有实数解．因为 $x=-2$ 是该不等式的一个解，所以命题 $p$ 为真命题，即 $\neg p$ 为假命题，所以原命题为假命题.

（2）此命题是“$p\vee q$”的形式，其中 $p$：$-1$ 是偶数，$q$：$-1$ 是奇数，因为命题 $p$ 为假命题，命题 $q$ 为真命题，所以“$p\vee q$”为真命题，故原命题为真命题.

（3）此命题为“$p\wedge q$”的形式，其中 $p:\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$，$q:\sqrt{2}\in\mathbf{R}$，因命题 $p$ 为假命题，命题 $q$ 为真命题，所以“$p\wedge q$”为假命题，故原命题为假命题.

判断步骤：①确定复合命题的构成形式；②判断其中简单命题的真假；③根据其真值表判断复合命题的真假.

【例2】有四个关于三角函数的命题：

$p_1$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$；

$p_2$：$\exists x, y\in\mathbf{R}$，$\sin(x-y)=\sin x-\sin y$；

$p_3$：$\forall x\in[0,\pi]$，$\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}=\sin x$；

$p_4$：$\sin x=\cos y\Rightarrow x+y=\frac{\pi}{2}$.

其中的假命题是　　　　（　　）

A．$p_1$，$p_4$　　B．$p_2$，$p_4$　　C．$p_1$，$p_3$　　D．$p_2$，$p_3$

解：$\because$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$，均有 $\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$，

而不是 $\frac{1}{2}$，故 $p_1$ 为假命题.

当 $x$，$y$，$x-y$ 有一个为 $2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）时，

$\sin x-\sin y=\sin(x-y)$ 成立，故 $p_2$ 是真命题.

$\because \cos 2x=1-2\sin^2 x$，$\therefore \frac{1-\cos 2x}{2}=\sin^2 x$，

又 $x\in[0,\pi]$ 时，$\sin x\geqslant 0$，

$\therefore$ 对任意 $x\in[0,\pi]$，均有 $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}=\sin x$，

因此 $p_3$ 是真命题.

当 $\sin x=\cos y$，即 $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$ 时，$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-y$，

即 $x+y=2k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$），故 $p_4$ 为假命题．故选A.

【例3】写出下列命题的“否定”，并判断其真假.

（1）$p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$；

（2）$q$：所有的正方形都是矩形；

（3）$r$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2\leqslant 0$；

（4）$s$：至少有一个实数 $x$，使 $x^3+1=0$.

解：（1）$\neg p$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}<0$，是假命题，

这是因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$ 恒成立.

（2）$\neg q$：至少存在一个正方形不是矩形，假命题.

（3）$\neg r$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2>0$，真命题，

这是由于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geqslant 1>0$ 成立.

（4）$\neg s$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^3+1\neq 0$，假命题，

这是由于 $x=-1$ 时，$x^3+1=0$.

注：对于全称（特称）命题，关键在于看是否含有全称（存在）量词，特别注意有的可能省略量词.

**【例4】** 已知两个命题 $r(x)$：$\sin x+\cos x>m$，$s(x)$：$x^2+mx+1>0$. 如果对 $\forall x\in \mathbf{R}$，$r(x)$ 与 $s(x)$ 有且仅有一个是真命题. 求实数 $m$ 的取值范围.

解：$\because \sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\geqslant -\sqrt{2}$，

$\therefore$当 $r(x)$ 是真命题时，$m<-\sqrt{2}$.

又$\because \forall x\in \mathbf{R}$，$s(x)$为真命题，即 $x^2+mx+1>0$ 恒成立，

有 $\Delta=m^2-4<0$，$\therefore -2<m<2$.

$\therefore$当 $r(x)$为真，$s(x)$为假时，

$m<-\sqrt{2}$，同时 $m\leqslant -2$或$m\geqslant 2$，即 $m\leqslant -2$；

当 $r(x)$为假，$s(x)$为真时，

$-\sqrt{2}\leqslant m$ 且 $-2<m<2$，即 $-\sqrt{2}\leqslant m<2$.

综上，实数$m$的取值范围是 $m\leqslant -2$ 或 $-\sqrt{2}\leqslant m<2$.

## 拓展提高

1. 写出由下列各组命题构成的“$p\wedge q$”、“$p\vee q$”、“$\neg p$”形式的复合命题并判断真假.

（1）$p$：$6<6$，$q$：$6=6$.

（2）$p$：函数 $y=x^2+x+2$ 的图象与 $x$ 轴没有公共点.

$q$：方程 $x^2+x+2=0$ 没有实根.

