

2010年 GCT (硕士专业学位) 联考辅导教程



2010 年

全国硕士专业学位联考命题研究组 编著

GCT (硕士专业学位) 联考辅导教程

数学分册



- ▶ 集北京大学、清华大学和中国人民大学的最新权威信息，倾力推出2010年GCT联考整体解决方案
- ▶ 购买正版图书，赠送刘庆华、王武楠、章武、李智忠2010年GCT联考基础数学辅导学习课程
- ▶ 指导委员会名师阐释命题规律与快速解题技巧，命中率高
- ▶ 赠2003~2009年7年真题+试题精解（最新版）
- ▶ 赠GCT联考英语大纲词汇手册（标准版）

2010

航空工业出版社

2010 年 GCT (硕士专业学位) 联考辅导教程 数学分册

全国硕士专业学位联考命题研究组 编著

航空工业出版社
北京

内 容 提 要

本书是 GCT 入学资格考试辅导教程系列丛书之一,全书每章内容均由“基本考点介绍”、“真题链接”、“典型例题分析”和“同步辅导与强化训练答案与解析”4 部分组成。

本书由 GCT 入学资格考试命题研究组倾力打造,内容紧扣考试大纲,体例切合应试人员需求,注重实际演练,讲究方法与技巧,定位准确、思路清晰,有助于应试者从容应考,获得高分。

图书在版编目 (C I P) 数据

2010 年 GCT (硕士专业学位) 联考辅导教程. 数学分册 /
全国硕士专业学位联考命题研究组编著. —北京: 航空工
业出版社, 2010.1

ISBN 978-7-80243-409-7

I. 2… II. 全… III. 高等数学—研究生—入学考试—
自学参考资料 IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 230204 号

2010 年 GCT (硕士专业学位) 联考辅导教程数学分册
2010 Nian GCT(Shuoshi Zhuanye Xuewei) Liankao Fudao Jiaocheng Shuxue Fence

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

发行部电话:010-64815615 010-64978486

北京建泰印刷有限公司

全国各地新华书店经售

2010 年 1 月第 1 版

2010 年 1 月第 1 次印刷

开本:787×1092 1/16

印张:21.5

字数:507 千字

印数:1—10000

定价:38.00 元

编者的话

2001 年底国家成立非全日制研究生入学资格考试研究小组，在借鉴国外研究生选拔方式的基础上，提出了改革我国非全日制硕士研究生入学资格考试的新办法。国务院学位委员会办公室（国务院学位办）工程硕士入学考试研究小组经过充分的调查研究，提出了两段制考试录取办法，定于 2003 年开始实施，考试大纲也随之改变。2004 年，国务院学位办发布了《硕士专业学位研究生入学资格考试指南（2004 年版）》，适用范围除工程硕士外，还增加了农业推广硕士和兽医硕士。硕士专业学位研究生入学资格考试（Graduate Candidate Test, GCT）作为国务院学位办新实行的一种考试，考试名称虽然在原来的基础上去掉了“工程”二字，但其考试对象主要还是工程硕士考生。

GCT 考试试卷由 4 部分构成：逻辑推理能力测试、外语（语种为英语、俄语、德语和日语）运用能力测试、语言表达能力测试、数学基础能力测试。GCT 试卷满分 400 分，每部分各占 100 分。考试时间为 3 小时，每部分为 45 分钟。

逻辑推理能力测试部分主要是考查考生应用常用的逻辑分析方法，通过对已获取的各种信息和综合知识的理解、分析、综合、判断、归纳等，引出概念、寻求规律，对事物间的关系或事件的走向趋势进行合理的判断与分析，确定解决问题的途径和方法。

外语运用能力测试部分考试所涉及的基本内容相当于四年制大学非外语专业毕业生应达到的水平，通过词汇与语法、阅读理解、完形填空

等题型着重测试考生运用外语的能力。

语言表达能力测试部分主要是以语文为工具,测试考生在知识积累基础上的语言表达能力。通过对字、词、句、篇的阅读、分辨与理解,考查考生掌握基本的自然科学和人文与社会科学知识的水平,特别是运用语言工具对知识进行表达的能力。

数学基础能力测试部分主要是以数学基础知识为背景,重点考查考生所具有的基本数学素养、对基本数学概念的理解,考查考生逻辑思维能力、数学运算能力、空间想象能力以及分析问题、解决问题的能力。

GCT 试题均采用客观选择题,含阅读理解、分析判断、正误辨识、情景分析、数理解题、逻辑推理等。答题形式为选择、填空等。试题知识面覆盖哲学、经济学、法学、教育学、文学、历史学、理学、工学、农学、医学等学科。

