全国硕士研究生入学考试模拟试卷系列精品丛书

2008年全国硕士研究生入学考试模拟试卷

数学一 · 数学二

全国硕士研究生入学考试辅导用书编审委员会　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

2008年全国硕士研究生入学考试模拟试卷·数学一、数学二/全国硕士研究生入学考试辅导用书编审委员会编著.—3版.—北京:北京大学出版社,2007.4

ISBN 978-7-301-09463-1

Ⅰ.2… Ⅱ.全… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-习题 Ⅳ.G643

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第087256号

书　　名:2008年全国硕士研究生入学考试模拟试卷·数学一、数学二(第3版)

著作责任者:全国硕士研究生入学考试辅导用书编审委员会　编著

责任编辑:刘　勇

标准书号:ISBN 978-7-301-09463-1/G·1587

出版发行:北京大学出版社

地　　址:北京市海淀区成府路205号　100871

网　　址:http://www.pup.cn

电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021　出版部 62754962

电子邮箱:zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者:

经 销 者:新华书店

787×1092　16开本　11.75印张　290千字

2007年4月第3版　2007年4月第1次印刷

定　　价:19.00元

前　　言

全国硕士研究生入学考试是国家选拔高层次高水平人才的考试，报考硕士研究生已经成为我国当代大学生选择发展方向的重要途径。2004 年参加全国硕士研究生入学考试的人数多达 94.5 万，2005 年已经上升到 117.2 万，2006 年继续上升，达到 127 万人，2007 年高达 128.2 万人。如此愈演愈烈的“考研热”是我国社会发展的大趋势和当代青年谋求发展相结合的产物。研究生入学考试的侧重点在于考查考生的综合能力。公共课是参加研究生入学考试道路上最大的障碍和挑战。许多考生并非由于专业课的缘故，而是公共课未达到国家最低录取分数线而与自己理想的学校失之交臂。

在硕士研究生入学考试竞争日趋激烈的形势下，为了满足广大考生的迫切需求，我们特组织了大量有丰富教学和辅导经验的专家和教授，花费大量的时间精心编写了这套《2008 年全国硕士研究生入学考试模拟试卷》，以便考生能在有限的时间内，通过这套模拟试卷的实战演练，在考试中夺得高分。

本套《2008 年全国硕士研究生入学考试模拟试卷》的特点如下：

一、作者阵容强大，预测具有权威性

本套丛书的主编都是考研培训学校的首席主讲专家，他们都在全国各地的考研辅导学校的一线亲自辅导广大考生的考前复习；从事多年的考研培训和教育工作，有相当丰富的辅导和教学工作经验；深谙研究生入学考试的命题规律和出题的动态，汇集清华大学、北京大学和中国人民大学的权威信息，浓缩成本套模拟试卷。

二、紧扣最新大纲，高效预测

本套《2008 年全国硕士研究生入学考试模拟试卷》严格按照最新考试大纲进行编写，紧密联系当前的考试动态以及最新形势与政策，注重实际操作演练。每套试卷均由一线著名专家精选材料，题题推敲，优化设计而成。

三、启迪备考，极具操作性

许多考生缺乏实际临场经验，本套模拟考场系列将精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，将浩渺的习题浓缩于有限的模拟题精华中，迅速拔高考生快速、准确、灵活的解题能力。为考研学子全程领航和理性分析，引领考生高效通过考研难关。

本套《2008 年全国硕士研究生入学考试模拟试卷》的题型与真题完全相同，题目难度与真题相当，或者略高于真题，让考生经过复习后，能有一种高屋建瓴的感觉。每套试卷都有详细的标准答案和解析。考生可以利用本套试卷进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

本套《2008 年全国硕士研究生入学考试模拟试卷》在编写过程中得到了北京大学光华管理学院、清华大学经管学院部分教授和专家的大力支持，在此表示诚挚的感谢。

由于时间有限，不当之处在所难免，望广大读者和专家批评指正。

本套丛书附有超值赠送服务。凡是购买本书者，都将免费获得由著名考研辅导专家主讲的价值 20 元的“中国大手笔教育在线一卡通”。考生可以登陆 www.firstedu.org.cn，免费注册“用户名”和“密码”，登陆系统，进行“学习卡注册”，然后可以自由选择 2008 年全国考研辅导班