2. 已知命题 $p_1$：函数 $y=2^x-2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，$p_2$：函数 $y=2^x+2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，则在命题 $q_1:p_1\vee p_2$，$q_2:p_1\wedge p_2$，$q_3:(\neg p_1)\vee p_2$，$q_4:p_1\wedge(\neg p_2)$中，真命题个数是 （　　）

A. $q_1$，$q_3$　　B. $q_2$，$q_3$

C. $q_1$，$q_4$　　D. $q_2$，$q_4$

3. 下列命题中，真命题是 （　　）

A. $\exists m\in \mathbf{R}$，使函数 $f(x)=x^2+mx$ $(x\in \mathbf{R})$是偶函数

B. $\exists m\in \mathbf{R}$，使函数 $f(x)=x^2+mx$ $(x\in \mathbf{R})$是奇函数

C. $\forall m\in \mathbf{R}$，函数 $f(x)=x^2+mx$ $(x\in \mathbf{R})$都是偶函数

D. $\forall m\in \mathbf{R}$，函数 $f(x)=x^2+mx$ $(x\in \mathbf{R})$都是奇函数

4. 写出下列命题的否定形式：

（1）有些三角形的三个内角都等于60°；

（2）能够被3整除的整数，能够被6整除；

（3）$\exists \theta\in \mathbf{R}$，使得函数 $y=\sin(2x+\theta)$是偶函数；

（4）$\forall x$，$y\in \mathbf{R}$，$|x+1|+|y-1|>0$.

5. 写出下列命题的否定，并判断命题的否定的真假，指出命题的否定属全称命题还是特称命题.

（1）所有的有理数是实数；

（2）有的三角形是直角三角形；

（3）每个二次函数的图象都与y轴相交；

（4）$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2-2x>0$.

6. 已知 $a>0$，设命题 $p$：函数 $y=a^x$，$\mathbf{R}$ 上单调递增；命题 $q$：不等式 $ax^2-ax+1>0$ 对 $\forall x\in \mathbf{R}$ 恒成立. 若“$p$且$q$”为假，“$p$或$q$”为真，求 $a$ 的取值范围.

### 答案

1.（1）$p\wedge q$：$6<6$且$6=6$. 假命题；$p\vee q$：$6<6$或$6=6$. 真命题；$\neg p$：$6\geqslant 6$.真命题.

（2）$p\wedge q$：函数 $y=x^2+x+2$ 的图象与$x$轴没有公共点，且方程 $x^2+x+2=0$ 没有实根. 真命题；$p\vee q$：函数 $y=x^2+x+2$ 的图象与$x$轴没有公共点或方程 $x^2+x+2=0$ 没有实根. 真命题；$\neg p$：函数 $y=x^2+x+2$ 的图象与$x$轴有公共点. 假命题.

2. C　3. A

4.（1）任意一个三角形的三个内角不能都等于60°.

（2）存在一个能被3整除的整数，不能够被6整除.

（3）$\forall \theta\in \mathbf{R}$，函数 $y=\sin(2x+\theta)$都不是偶函数.

（4）$\exists x$，$y\in \mathbf{R}$，$|x+1|+|y-1|\leqslant 0$.

5.（1）$\neg p$：存在一个有理数不是实数. 为假命题，属特称命题.

（2）$\neg p$：所有的三角形都不是直角三角形. 为假命题，属全称命题.

（3）$\neg p$：有的二次函数的图象与$y$轴不相交. 为假命题，属特称命题.

（4）$\neg p$:$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2-2x\leqslant 0$. 为真命题，属特称命题.

6. 解：$\because y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$\therefore p$：$a>1$.

又不等式 $ax^2-ax+1>0$，$\forall x\in \mathbf{R}$ 恒成立，

$\therefore \Delta<0$，即$a^2-4a<0$，$\therefore 0<a<4$，$\therefore q$：$0<a<4$.

而命题$p$且$q$为假，$p$或$q$为真，

那么 $p$、$q$ 中有且只有一个为真，一个为假.

若$p$真，$q$假，则 $a\geqslant 4$；

若 $p$假，$q$真，则 $0<a\leqslant 1$.

所以$a$的取值范围为 $(0，1]\cup[4，+\infty)$.

# 第二章　函　　数

## 第一节　函数的概念及其表示

### 复习要点

1. 函数的有关概念

(1)设集合$A$是一个非空的数集，对$A$内的任意数$x$，按照确定的法则$f$，都有唯一确定的数值$y$与它对应，则这种对应关系叫做集合$A$上的一个函数，记作$y=f(x)$，$x\in A$，其中$x$叫做自变量，自变量取值的范围(数集$A$)叫做这个函数的定义域.

(2)如果自变量取值$a$，则由法则$f$确定的值$y$称为函数在$a$处的函数值，记作$y=f(a)$或$y|_{x=a}$，所有函数值构成的集合$\{y|y=f(x), x\in A\}$叫做这个函数的值域.

2. 函数的三要素

函数的三要素是定义域、值域和对应法则，其中值域被函数的定义域和对应法则完全确定，所以一个函数只需确定这两个要素即可.

3. 映射

定义：设$A$、$B$是两个非空集合，如果按照某种对应法则$f$，对$A$内任意一个元素$x$，在$B$中有且仅有一个元素$y$与$x$对应，则称$f$是集合$A$到集合$B$的映射. 函数可理解为数集到数集的映射.