为帮助广大考生把握考试方法和技能,我们组织相关专家,精心编写了这套综合辅导教程,包括语文分册、数学分册、英语分册、逻辑分册共 4 册。本套丛书的编写充分体现了如下特色。

(1) 综合名师的辅导精华,全力推出 2010 年 GCT 入学资格考试整体解决方案。

(2) 全面展现题型变化、精辟阐明解题思路。根据命题思路,列题型、讲方法,充分展示解题技巧和其内在规律性。

(3) 科学预测、权威预测、最新预测。有效地把握命题特点,精编了足量的经典习题和模拟试题,强调反应速度,迅速提高考生的应试能力。

本套丛书附有超值赠送服务。凡是购买本书者,都将免费获得:①2003-2009 年 7 年真题、试题精解(最新版);②2010 年 GCT 联考基础班完整课程(价值 400 元);③ GCT 联考英语大纲词汇手册(标准版)。考生可以登录 www.pkutest.cn,免费注册用户名和密码,登录系统进行学习卡注册,然后可以自由选择 GCT 联考精讲班和模拟冲刺班的相关辅导课程进行学习。

GCT 联考辅导班课程均由 GCT 入学资格考试应试指导编审委员会与辅导专家团名师主讲,领衔主讲老师具有丰富的命题研究、讲课和阅卷评卷经验。

本套丛书由博实教育在线提供全程的技术服务与网络课堂支持。凡是购买本书的考生均可享受博实教育在线提供的一系列教学服务,如免费下载相应网络教学资料、最新大纲变化信息以及本套丛书相关修订内容的补充、权威考试资讯等。

编者 于北大燕园

前言 Foreword

数学基础能力测试旨在考查考生对数学基础知识的掌握以及分析问题和解决问题的能力。数学基础能力测试共分 5 部分：算术、代数、几何与三角、一元函数微积分、线性代数。考试题目共 50 个，考试时间 45 分钟。

为了帮助广大考生在较短的时间内系统地备考，并顺利通过考试，我们组织了在一线进行教学和辅导的专家和教授，精心编写了这本辅导教程。

本书按考试题型共分为 6 个部分：算术、初等代数、几何与三角、一元函数微积分、线性代数及模拟试题与解析。每章内容都由基本考点介绍、代表性例题精解、同步测试与强化训练、同步测试与强化训练答案与解析 4 部分组成。

这本辅导教程是广大专家和教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。其中的每一道试题，既反映了 GCT 联考数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴含着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此，对照考试大纲分析、研究这些试题，考生不仅可以了解 GCT 联考以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出各部分内容的重、难点以及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，从容应试，获得高分。

在此，给考生的数学复习备考提出以下几点建议：

第一，考生首先应该掌握基本概念，熟悉考点知识，紧扣大纲，抓

住重点。考生应该以“三基”和“一纲”为主线，“三基”即基本概念、基本原理和基本方法；“一纲”即最新GCT联考数学考试大纲。考生首先应该系统地掌握大纲规定的基础知识，对大纲规定的内容进行梳理，形成知识网络；其次在接触一定量的题型之后，头脑中留下的不是纷繁的题目，而是清晰、鲜明、深刻的基础知识和基本技能，以及基本的数学思想和方法。不论是数学理论的建立，还是进行数学运算和逻辑推理，无一不是以明确而又清晰的概念为基础。数学基础知识是进一步提高解题速度的基础。

第二，考生要重视概念的复习，从不同的角度准确地把握住概念的内涵，注意相关概念的联系与区别。否则，解题时思维上就会出现疑惑与混乱，方法上也就会出现种种谬误。

第三，注重实际演练，讲求方法与技巧，高效补差。复习时演练一定量的习题是非常必要的，它是提高考试成绩的重要手段，但也不要搞题海战术，重要的是要吃透大纲规定的基本考点，提高分析问题和解决问题的能力。解题时既要考虑解题的通性通法，又要分析它的特殊性，寻求最佳解决方法，提高解题能力和对新题型的适应能力。

第四，“做题，总结，再做题”，实现高效复习的良性循环。在解题的基础上认真总结，及时归纳。这样既能梳理所学的知识、掌握解题的方法和规律，又能培养探索和创新的能力。如果只是一味地做题，把做题的多少作为复习效果与努力程度的一个标准，而不注重及时总结，那么考生所收到的实际复习成效是值得怀疑的。如果不对疑难问题进行认真的分析和清理，那么下次碰到类似或者相同的问题还是束手无策。