的相关辅导课程进行学习。

2008 年全国考研辅导课程均由名师主讲，领衔主讲老师具有丰富的命题研究和阅卷评卷的经验。本套丛书由中国大手笔教育在线提供全程的技术服务与网络课堂支持。凡是购买本书的考生均可免费申请成为中国大手笔教育在线的会员，可以享受中国大手笔教育在线提供的一系列教学服务，如免费下载网络教学资料、最新大纲信息以及本书修订文件、权威考试资讯等。

中国大手笔教育在线客服咨询热线：010-62766398（总机）转 801、802、806、808

网址：www.firstedu.org.cn

编　者

2007 年 3 月于北京

目　　录

第一部分　数学一模拟试卷及答案与解析

第二部分　数学二模拟试卷及答案与解析

第 一 部 分

数学一模拟试卷及答案与解析

模拟试卷一

一、填空题(**本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.**)

(1) **若** $y=y(x)$**由方程** $x-\int_0^{y+x}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=0$ **所确定,则** $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$__________.

(2) **已知** $f(x)$**是微分方程** $xf'(x)-f(x)=\sqrt{2x-x^2}$**满足** $f(1)=0$ **的特解,则**$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$__________.

(3) **通过直线**$\begin{cases}4x+2y+3z=6,\\2x+y=0\end{cases}$**且与球面** $x^2+y^2+z^2=4$ **相切的平面方程为**__________.

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=$__________**,其中** Ω **为曲线**$\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$**绕** z **轴旋转一周而成的曲面与平面** $z=2,z=8$ **所围成的立体.**

(5) **设三阶方阵** $\boldsymbol{A}=(\alpha,\gamma_1,\gamma_2),\boldsymbol{B}=(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$**,其中** $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2$ **都是三维列向量,且**$|\boldsymbol{A}|=3,|\boldsymbol{B}|=4$**,则**$|5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}|=$__________.

(6) **设随机变量** X **服从于参数为**$(2,p)$**的二项分布,随机变量** Y **服从于参数为**$(3,p)$**的二项分布,若** $P\{X\geqslant1\}=\frac{5}{9}$**,则** $P\{Y\geqslant1\}=$__________.

二、选择题(**本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.**)

(7) **当** $x\to1$ **时,函数** $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$**的极限**(　　).

(A) **等于** 2　　(B) **等于** 0　　(C) **为**∞　　(D) **不存在但不为**∞

(8) **级数**$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$(**常数** $\alpha>0$)(　　).

(A) **发散**　　(B) **条件收敛**　　(C) **绝对收敛**　　(D) **收敛性与** α **有关**

(9) **由**$\begin{cases}x=\cos^3t,\\y=\sin^3t\end{cases}\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$**所确定的函数** $y=y(x)$**的图形在**$(0,1)$**内**(　　).

(A) **单调下降且向下凹**　　(B) **单调下降且向上凹**

(C) **单调上升且向下凹**　　(D) **单调上升且向上凹**

(10) **设** $f(x)=3x^3+x^2|x|$**,则使** $f^{(n)}(0)$**存在的最高阶数** n **为**(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(11) **要使** $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1/2\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1/2\end{bmatrix}$**都是线性方程组** $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ **的解,只要系数矩阵** $\boldsymbol{A}$ **为**(　　).

(A) $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(12) 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,向量 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,向量 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,则对任意常数 k 必有(　　).

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关 (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性相关

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关 (D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关

(13) 设 $P\{X=k\}=\dfrac{c\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}(k=0,2,4,\cdots)$是 X 的概率分布,则 λ,c 一定满足(　　).

(A) $\lambda>0$ (B) $c>0$ 且 $\lambda\neq0$ (C) $c\lambda>0$ (D) $c>0$ 且 $\lambda>0$

(14) 假设随机变量 X 服从指数分布,则随机变量 $Y=\min\{X,2\}$的分布函数(　　).

(A) 是连续函数 (B) 至少有两个间断点

(C) 是阶梯函数 (D) 恰好有一个间断点

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 11 分)

设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$,其中 f 具有二阶连续偏导数. 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(16) (本题满分 12 分)

设 $f''(x)<0,f(0)=0$,证明对任何 $x_1>0,x_2>0$,有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

(17) (本题满分 11 分)

在变力 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 的作用下,质点由原点沿直线运动到椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$. 问当 ξ,η,ζ 取何值时,力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 最大? 并求出 W 的最大值.

(18) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$连续,且关于 $x=T$ 对称,$a<T<b$. 证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 2\int_T^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x.$$

(19) (本题满分 12 分)

计算 $\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由 $y=x^3,y=1,x=-1$ 所围成的区域,$f(u)$为连续函数.