4. 函数的表示方法

表示函数的常用方法：解析法、图象法和列表法.

5. 分段函数

若函数在其定义域的不同子集上，因对应法则不同而分别用几个不同的式子来表示，这种函数称为分段函数. 分段函数的定义域等于各段函数的定义域的并集，其值域等于各段函数的值域的并集，分段函数虽由几个部分组成，但它表示的是一个函数.

### 典型示例

**【例1】**已知集合$M=\{1, 2, 3, 4\}$，$N=\{a, b, c, d\}$，从$M$到$N$的所有映射中满足$N$中恰有一个元素无原象的映射个数是多少?

考查方向：映射的概念.

解题思路：由映射的概念，利用分步计数原理解决问题.

解：建立$M$到$N$的满足条件的映射可分为两步，第一步从$a$，$b$，$c$，$d$中取出一个元素作为无原象的元素，有$C_4^1$种可能；第二步建立起从$M$到$N$中剩下的三个元素之间并且每个元素都有原象的映射，需先将$M$中的4个元素分成3组，每组至少一个，共$C_4^2$种分法，再和$N$中剩下的三个元素作对应，有$A_3^3$种，由分步计数原理知共有$C_4^1C_4^2A_3^3=144$种.

**【例2】**试判断以下各组函数是否表示同一函数?

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$；

(2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$，

(3) $f(x)=\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}}$，$g(x)=(\sqrt[2n-1]{x})^{2n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$；

(4) $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+1}$，$g(x)=\sqrt{x^2+x}$；

(5) $f(x)=x^2-2x-1$，$g(t)=t^2-2t-1$.

考查方向：函数的概念.

解题思路：对于两个函数$y=f(x)$和$y=g(x)$，当且仅当它们的定义域、值域、对应法则都相同时，$y=f(x)$和$y=g(x)$才表示同一函数，若两个函数表示同一函数，则它们的图象完全相同，反之亦然.

解：(1)由于$f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$，

故它们的值域及对应法则都不相同，

所以它们不是同一函数；

(2)由于函数$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$的定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，

而$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$的定义域为$\mathrm{R}$，

所以它们不是同一函数；

(3)由于当$n\in\mathbf{N}^*$时，$2n\pm1$为奇数，

$\therefore f(x)=\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}}=x$，$g(x)=(\sqrt[2n-1]{x})^{2n-1}=x$，

它们的定义域、值域及对应法则都相同，

所以它们是同一函数；

(4)由于函数$f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+1}$的定义域为$\{x|x\geqslant 0\}$，

而$g(x)=\sqrt{x^2+x}$的定义域为$\{x|x\leqslant -1$或$x\geqslant 0\}$，

它们的定义域不同，

所以它们不是同一函数；

(5)函数的定义域、值域和对应法则都相同，

所以它们是同一函数.

**【例3】**求函数的解析式：

(1)已知$f\left(\dfrac{2}{x}+1\right)=\lg x$，求$f(x)$；

(2)已知$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^3+\dfrac{1}{x^3}$，求$f(x)$；

(3)若$2f(x)-f(-x)=x+1$，求$f(x)$；

(4)已知$f(x)$是一次函数，且满足$3f(x+1)-2f(x-1)=2x+17$，求$f(x)$；

(5)若函数$f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$，$f(2)=1$，又方程$f(x)=x$有唯一解，求$f(x)$.

考查方向：函数解析式的求法.

解题思路：(1)已知函数类型，求函数的解析式：待定系数法；

(2)已知 $f(x)$ 求 $f[g(x)]$ 或已知 $f[g(x)]$ 求 $f(x)$：换元法、配凑法；

(3) $f(x)$ 满足某个等式，这个等式除 $f(x)$ 外还有其他未知量，需构造另一个等式：解方程组法.

解：(1)令 $\frac{2}{x}+1=t\ (t>1)$，则 $x=\frac{2}{t-1}$，

$\therefore f(t)=\lg\frac{2}{t-1}$，$f(x)=\lg\frac{2}{x-1}\ (x>1)$.

(2)$\because f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$，

$\therefore f(x)=x^3-3x\ (x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2)$.

(3)$\because 2f(x)-f(-x)=x+1$，

用 $-x$ 去替换式子中的 $x$，

得 $2f(-x)-f(x)=-x+1$，

即有 $\begin{cases}2f(x)-f(-x)=x+1\\ 2f(-x)-f(x)=-x+1\end{cases}$，

解方程组消去 $f(-x)$，得 $f(x)=\frac{x}{3}+1$.

(4)设 $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$，

则 $3f(x+1)-2f(x-1)$

$=3ax+3a+3b-2ax+2a-2b$

$=ax+b+5a=2x+17$，

$\therefore a=2$，$b=7$，$\therefore f(x)=2x+7$.

(5)由 $f(2)=1$ 得 $\frac{2}{2a+b}=1$，即 $2a+b=2$.