由于时间有限，本书的错误和纰漏之处在所难免，诚望广大读者批评指正。

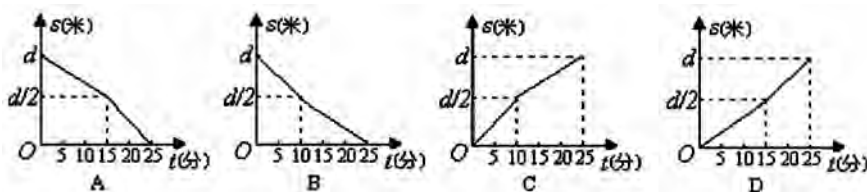
绪论：GCT 数学快速解题十大技巧

GCT 数学试题均为选择题，四个选项中只有一个正确答案，因而除了按部就班地直接求解外，还需要注意一些解题的策略。我们总结了快速解题的十大技巧，与考生一起学习和分享。

方法一：排除法

排除法是根据题设和有关知识，逐一排除明显不正确的选项，从而剩下的唯一选项自然就是正确的选项。如果不能立即得到正确的选项，至少可以缩小选择范围，提高解题的准确率。排除法是解选择题的间接方法，也是常用方法。

例 1 (2008 年第 4 题) 某人从家到工厂的路程为 d 米。有一天，他从家去工厂，先以每分钟 a 米的速度走了 $\frac{d}{2}$ 米后，他加快了速度，以每分钟 b 米的速度走完了剩下的路程。记该人在 t 分钟走过的路程为 $s(t)$ 米，那么函数 $s = s(t)$ 的图像是()。



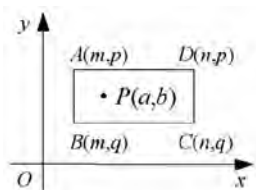
【答案】D

【解析】显然由题意可知,当 $t=0$ 时, $s \Rightarrow(t)=0$ 。故排除A、B选项。因为某人走完一半路程后,速度加快。因此,后半程的用时应少于前半程,排除C选项,故正确答案为D。

方法二:数形结合法

数形结合法,又称图像法或图示法。解决与图形或图像有关的选择題,常常要运用数形结合的思维方法,利用图形的直观性帮助解题。

例2 (2006年第8题) $P(a, b)$ 是第一象限内的矩形 $ABCD$ (含边界)中的一个动点, A, B, C, D 的坐标如图所示, 则 $\frac{b}{a}$ 的最大值与最小值依次是()。



A. $\frac{p}{m}, \frac{q}{n}$

B. $\frac{q}{m}, \frac{p}{n}$

C. $\frac{q}{m}, \frac{q}{n}$

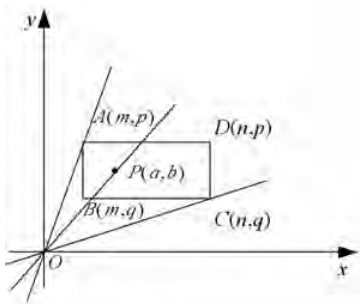
D. $\frac{p}{m}, \frac{p}{n}$

【答案】A

【解析】 $\frac{b}{a}$ 的值相当于线段 OP 所在直线的斜率。在第一象限内, 此斜率随着倾斜角的增大而增大。因此从下图中可以看出:

当 P 点与 A 点重合时, OP 斜率最大, 即 $\left(\frac{b}{a}\right)_{\max} = \frac{p}{m}$;

当 P 点与 C 点重合时, OP 斜率最小, 即 $\left(\frac{b}{a}\right)_{\min} = \frac{q}{n}$ 。故应选 A。



方法三:特例检验法

特例检验法,即取满足条件的特例(特殊值、特殊点、特殊图形、特殊位置等)进行验



证即可得正确选项,因为命题对一般情况成立,所以对特殊情况也成立。这主要针对有些选择题,用常规方法直接求解比较困难,若根据答案中所提供的信息,选择某些特殊情况进行分析,或选择某些特殊值进行计算,或将字母参数换成具体数值代入,这样把一般形式变为特殊形式,再进行判断就十分简单。

例3 (2007年第12题)当 $x \neq -1$ 或 $x \neq -2$ 时, $\frac{x-1}{x^2+3x+2} = \frac{m}{x+1} + \frac{n}{x+2}$ 恒成立,则()。