(20) (本题满分 9 分)

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,问:

① α_1 能否由 α_2,α_3 线性表出? 证明你的结论.

② α_4 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出? 证明你的结论.

(21) (本题满分 9 分)

设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$,对应的特征值向量依次为

$$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \xi_2=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\quad \xi_3=\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix},\quad 又向量\ \beta=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}.$$

① 将 β 用 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性表示;

② 求 $A^n\beta$（n 为自然数）.

(22)（本题满分 9 分）

设随机变量 X 与 Y 独立，X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，Y 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布，试求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度（计算结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示，其中

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\Bigg).$$

(23)（本题满分 9 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数.

模拟试卷一答案与解析

一、填空题

（1）【答案】 0.

【解析】 方程两边对 x 求导得 $1-\mathrm{e}^{-(y+x)^2}(1+y')=0$.

当 $x=0$ 时 $y=0$，$y'(0)=0$. 上式两边再对 x 求导得

$$\mathrm{e}^{-(y+x)^2}[-2(y+x)(y'+1)^2]+\mathrm{e}^{-(y+x)^2}y''=0.$$

故 $y''(0)=0$.

（2）【答案】 $-\pi/8$.

【解析】 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=f(1)-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.

将 $xf'(x)-f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ 及 $f(1)=0$ 代入上式得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1[f(x)+\sqrt{2x-x^2}]\mathrm{d}x.$$

即
$$2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2=-\frac{\pi}{4}.$$

故
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\pi/8.$$

（3）【答案】 $z=2$.

【解析】 过直线的平面束方程为

$$(2x+y)+\lambda(4x+2y+3z-6)=0,$$

即
$$(2+4\lambda)x+(1+2\lambda)y+3\lambda z-6\lambda=0. \qquad ①$$

假定 $\lambda=\lambda_0$ 时，由方程①所确定的平面与球面相切，则点 $O(0,0,0)$ 到此平面的距离为 2，即

$$\frac{|6\lambda_0|}{\sqrt{(2+4\lambda_0)^2+(1+2\lambda_0)^2+(3\lambda_0)^2}}=2.$$

解得 $\lambda_0=-\frac{1}{2}$，故所求平面的方程为 $z=2$.

（4）【答案】 336π.

【解析】 旋转曲面的方程为：$2z=x^2+y^2$，用先二后一法求解得：

$$\iiint_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_2^8\Big[\iint_{x^2+y^2\leqslant 2z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}z$$

$$=\int_2^8\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\mathrm{d}r=2\int_2^8\pi z^2\mathrm{d}z=336\pi.$$

（5）【答案】 63.

【解析】 因 $5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=5(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2)-2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2)=(5\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\gamma}_1,3\boldsymbol{\gamma}_2)$，故

$$|5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}|=|5\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}\quad 3\boldsymbol{\gamma}_1\quad 3\boldsymbol{\gamma}_2|$$

$$= 9(|5\boldsymbol{\alpha}\quad \boldsymbol{\gamma}_1\quad \boldsymbol{\gamma}_2| - |2\boldsymbol{\beta}\quad \boldsymbol{\gamma}_1\quad \boldsymbol{\gamma}_2|)$$
$$= 9(5|\boldsymbol{A}| - 2|\boldsymbol{B}|) = 9(5 \times 3 - 2 \times 4) = 63.$$

(6)【答案】 $\frac{19}{27}$.

【解析】 因 $P\{X \geqslant 1\} = \frac{5}{9}$，故

$$1 - P\{X = 0\} = 1 - C_2^0 p^0 (1-p)^2 = \frac{5}{9}.$$

解得 $p = \frac{1}{3}$，故 $P\{Y \geqslant 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - C_3^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}$.

二、选择题

(7)【答案】 (D).

【解析】 $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1^-} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = 2 \cdot 0 = 0.$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \to 1^+} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = \infty,$$

当 $x \to 1$ 时函数没有极限，也不是∞，故应选(D).

(8)【答案】 (C).

【解析】 $\left|(-1)^n\left(1 - \cos\frac{\alpha}{n}\right)\right| = 1 - \cos\frac{\alpha}{n} \sim \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{n^2}\ (n \to +\infty)$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{n^2}$ 收敛 $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(1 - \cos\frac{\alpha}{n}\right)\right|$ 收敛 $\Longrightarrow$ 原级数绝对收敛. 应选(C).

(9)【答案】 (B).

【解析】 由$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$的符号即可判断曲线的单调性与凹向. 本题属于基本题型，只是函数以参数方程形式出现.