由 $f(x)=x$ 得 $\frac{x}{ax+b}=x$，变形得 $x\left(\frac{1}{ax+b}-1\right)=0$，

解此方程得 $x=0$ 或 $x=\frac{1-b}{a}$，又$\because$方程有唯一解，

$\therefore \frac{1-b}{a}=0$，解得 $b=1$，代入 $2a+b=2$ 得 $a=\frac{1}{2}$，

$\therefore f(x)=\frac{2x}{x+2}$.

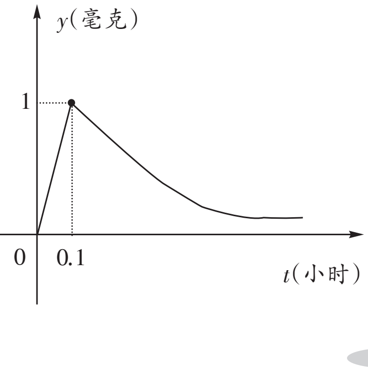
**【例 4】**(1)(2010·陕西卷)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1, & x<1\\ x^2+ax, & x\geqslant 1\end{cases}$，若 $f(f(0))=4a$，则实数 $a$ 等于（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. 2　　D. 9

(2)(2011·北京卷)根据统计，一名工人组装第4件某产品所用的时间(单位：分钟)为 $f(x)=\begin{cases}\frac{c}{\sqrt{x}}, & x<A\\ \frac{c}{\sqrt{A}}, & x\geqslant A\end{cases}$ ($A$，$C$为常数).已知工人组装第4件产品用时30分钟，组装第$A$件产品用时15分钟，那么$C$和$A$的值分别是（　　）

A. 75，25　B. 75，16　C. 60，25　D. 60，16

(3)为了预防流感，某学校对教室用药熏消毒法进行消毒，已知药物释放过程中，室内每立方米空气中的含药量 $y$（毫克）与时间 $t$（小时）成正比；药物释放完毕后，$y$ 与 $t$ 的函数关系式为 $y=\left(\frac{1}{16}\right)^{t-a}$（$a$ 为常数），如右图所示．根据图中提供的信息，回答下列问题：




①从药物释放开始，每立方米空气中的含药量$y$(毫克)与时间$t$（小时)之间的函数关系式为____；

②根据测定，当空气中每立方米的含药量降低到0.25毫克以下时，学生方可进教室，那么从药物释放开始，至少需要经过______小时，学生方能回教室.

考查方向：分段函数的应用.

思路分析：研究分段函数常常要借助于它的图象来讨论，对于给出图象的有关分段函数的实际问题实际问题，可用待定系数法求解析式.

解：(1) $f(0)=2^0+1=2$，

$f(f(0))=f(2)=4+2a=4a$，

所以$a=2$．选C.

(2)当 $x\leqslant A$ 时 $f(x)$单减，$x\geqslant A$ 时 $f(x)$恒为常数，

故 $\frac{c}{\sqrt{4}}=30, \frac{c}{\sqrt{A}}=15$，解得 $c=60$，$A=16$．选D.

(3)①当 $0\leqslant t\leqslant 0.1$ 时，设 $y=kt$，

将(0.1，1)代入得 $k=10$.

当 $t>0.1$ 时，$y=\left(\frac{1}{16}\right)^{t-a}$，

将(0.1，1)代入可得 $a=0.1$.

$\therefore y$ 与 $t$ 的关系式为 $y=\begin{cases}10t\ (0\leqslant t\leqslant 0.1)\\ \left(\frac{1}{16}\right)^{t-0.1}\ (t>0.1)\end{cases}$.

②由 $\left(\frac{1}{16}\right)^{t-0.1}<0.25=\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$ 得 $t>0.6$.

故至少需要经过0.6小时，学生方能回教室.

## 拓展提高

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\leqslant 1\\ x^2+x-2, & x>1\end{cases}$ 则 $f\left(\frac{1}{f(2)}\right)$ 的值为（　　）

A. $\frac{15}{16}$　　B. $-\frac{27}{16}$　　C. $\frac{8}{9}$　　D. 18

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c, & x\leqslant 0\\ 2, & x>0\end{cases}$，若 $f(-4)=f(0)$，$f(-2)=-2$，则关于 $x$ 的方程 $f(x)=x$ 的解的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. (2010·天津卷)设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x>0\\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), & x<0\end{cases}$，若 $f(a)>f(-a)$，则实数 $a$ 的取值范围是（　　）

A. $(-1,0)\cup(0,1)$

B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

D．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$

4．下列四个命题正确的是　　（　　）

A．函数是其定义域到值域的映射

B．$y=\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}$ 是函数

C．函数 $y=2x\ (x\in\mathbf{N})$ 的图象是一条直线

D．$y=\begin{cases}x^2 & (x\geqslant 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$ 的图象是抛物线

5．对任意实数 $x$，已知偶函数 $f(x)$ 都满足 $f(x+2)=f(x)$，且当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=x$，当 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的表达式为________.