A. $m=2, n=3$

B. $m=3, n=2$

C. $m=2, n=3$

D. $m=3, n=2$

【答案】A

【解析】当 $x \neq -1$ 和 $x \neq -2$ 时, $\frac{x-1}{x^2+3x+2} = \frac{m}{x+1} + \frac{n}{x+2}$ 恒成立。因此,当 $x=0$ 和 $x=1$

时上述等式也成立,由此可得
$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{m}{2} + \frac{n}{2} \\ 0 = \frac{m}{2} + \frac{n}{3} \end{cases}$$
,解得 $\begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$,故应选A。

方法四:代入法

选项代入法是将选择支代入题干或题代入选择支进行检验,然后做出判断。该方法要对各选项逐个分析。

例4 (2005年第23题)设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,则A的对应于特征值2的一个特征向量

是()。

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

【答案】D

【解析】由 $A\alpha=2\alpha$, α 为特征值2对应的特征向量。将四个选项分别代入求得 $A\alpha$ 和 2α ,二者相等时对应的选项即为正确答案。当然利用等式 $A\alpha=2\alpha$,即 $(A-2E)\alpha=0$,也可求出 α ,但相对就麻烦了很多。

方法五:观察法

观察法,即观察题干及选择支特点,区别各选择支差异及相互关系做出选择。

例5 (2005年第2题)设 p 为正数,则 $x^2+px-99=()$ 。

A. $(x-9)(x-11)$

B. $(x+9)(x-11)$

C. $(x-9)(x+11)$

D. $(x+9)(x+11)$

【答案】C

【解析】此题看起来很复杂,有未知数存在,但仔细观察四个选项可知其表示方法相



我们发现和探求一般问题的规律,从而找到解决问题的途径。

例 8 (2004 年第 4 题) 设 $S_n=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n$, 则 $S_{2004}+S_{2005}=(\quad)$ 。

A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

【答案】 B

【解析】 $S_1=1$, $S_2=1-2=-1$, $S_3=1-2+3=2$, $S_4=1-2+3-4=-2$, \cdots

$$\text{由此类推可得 } S_n=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n=\begin{cases} -\frac{n}{2} & (n \text{ 为偶数}) \\ \frac{n+1}{2} & (n \text{ 为奇数}) \end{cases}$$

$$S_{2004}=-1002$$

$$S_{2005}=\frac{2005+1}{2}=1003$$

因此 $S_{2004}+S_{2005}=-1002+1003=1$ 。

方法九: 逆向求解法

逆向求解法是指当问题正面求解困难时, 可通过求解其对立面来获取答案。当问题中出现“至多”、“至少”一类的词汇时, 多用此方法求解。

例 9 (2007 年第 9 题) 有两个独立的报警器, 当紧急情况发生时, 它们发出信号的概率分别是 0.95 和 0.92, 则在紧急情况出现时, 至少有一个报警器发出信号的概率是()。

A. 0.920 B. 0.935
C. 0.950 D. 0.996

【答案】 D

【解析】 设事件 A 为“其中 1 个报警器发出信号”, 事件 B 为“另一个报警器发出信号”, 则 $P(A)=0.95$, $P(B)=0.92$ 。事件 A、B 至少有一个发生的对立事件为两个均不发生, 此事件的概率为: $1-[1-P(A)][1-P(B)]=1-(1-0.95)\times(1-0.92)=0.996$ 。故应选 D。

方法十: 总结规律法

总结规律法是指利用在平时学习中总结的一些规律来直接解题。这类规律或许不会出现在教科书中, 但却是很重要的规律性的知识。可以是自己总结的规律, 也可以是从参考书中学到的前人已总结的规律。由于使用时不必再进行推导, 效率当然会提高。但这要求我们在学习中要善于总结规律, 并熟记这些规律。

例 10 (2003 年第 23 题) 设 A 为 4 阶非零方阵, 其伴随矩阵 A^* 的秩 $r(A^*)=0$, 则秩 $r(A)$ 等于()。

A. 1 或 2 B. 1 或 3 C. 2 或 3 D. 3 或 4

【答案】 A

【解析】利用矩阵的秩与其伴随矩阵的秩之间的关系规律， $r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) \text{ 为满秩} \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) \leq n-2 \end{cases}$