当 $t \in (0, \pi/2)$时，$x \in (0,1)$，且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t < 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-\tan t) = \frac{d}{dt}(-\tan t) \cdot \frac{dt}{dx} = -\sec^2 t \cdot \frac{1}{3\cos^2 t(-\sin t)} = \frac{1}{3\cos^4 t\sin t} > 0.$$

故选(B).

(10)【答案】 (C).

【解析】 因 $3x^3$ 处处任意阶可导，只需考查 $\varphi(x) = x^2|x|$，它是分段函数，$x = 0$ 是连接点.

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x^3, & x < 0, \\ x^3, & x \geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \varphi'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x < 0, \\ 3x^2, & x > 0, \end{cases}$$

又 $\varphi'_+(0) = (x^3)'|_{x=0} = 0$，$\varphi'_-(0) = (-x^3)'|_{x=0} = 0 \Rightarrow \varphi'(0) = 0$；

即 $$\varphi'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x < 0, \\ 3x^2, & x \geqslant 0; \end{cases}$$

同理可得 $$\varphi''(x) = \begin{cases} -6x, & x < 0, \\ 6x, & x > 0, \end{cases} \quad \varphi''(0) = 0;$$

即 $$\varphi''(x) = \begin{cases} -6x, & x < 0 \\ 6x, & x \geqslant 0 \end{cases} = 6|x|,$$

因 $y=|x|$ 在 $x=0$ 不可导$\Rightarrow\varphi'''(0)$不存在. 应选(C).

(11)【答案】 (A).

【解析】 因为 ξ_1,ξ_2 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 的 2 个线性无关的解,故 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant 2$,知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant 1$. 故选(A).

(12)【答案】 (A).

【解析】 方法 1 用排除法,由题设条件知:$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 线性相关,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$ 线性无关,且 k 任意.

① 取 $k=0$,可排除(B)、(C).

② 取 $k=1$,若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+\beta_2$ 线性相关,则由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,$\beta_1+\beta_2$ 必可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示;又 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,所以 β_2 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,与题设矛盾. 可排除(D).

方法 2 设 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+\lambda_4(k\beta_1+\beta_2)=0$.

若 $\lambda_4=0$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关必有 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$,从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关;

若 $\lambda_4\neq 0$,则 $k\beta_1+\beta_2$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,从而 β_2 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,与题设矛盾. 因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 亦线性无关. 故选(A).

(13)【答案】 (B).

【解析】 对一切 k,$P\{X=k\}\geqslant 0$,故 $c>0$.

(14)【答案】 (D).

【解析】 令 $Y=\min\{X,2\}$,当 $y<0$ 时,$F_Y(y)=0$;当 $y\geqslant 2$ 时,$F_Y(y)=1$.

当 $0\leqslant y<2$ 时 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\min\{X,2\}\leqslant y\}=P\{X\leqslant y\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda y}$.

因此 $F_Y(y)$恰有一个间断点($y=2$).

三、解答题

(15)【解析】 这是求带抽象函数记号的复合函数的二阶混合偏导数的典型问题.

先求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$. 由复合函数求导法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^x\sin y)+f_2'\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=f_1'\cdot\mathrm{e}^x\sin y+f_2'\cdot 2x.$$

再对 y 求导,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(f_1'\mathrm{e}^x\sin y+f_2'2x)\\&=(f_{11}''\mathrm{e}^x\cos y+f_{12}''2y)\mathrm{e}^x\sin y+f_1'\mathrm{e}^x\cos y+(f_{21}''\mathrm{e}^x\cos y+f_{22}''2y)2x\\&=f_{11}''\cdot\mathrm{e}^{2x}\sin y\cos y+2f_{12}''\cdot\mathrm{e}^x(y\sin y+x\cos y)+4f_{22}''\cdot xy+f_1'\cdot\mathrm{e}^x\cos y.\end{aligned}$$

(16)【证明】 证法 1 用拉格朗日中值定理,不妨设 $x_2>x_1>0$,要证的不等式是

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

在$[0,x_1]$上用中值定理,有

$$f(x_1)-f(0)=f'(\xi)x_1,\quad 0<\xi<x_1;$$

在$[x_2,x_1+x_2]$上用中值定理,又有

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\eta)x_1,\quad x_2<\eta<x_1+x_2;$$