6．（2011·四川卷）函数 $f(x)$ 的定义域为 $A$，若 $x_1,x_2\in A$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$ 时总有 $x_1=x_2$，则称 $f(x)$ 为单函数．例如，函数 $f(x)=2x+1\ (x\in\mathbf{R})$ 是单函数.

下列命题：

①函数 $f(x)=x^2\ (x\in\mathbf{R})$ 是单函数；

②若 $f(x)$ 为单函数，$x_1,x_2\in A$ 且 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$；

③若 $f$: $A\to B$ 为单函数，则对于任意 $b\in B$，它至多有一个原象；

④函数 $f(x)$ 在某区间上具有单调性，则 $f(x)$ 一定是单函数.

其中的真命题是__________.（写出所有真命题的编号）

7.（1）已知 $f(1-\cos x)=\sin^2 x$，求 $f(x)$；

（2）已知 $f(x)$ 是二次函数，若 $f(0)=0$，且 $f(x+1)=f(x)+x+1$，试求 $f(x)$ 的表达式.

答案

1．A　2．C　3．C　4．A

5．$f(x)=\begin{cases}x+4, & x\in[-2,-1]\\ 2-x, & x\in(-1,0\,]\end{cases}$

6．②③　解：对于①，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1=\pm x_2$，不满足；②实际上是单函数命题的逆否命题，故为真命题；对于③，若任意 $b\in B$，若有两个及以上的原象，也即当 $f(x_1)=f(x_2)$ 时，不一定有 $x_1=x_2$，不满足题设，故该命题为真；根据定义，命题④不满足条件.

7．解：（1）$\because f(1-\cos x)=\sin^2 x=1-\cos^2 x$，

令 $1-\cos x=t$，则 $\cos x=1-t$.

$\because -1\leqslant\cos x\leqslant 1$，

$\therefore 0\leqslant 1-\cos x\leqslant 2$，$\therefore 0\leqslant t\leqslant 2$，

$\therefore f(t)=1-(1-t)^2=-t^2+2t\ (0\leqslant t\leqslant 2)$，

故 $f(x)=-x^2+2x\ (0\leqslant x\leqslant 2)$.

（2）设 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，

由 $f(0)=0$ 知 $c=0$，$f(x)=ax^2+bx$.

又由 $f(x+1)=f(x)+x+1$，

得 $a(x+1)^2+b(x+1)=ax^2+bx+x+1$，

即 $ax^2+(2a+b)x+a+b=ax^2+(b+1)x+1$，

故有 $\begin{cases}2a+b=b+1\\ a+b=1\end{cases}\Rightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$.

因此，$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x$.

## 第二节　函数的定义域、值域

### 复习要点

**1．函数的定义域**

（1）定义：函数的定义域是指使函数解析式有意义的 $x$ 的取值范围.

（2）求函数定义域的主要依据：

①分式的分母不能为0；

②偶次方根的被开方数必须大于等于0；

③零的0次方次方无意义；

④对数函数的底数必须大于0且不为1，真数必须大于0；

⑤实际问题中函数的定义域要根据自变量的实际意义确定.

**2．求函数定义域一般有三类问题**

（1）给出函数解析式的：函数的定义域是使解析式有意义的自变量的取值集合；

（2）实际问题：函数的定义域的求解除要考虑解析式有意义外，还应考虑使实际问题有意义；

（3）已知 $f(x)$ 的定义域求 $f[g(x)]$ 的定义域或已知 $f[g(x)]$ 的定义域求 $f(x)$ 的定义域：

①掌握基本初等函数(尤其是分式函数、无理函数、对数函数、三角函数)的定义域；

②若已知 $f(x)$ 的定义域 $[a,b]$，其复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域应由 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 解出.

**3．函数的值域**

（1）定义：在函数 $y=f(x)$ 中，与自变量 $x$ 的值对应的 $y$ 的值叫函数值，函数值组成的集合叫函数的值域.

（2）常见函数的值域：

① $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 的值域为 $\mathbf{R}$；

② $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的值域为当 $a>0$ 时，值域为 $\{y|y\geqslant\dfrac{(4ac-b^2)}{4a}\}$；当 $a<0$ 时，值域为 $\{y|y\leqslant\dfrac{(4ac-b^2)}{4a}$；

③ $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的值域为 $\{y|y\neq 0\}$；

④ $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$；

⑤ $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$ 的值域为 $(0,+\infty)$；

⑥ $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的值域为 $[-1,1]$；

⑦ $y=\tan x$ 的值域为 R；

⑧ $y=x+\frac{1}{x}(x\neq 0)$的值域为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

**4. 求函数值域的各种方法**

函数的值域是由其对应法则和定义域共同决定的其类型依解析式的特点分可分三类：(1)求常见函数值域；(2)求由常见函数复合而成的函数的值域；(3)求由常见函数作某些“运算”而得函数的值域.

直接法：利用常见函数的值域来求；

配方法：转化为二次函数，利用二次函数的特征来求值；常转化为形如：$f(x)=ax^2+bx+c$，$x\in(m,n)$的形式；

分式转化法(分离常数法)：采用配凑法成为一个常数加分式型.