因 $r(A^*)=0$ ， $r(A) \leq 4-2=2$ ，故选 A。

目录 Contents

绪论：GCT数学快速解题十大技巧 /1

第一部分 算术 /7

第一章 算术 /7

第一节 数的概念、性质和运算 /7

第二节 比和比例 /11

第二部分 初等代数 /17

第二章 算数和代数式 /17

第一节 实数 /17

第二节 复数 /19

第三节 代数式及其运算 /22

第三章 代数方程和方程组 /33

第一节 基本考点精析 /33

第四章 集合、映射和函数 /43

第一节 集合 /43

第二节 映射和函数 /45

第五章 不等式 /60

第一节 不等式的概念与解法 /60

第二节 特殊不等式的解法 /62

第六章 数列、数学归纳法 /73

第七章 排列、组合、二项式定理和古典概率 /86

第一节 排列与组合 /86

第二节 二项式定理 /88

- 第三节 古典概率 /89
- 第三部分 几何与三角 /100
- 第八章 常见几何图形 /100
- 第一节 常见平面几何图形 /100
- 第二节 空间几何体 /108
- 第九章 三角学 /126
- 第一节 三角函数 /126
- 第二节 两角和与差的三角函数 /131
- 第三节 反三角函数 /132
- 第四节 解简单的三角方程 /133
- 第十章 平面解析几何 /148
- 第一节 平面向量 /148
- 第二节 直线及其方程 /150
- 第三节 曲线和方程 /155
- 第四部分 一元函数积分 /176
- 第十一章 极限与连续 /176
- 第一节 函数 /176
- 第二节 极限 /179
- 第三节 函数的连续性 /184
- 第十二章 一元函数微分学 /193
- 第一节 导数的概念 /193
- 第二节 求导公式及运算法则 /195
- 第三节 微分 /202
- 第四节 中值定理与泰勒公式、洛必达法则 /204
- 第五节 函数的增减性、极值和最值 /208
- 第六节 曲线的凸凹、拐点和渐近线 /209
- 第十三章 一元函数积分学 /223
- 第一节 不定积分的概念和简单的计算 /223
- 第二节 定积分的概念及性质 /232
- 第三节 定积分的公式与算法 /236
- 第四节 定积分的应用 /240
- 第十四章 行列式 /253
- 第一节 行列式的概念和性质 /253
- 第二节 行列式的计算 /258
- 第十五章 矩阵 /266
- 第一节 矩阵的概念与运算 /266
- 第二节 可逆矩阵的逆矩阵 /270
- 第三节 矩阵的初等变换和初等矩阵 /273
- 第四节 矩阵的秩 /275

第五节 分块矩阵 /277
第十六章 向量 /290
第一节 向量的概念与运算 /290
第二节 向量的线性相关性 /291
第三节 向量组的极大线性无关组和秩 /294
第十七章 线性方程组 /304
第一节 线性方程组的基本概念 /304
第二节 齐次线性方程组 $Ax=0$ /306
第三节 非齐次线性方程组 $Ax=B$ /308
第十八章 矩阵的特征值和特征向量 /322
第一节 特征值和特征向量的基本概念 /322
第二节 矩阵的相似对角化的问题 /325
第三节 重要公式与结论 /327

附录

2009 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题
2009 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析
2008 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题
2008 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析
2007 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题
2007 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析
2006 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题
2006 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析
2005 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题
2005 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析
2004 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题
2004 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析
2003 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题
2003 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析

(注: 附录内容请登录 www.pkutest.cn, 点击“充值卡图书资料下载”, 输入卡号和密码, 登录后选择联考类的“GCT”, 然后下载)

第一部分 算术

第一章 算术



第一节 数的概念、性质和运算

1. 自然数和整数

我们在数物体的时候，用来表示物体个数的 1, 2, 3... 叫做自然数。一个物体也没有，用 0 表示。0 也是自然数，自然数是整数。

2. 分数和百分数

将单位“1”平均分成若干份，表示这样的一份或几份的数叫做分数。表示其中一份的数是这个分数的单位。分数有真分数、假分数、带分数等。把“1”平均分成多少份的数，称为分数的分母；表示取了多少份的数，称为分数的分子。

分子比分母小的分数称为真分数。如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{3}{4}$ 。

分子比分母大或者分子、分母相等的分数称为假分数。如 $\frac{4}{3}$ 、 $\frac{6}{5}$ 、 $\frac{2}{2}$ 。

一个整数和一个真分数合成的数，称为带分数。如 $2\frac{1}{3}$ 、 $4\frac{2}{5}$ 。

两个自然数相除，它的商可以用分数表示。如 $a \div b = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)。

两个数的比，也可用分数表示。如 $a:b = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)。

表示一个数是另一个数的百分之几的数叫做百分数。百分数也叫百分率或者百分比。百分数通常用“%”来表示。