由 $f''(x)<0$,$f'(x)$单调减,而 $\xi<x_1<x_2<\eta$,有 $f'(\xi)>f'(\eta)$. 因此,

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0)=f(x_1).$$

证法 2　作为函数不等式来证明. 要证

$$f(x_1+x)<f(x_1)+f(x),\quad x>0.$$

令 $\varphi(x)=f(x_1)+f(x)-f(x_1+x)$，**则** $\varphi'(x)=f'(x)-f'(x_1+x)$. **由** $f''(x)<0$，$f'(x)$ **单调递减，有** $f'(x)>f'(x_1+x)$，$\varphi'(x)>0$，**由此**

$$\varphi(x)>\varphi(0)=f(x_1)+f(0)-f(x_1)=0\quad(x>0).$$

改 x **为** x_2 **即得证.**

(17)**【解析】** ① **先写出在变力** $\boldsymbol{F}$ **的作用下质点由原点沿直线运动到点** $M(\xi,\eta,\zeta)$**时所作的功** W **的表达式. 点** O **到点** M **的线段记为** L**，则**

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z.$$

② **计算曲线积分：**L **的参数方程是** $x=t\xi,y=t\eta,z=t\zeta,t\in[0,1]$.

$$W=\int_0^1(\eta\zeta t^2\cdot\xi+\xi\zeta t^2\cdot\eta+\xi\eta t^2\cdot\zeta)\mathrm{d}t=3\xi\eta\zeta\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=\xi\eta\zeta.$$

③ **化为最值问题并求解：问题变成求** $W=\xi\eta\zeta$ **在条件**

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1\quad(\xi\geqslant0,\eta\geqslant0,\zeta\geqslant0)$$

下的最大值与最大值点.

用拉格朗日乘子法求解. 令

$$F(\xi,\eta,\zeta,\lambda)=\xi\eta\zeta+\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right),$$

则有 $$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\xi}=\eta\zeta+2\lambda\dfrac{\xi}{a^2}=0,\\[2mm]\dfrac{\partial F}{\partial\eta}=\xi\zeta+2\lambda\dfrac{\eta}{b^2}=0,\\[2mm]\dfrac{\partial F}{\partial\zeta}=\xi\eta+2\lambda\dfrac{\zeta}{c^2}=0,\\[2mm]\dfrac{\partial F}{\partial\lambda}=\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$$

解此方程组：对前三个方程，分别乘以 ξ,η,ζ **得** $\dfrac{\xi^2}{a^2}=\dfrac{\eta^2}{b^2}=\dfrac{\zeta^2}{c^2}$($\lambda\neq0$ **时**).

代入第四个方程得 $\xi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}a,\eta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}b,\zeta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}c$.

相应的 $W=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}abc=\dfrac{\sqrt{3}}{9}abc$. **当** $\lambda=0$ **时解相应的** ξ,η,ζ **得** $W=0$.

实际问题存在最大值，故当 $\xi,\eta,\zeta=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}a,\dfrac{1}{\sqrt{3}}b,\dfrac{1}{\sqrt{3}}c\right)$ **时** W **取最大值** $\dfrac{\sqrt{3}}{9}abc$.

(18)**【解析】** $f(x)$ **关于** $x=T$ **对称，则** $f(x+T)=f(T-x)$，

$$\text{右边}=2\int_T^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^{2T-b}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_T^b f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{2T-b}f(x)\mathrm{d}x,$$

可知,要证命题成立,只需证

$$\int_T^b f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x=0,$$

即需证

$$\int_T^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x=-\int_T^b f(u)\mathrm{d}u=\int_b^T f(u)\mathrm{d}u.$$

比较左右两端的积分限,可知应作代换 $x=2T-u$.

【证明】 $\int_T^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x=2T-u} \int_T^b f(2T-u)(-\mathrm{d}u)=-\int_T^b f[T-(u-T)]\mathrm{d}u$

$$\xlongequal[x=T\text{ 对称}]{\text{因为 } f(x)\text{ 关于}} -\int_T^b f[T+(u-T)]\mathrm{d}u=-\int_T^b f(u)\mathrm{d}u=-\int_T^b f(x)\mathrm{d}x,$$

于是$\int_T^b f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x=0$. 等式两边同时加上$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_T^b f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^b f(x)\mathrm{d}x+\int_T^b f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x\\&=2\int_T^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

命题得证.

(19)**【解析】** 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$(因为 $f(u)$连续,所以 $F(x)$存在),则有

$$\begin{aligned}&\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{x^3}^1\mathrm{d}y+\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{x^3}^1 yf(x^2+y^2)\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^1 x(1-x^3)\mathrm{d}x+\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{x^3}^1\frac{1}{2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}(x^2+y^2)\\&=-2\int_0^1 x^4\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-1}^1 xF(x^2+y^2)\Big|_{x^3}^1\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\int_{-1}^1 x[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]\mathrm{d}x=-\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

(因为$[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]$为偶函数,所以 $x[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]$为奇函数.)