换元法：通过变量代换转化为能求值域的函数，化归思想；

三角有界法：转化为只含正弦、余弦的函数，运用三角函数有界性来求值域；

基本不等式法：转化成形如：$y=x+\frac{k}{x}(k>0)$，利用平均值不等式公式来求值域；

单调性法：函数为单调函数，可根据函数的单调性求值域；

数形结合：根据函数的几何图形，利用数型结合的方法来求值域；

求导法：当一个函数在定义域上可导时，可根据其导数求最值，得到值域；

逆求法(反求法)：通过反解，用 $y$ 来表示 $x$，再由 $x$ 的取值范围，通过解不等式，得出 $y$ 的取值范围，常用来解形如：$y=\frac{ax+b}{cx+d}$，$x\in(m,n)$；

判别式法：把函数转化成关于 $x$ 的二次方程 $F(x,y)=0$，通过方程有实根，判别式 $\Delta\geqslant 0$，从而求得原函数的值域．形如$y=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$（$a_1$，$a_2$ 不同时为零)的函数的值域常用此法求解.

## 典型示例

【例1】(1)函数 $f(x)=\lg(x-1)$的定义域是（　　）

A.$(2,+\infty)$　　B.$(1,+\infty)$

C.$[1,+\infty)$　　D.$[2,+\infty)$

(2)函数 $y=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x}$ 的定义域为（　　）

A.$\{x|x\geqslant 0\}$　　B.$\{x|x\geqslant 1\}$

C.$\{x|x\geqslant 1\}\cup\{0\}$　　D.$\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$

(3)函数 $f(x)=\frac{3x^2}{\sqrt{1-x}}+\lg(3x+1)$的定义域是____.

考查方向：函数的定义域.

解：(1)由 $x-1>0$，得 $x>1$．故选B.

(2)方法一：$\begin{cases}x(x-1)\geqslant 0\\x\geqslant 0\end{cases}$，$x=0$或$x\geqslant 1$．故选C.

方法二：令 $x=0$ 可排除B，令 $x=\frac{1}{2}$ 可排除A、D．故选C.

(3)要使函数有意义，自变量$x$必须满足$\begin{cases}1-x\geqslant 0\\\sqrt{1-x}\neq 0\\3x+1>0\end{cases}$，

即$\begin{cases}x\leqslant 1\\x\neq 1\\x>-\frac{1}{3}\end{cases}$，解得 $-\frac{1}{3}<x<1$.

即函数的值域为$\left(-\frac{1}{3},1\right)$.

【例2】已知函数 $f(x)$定义域为$(0,2)$，求下列函数的定义域：

(1) $f(x^2)+23$；(2) $y=\frac{f(x^2)+1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$.

考查方向：复合函数的定义域.

解题思路：函数 $f(x^2)$是由 $u=x^2$ 与 $f(u)$这两个函数复合而成的复合函数，其中 $x$ 是自变量，$u$ 是中间变量，由于 $f(x)$，$f(u)$ 是同一个函数，故(1)为已知 $0<u<2$，即 $0<x^2<2$，求 $x$ 的取值范围.

解：(1)由 $0<x^2<2$，得 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$且$x\neq 0$，

所以 $f(x^2)$ 的定义域为$(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$.

(2)由(1)，解$\begin{cases}-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}(x\neq 0)\\\log_{\frac{1}{2}}(2x)>0\end{cases}$,得$1<x<\sqrt{2}$,

所以所求的定义域为$(1,\sqrt{2})$.

【例3】求下列函数的值域：

(1) $y=\frac{x}{x+1}$；

(2) $y=x+\frac{1}{x}$；

(3) $y=3x^2-x+2$，$x\in[1,3]$；

(4) $y=\sqrt{-x^2-6x-5}$；

(5) $y=x+4\sqrt{1-x}$；

(6) $y=x+\sqrt{1-x^2}$；

(7) $y=|x-1|+|x+4|$；

(8) $y=\frac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$；

(9) $y=\frac{2x^2-x+1}{2x-1}\left(x>\frac{1}{2}\right)$；

(10) $y=\frac{1-\sin x}{2-\cos x}$.

考查方向：函数的值域的求法.

解题思路：根据函数解析式的特点，采用适当的方法求函数的值域.

解：(1) $y=\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$.

$\because \frac{1}{x+1}\neq 0$，$\therefore y\neq 1$.

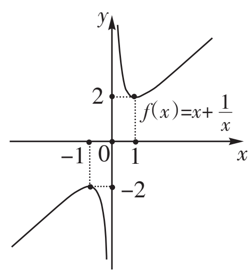
$\therefore$值域是$\{y|y\in \mathbf{R}$，且$y\neq 1\}$(此法亦称分离常数法).