(20)**【解析】** ① α_1 能由 α_2,α_3 线性表示. 理由是由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关定义得结论.

② 因为 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,所以 α_2,α_3 线性无关,假设 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出,设

$$\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,$$

由①知,可设 $\alpha_1=l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$,那么代入上式整理得

$$\alpha_4=(k_1l_2+k_2)\alpha_2+(k_1l_3+k_3)\alpha_3.$$

即 α_4 可以由 α_2,α_3 线性表出,从而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关,这与已知矛盾.

因此,α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

(21)**【解析】** ① 设 $\beta=x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3$,对增广矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$作初等行变换,有

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&3&8&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

解出 $x_3=1,x_2=-2,x_1=2$，**故** $\beta=2\xi_1-2\xi_2+\xi_3$.

② **由** $A\xi_i=\lambda_i\xi_i$ **得** $A^n\xi_i=\lambda_i^n\xi_i(i=1,2,3)$. **据①结论** $\beta=2\xi_1-2\xi_2+\xi_3$ **有**

$$A\beta=A(2\xi_1-2\xi_2+\xi_3)=2A\xi_1-2A\xi_2+A\xi_3.$$

于是

$$A^n\beta=2A^n\xi_1-2A^n\xi_2+A^n\xi_3=2\lambda_1^n\xi_1-2\lambda_2^n\xi_2+\lambda_3^n\xi_3$$

$$=2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-2\cdot 2^n\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+3^n\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix}.$$

（22）**【解析】** **解法** 1 **先求分布函数** $F_Z(z)$.

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}y.$$

因此，Z **的密度函数为**

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}y,$$

其中 $\varphi(x)$**是标准正态分布的分布密度. 由于** $\varphi(x)$**是偶函数，故有**

$$\varphi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)=\varphi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right).$$

于是 $f_Z(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{\pi+\mu-z}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\pi+\mu-z}{\sigma}\right)\right].$

解法 2 **直接应用相互独立随机变量之和密度的卷积公式求** $f_Z(z)$**更为简单**.

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(y+\mu-z)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{\pi+\mu-z}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\pi+\mu-z}{\sigma}\right)\right].$$

（23）**【解析】** $F(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+2Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+2y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

当 $z\leqslant 0$ **时**，$F(z)=0$；

当 $z>0$ **时**，$F(z)=\displaystyle\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{\frac{z-x}{2}}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\mathrm{d}y=\int_0^z(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-z})\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-z}-z\mathrm{e}^{-z}.$

所以 $Z=X+2Y$ **的分布函数** $F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-z}-z\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 0.\end{cases}$

模拟试卷二

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 若 $g(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{f[g(x)]\}\Big|_{x=0}=$ __________.

(2) 已知 $f(x)$是微分方程 $f'(x)+f(x)\cos x=\cos x$ 满足 $f(0)=0$ 的解,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$ __________.

(3) 以 $y_1=\mathrm{e}^x, y_2=\mathrm{e}^{2x}\cos x$ 为特解的最低阶数的常系数线性齐次方程为__________.

(4) 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 2,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x+1)^n$ 的收敛区间为__________.

(5) 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}, a<0, \boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\dfrac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,且 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,则 $a=$__________.

(6) 连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{x^2}, & x>100, \\ 0, & x\leqslant 100, \end{cases}$ 则 $P\{X>90\}=$ __________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$(　　).

(A) 有且仅有水平渐近线　　(B) 有且仅有垂直渐近线

(C) 既有水平渐近线,也有垂直渐近线　　(D) 既无水平渐近线,也无垂直渐近线

(8) 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$,则点 P 的坐标是(　　).

(A) $(1,-1,2)$　　(B) $(-1,1,2)$　　(C) $(1,1,2)$　　(D) $(-1,-1,2)$

(9) 设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的解,C_1,C_2 是任意常数,则该非齐次方程的通解是(　　).

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$　　(B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$　　(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

(10) 设函数 $f(x)=x^2(0\leqslant x<1)$,而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x(-\infty<x<+\infty)$,其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x(n=1,2,3,\cdots)$,则 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)$等于(　　).

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $-\dfrac{1}{4}$　　(C) $\dfrac{1}{4}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$