(2)当$x>0$时，$\therefore y=x+\dfrac{1}{x}=\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2\geqslant 2$，

当$x<0$时，$y=-\left(-x+\dfrac{1}{-x}\right)=-\left(\sqrt{-x}-\dfrac{1}{\sqrt{-x}}\right)^2-2\leqslant -2$，

$\therefore$值域是$(-\infty,\ -2]\cup[2,\ +\infty)$(此法也称为配方法).

函数$y=x+\dfrac{1}{x}$的图象为：




$\therefore$值域是$(-\infty,\ -2]\cup[2,\ +\infty)$.

(3)利用函数的单调性，

函数$y=3x^2-x+2$在$x\in[1,\ 3]$上单调增，

$\therefore$当$x=1$时，原函数有最小值为4；

当$x=3$时，原函数有最大值为26.

$\therefore$函数$y=3x^2-x+2$，$x\in[1,\ 3]$的值域为$[4,\ 26]$.

(4)求复合函数的值域，

设$\mu=-x^2-6x-5(\mu\geqslant 0)$，

则原函数可化为$y=\sqrt{\mu}$.

又$\because \mu=-x^2-6x-5=-(x+3)^2+4\leqslant 4$，

$\therefore 0\leqslant\mu\leqslant 4$，故$\sqrt{\mu}\in[0,\ 2]$，

$\therefore y=\sqrt{-x^2-6x-5}$的值域为$[0,\ 2]$.

(5)换元法(代数换元法)：

设$t=\sqrt{1-x}\geqslant 0$，则$x=1-t^2$，

$\therefore$原函数可化为$y=1-t^2+4t=-(t-2)^2+5\ (t\geqslant 0)$，

$\therefore y\leqslant 5$，$\therefore$原函数值域为$(-\infty,\ 5]$.

说明：总结$y=ax+b+\sqrt{cx+d}$型值域，变形$y=ax^2+b+\sqrt{cx^2+d}$或$y=ax^2+b+\sqrt{cx+d}$.

(6)三角换元法：

$\because 1-x^2\geqslant 0\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$，

$\therefore$设$x=\cos\alpha$，$\alpha\in[0,\ \pi]$，

则$y=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$\because \alpha\in[0,\ \pi]$，$\therefore \alpha+\dfrac{\pi}{4}\in[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}]$.

$\therefore \sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right]$，

$\therefore \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\in[-1,\sqrt{2}]$，

$\therefore$原函数的值域为$[-1,\sqrt{2}]$.

(7)数形结合法：

$y=|x-1|+|x+4|=\begin{cases}-2x-3\ (x\leqslant -4)\\ 5\ (-4<x<1)\\ 2x+3\ (x\geqslant 1)\end{cases}$，

$\therefore y\geqslant 5$，$\therefore$函数值域为$[5,\ +\infty)$.

(8)判别式法：

$\because x^2+x+1>0$恒成立，

$\therefore$函数的定义域为$\mathbf{R}$.

由$y=\dfrac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$，

得$(y-2)x^2+(y+1)x+y-2=0$.

①当$y-2=0$即$y=2$时，

即$3x+0=0$，$\therefore x=0\in\mathbf{R}$.

②当$y-2\neq 0$即$y\neq 2$时，

$\because x\in\mathbf{R}$时方程$(y-2)x^2+(y+1)x+y-2=0$恒有实根，

$\therefore \Delta=(y+1)^2-4\times(y-2)^2\geqslant 0$，

$\therefore 1\leqslant y\leqslant 5$且$y\neq 2$，

$\therefore$原函数的值域为$[1,\ 5]$.

(9) $y=\dfrac{2x^2-x+1}{2x-1}=\dfrac{x(2x-1)+1}{2x-1}$

$=x+\dfrac{1}{2x-1}=x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}$，

$\because x>\dfrac{1}{2}$，$\therefore x-\dfrac{1}{2}>0$，

$\therefore x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}\geqslant 2\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)}}=\sqrt{2}$，

当且仅当$x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}$时，即$x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$时等号成立.

$\therefore y\geqslant\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$，$\therefore$原函数的值域为$\left[\sqrt{2}+\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$.

(10)方法一：方程法：

原函数可化为$\sin x-y\cos x=1-2y$，

$\therefore \sqrt{1+y^2}\sin(x-\varphi)=1-2y$

(其中$\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$)，

$\therefore \sin(x-\varphi)=\dfrac{1-2y}{\sqrt{1+y^2}}\in[-1,\ 1]$，

$\therefore |1-2y|\leqslant\sqrt{1+y^2}$，$\therefore 3y^2-4y\leqslant 0$，$\therefore 0\leqslant y\leqslant\dfrac{4}{3}$，

$\therefore$原函数的值域为$\left[0,\ \dfrac{4}{3}\right]$.

方法二：数形结合法：$y$的值可以看作点$(2,\ 1)$与点$(\cos x,\ \sin x)$所连直线的斜率，而点$(\cos x,\ \sin x)$在单位圆$x^2+y^2=1$上，由点$(2,\ 1)$向单位圆做切线，由两条切线的斜率易求$y$的取值范围为$\left[0,\ \dfrac{4}{3}\right]$.

## 拓展提高

1. 已知函数 $f(x)=|\lg x|$，若 $0<a<b$，且 $f(a)=f(b)$，则 $a+2b$ 的取值范围是（　　）

A. $(2\sqrt{2}, +\infty)$　　B. $[2\sqrt{2}, +\infty)$

C. $(3, +\infty)$　　D. $[3, +\infty)$

2.（2012·江西卷）下列函数中，与函数 $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 定义域相同的函数为（　　）

A. $y=\frac{1}{\sin x}$　　B. $y=\frac{1nx}{x}$

C. $y=xe^x$　　D. $y=\frac{\sin x}{x}$

3. 设函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x-10}}$ 的定义域为 $A$，$B=\{x||x-m|<6\}$，且 $A\cup B=\mathbf{R}$，则实数 $m$ 的取值范围为（　　）

A. $-1<m<4$　　B. $-1<m<3$

C. $1<m<4$　　D. $1<m<3$

4. 已知函数 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ 的定义域为 $A$，函数 $y=f[f(x)]$ 的定义域为 $B$，则（　　）

A. $A\cup B=B$　　B. $A\subset B$

C. $A=B$　　D. $A\cap B=B$

5. 已知集合 $P=\{y|y^2-y-2>0\}$，$Q=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$，若 $P\cup Q=\mathbf{R}$，$P\cap Q=(2, 3]$，则 $a$，$b$ 的值为________.

6. 已知函数 $f(x)=\frac{4}{|x|+2}-1$ 的定义域是 $[a, b]$（$a$，$b$ 为整数），值域是 $[0, 1]$，则满足条件的整数对（$a$，$b$）共有________个.

7. 设 $f(x)=\frac{2x^2}{x+1}$，$g(x)=ax+5-2a\ (a>0)$.

(1)求 $f(x)$ 在 $x\in[0, 1]$ 上的值域；

(2)若对于任意 $x_1\in[0, 1]$，总存在 $x_0\in[0, 1]$，使得 $g(x_0)=f(x_1)$ 成立，求 $a$ 的取值范围.

### 答案

1. C　2. D　3. A　4. D　5. −2，−3　6. 5

7. 解：(1)方法一(导数法)：

$f'(x)=\frac{4x(x+1)-2x^2}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}\geqslant 0$ 在 $x\in[0, 1]$ 上恒成立.

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 值域 $[0, 1]$.

方法二：$f(x)=\frac{2x^2}{x+1}=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}, & x\in(0, 1]\end{cases}$，

用复合函数求值域.

方法三：$f(x)=\frac{2x^2}{x+1}=\frac{2(x+1)^2-4(x+1)+2}{x+1}$

$=2(x+1)+\frac{2}{x+1}-4$，

用双勾函数求值域.

(2) $f(x)$ 值域 $[0, 1]$，

$g(x)=ax+5-2a\ (a>0)$ 在 $x\in[0, 1]$ 上的值域 $[5-2a, 5-a]$.

由条件，只须 $[0, 1]\subseteq[5-2a, 5-a]$，

$\therefore \begin{cases}5-2a\leqslant 0\\ 5-a\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow \frac{5}{2}\leqslant a\leqslant 4.$

## 第三节　函数的单调性与最值

## 复习要点

**1. 函数的单调性定义**

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $A$，区间 $I\subseteq A$.

如果对于区间 $I$ 内的任意两个值 $x_1$，$x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上是单调增函数，$I$ 称为 $y=f(x)$ 的单调增区间.

如果对于区间 $I$ 内的任意两个值 $x_1$，$x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上是单调减函数，$I$ 称为 $y=f(x)$ 的单调减区间.

如果用导数的语言来讲，设函数 $y=f(x)$.

如果在某区间 $I$ 上，$f'(x)>0$，那么 $f(x)$ 为区间 $I$ 上的增函数；

如果在某区间 $I$ 上，$f'(x)<0$，那么 $f(x)$ 为区间 $I$ 上的减函数.

**2. 对函数单调性的理解**

(1)函数的单调性只能在函数的定义域内来讨论，所以求函数的单调区间，必须先求函数的定义域.

(2)函数单调性定义中的 $x_1$，$x_2$ 有三个特征：一是任意性；二是大小；三是同属于一个单调区间，三者缺一不可.

(3)若用导数工具研究函数的单调性，则在某区间 $I$ 上 $f'(x)>0$（$f'(x)<0$）仅是 $f(x)$ 为区间 $I$ 上的增函数(减函数)的充分不必要条件.

(4)关于函数的单调性的证明，如果用定义证明 $y=f(x)$ 在某区间 $I$ 上的单调性，那么就要用严格的四个步骤，即①取值；②作差；③判号；④下结论. 但是要注意，不能用区间 $I$ 上的两个特殊值来代替. 而要证明 $y=f(x)$ 在某区间 $I$ 上不是单调递增的，只要举出反例就可以了，即只要找到区间 $I$ 上两个特殊的 $x_1$，$x_2$，若