

全国硕士研究生入学考试模拟试卷系列精品丛书

2008 年全国硕士研究生入学考试模拟试卷

数学三 · 数学四

全国硕士研究生入学考试辅导用书编审委员会 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

2008年全国硕士研究生入学考试模拟试卷·数学三、数学四/全国硕士研究生入学考试辅导用书编审委员会编著. —3版. —北京:北京大学出版社,2007.4

ISBN 978-7-301-09464-8

I. 2… II. 全… III. 高等数学-研究生-入学考试-习题 IV. G643

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第087255号

书 名: 2008年全国硕士研究生入学考试模拟试卷·数学三、数学四(第3版)

著作责任者: 全国硕士研究生入学考试辅导用书编审委员会 编著

责任编辑: 顾卫宇 曾琬婷

标准书号: ISBN 978-7-301-09464-8/G·1588

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路205号 100871

网 址: <http://www.pup.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021 出版部 62754962

电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者:

经 销 者: 新华书店

787×1092 16开本 10.5印张 250千字

2007年4月第3版 2007年4月第1次印刷

定 价: 19.00元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024 电子邮箱:fd@pup.pku.edu.cn

前 言

全国硕士研究生入学考试是国家选拔高层次高水平人才的考试,报考硕士研究生已经成为我国当代大学生选择发展方向的重要途径。2004年参加全国硕士研究生入学考试的人数多达94.5万,2005年已经上升到117.2万,2006年继续上升,达到127万人,2007年高达128.2万人。如此愈演愈烈的“考研热”是我国社会发展的大势和当代青年谋求发展相结合的产物。研究生入学考试的侧重点在于考查考生的综合能力。公共课是参加研究生入学考试道路上最大的障碍和挑战。许多考生并非由于专业课的缘故,而是公共课未达到国家最低录取分数线而与自己理想的学校失之交臂。

在硕士研究生入学考试竞争日趋激烈的形势下,为了满足广大考生的迫切需求,我们特组织了大量有丰富教学和辅导经验的专家和教授,花费大量的时间精心编写了这套《2008年全国硕士研究生入学考试模拟试卷》,以便考生能在有限的时间内,通过这套模拟试卷的实战演练,在考试中夺得高分。

本套《2008年全国硕士研究生入学考试模拟试卷》的特点如下:

一、作者阵容强大,预测具有权威性

本套丛书的主编都是考研培训学校的首席主讲专家,他们都在全国各地的考研辅导学校的一线亲自辅导广大考生的考前复习;从事多年的考研培训和教育工作,有相当丰富的辅导和教学工作经验;深谙研究生入学考试的命题规律和出题的动态,汇集清华大学、北京大学和中国人民大学的权威信息,浓缩成本套模拟试卷。

二、紧扣最新大纲,高效预测

本套《2008年全国硕士研究生入学考试模拟试卷》严格按照最新考试大纲进行编写,紧密联系当前的考试动态以及最新形势与政策,注重实际操作演练。每套试卷均由一线著名专家精选材料,题题推敲,优化设计而成。

三、启迪备考,极具操作性

许多考生缺乏实际临场经验,本套模拟考场系列将精辟阐明解题思路,全面展现题型变化,将浩渺的习题浓缩于有限的模拟题精华中,迅速拔高考生快速、准确、灵活的解题能力。为考研学子全程领航和理性分析,引领考生高效通过考研难关。

本套《2008年全国硕士研究生入学考试模拟试卷》的题型与真题完全相同,题目难度与真题相当,或者略高于真题,让考生经过复习后,能有一种高屋建瓴的感觉。每套试卷都有详细的标准答案和解析。考生可以利用本套试卷进行考前模拟实战训练,检验自己的学习成果,及时进行查漏补缺,有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练,这样效果最佳。

本套《2008年全国硕士研究生入学考试模拟试卷》在编写过程中得到了北京大学光华管理学院、清华大学经管学院部分教授和专家的大力支持,在此表示诚挚的感谢。

由于时间有限,不当之处在所难免,望广大读者和专家批评指正。

本套丛书附有超值赠送服务。凡是购买本书者,都将免费获得由著名考研辅导专家主讲的价值20元的“中国大手笔教育在线一卡通”。考生可以登陆 www.firstedu.org.cn,免费注册“用户名”和“密码”,登陆系统,进行“学习卡注册”,然后可以自由选择2008年全国考研辅导

班的相关辅导课程进行学习。

2008年全国考研辅导课程均由名师主讲,领衔主讲老师具有丰富的命题研究和阅卷评卷的经验。本套丛书由中国大手笔教育在线提供全程的技术服务与网络课堂支持。凡是购买本书的考生均可免费申请成为中国大手笔教育在线的会员,可以享受中国大手笔教育在线提供的一系列教学服务,如免费下载网络教学资料、最新大纲信息以及本书修订文件、权威考试资讯等。

中国大手笔教育在线客服咨询热线:010-62766398(总机)转 801、802、806、808

网址:www.firstedu.org.cn

编 者

2007年3月于北京

目 录

第一部分 数学三模拟试卷及答案与解析

模拟试卷一	3
模拟试卷一答案与解析	6
模拟试卷二	13
模拟试卷二答案与解析	16
模拟试卷三	22
模拟试卷三答案与解析	25
模拟试卷四	32
模拟试卷四答案与解析	36
模拟试卷五	43
模拟试卷五答案与解析	46
模拟试卷六	53
模拟试卷六答案与解析	56
模拟试卷七	63
模拟试卷七答案与解析	66
模拟试卷八	73
模拟试卷八答案与解析	77
模拟试卷九	83
模拟试卷九答案与解析	86
模拟试卷十	92
模拟试卷十答案与解析	95

第二部分 数学四模拟试卷及答案与解析

模拟试卷一	103
模拟试卷一答案与解析	106
模拟试卷二	109
模拟试卷二答案与解析	113
模拟试卷三	117

模拟试卷三答案与解析	121
模拟试卷四	124
模拟试卷四答案与解析	128
模拟试卷五	130
模拟试卷五答案与解析	133
模拟试卷六	136
模拟试卷六答案与解析	140
模拟试卷七	143
模拟试卷七答案与解析	146
模拟试卷八	150
模拟试卷八答案与解析	153
模拟试卷九	156
模拟试卷九答案与解析	160
模拟试卷十	163
模拟试卷十答案与解析	167

第一部分

数学三模拟试卷及 答案与解析

模拟试卷一

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) + 2x \iint_D f(x+y) dx dy$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$ _____.

(2) 已知函数 $f(x)$ 是微分方程 $xf'(x) - f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ 满足 $f(1) = 0$ 的特解, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____.

(3) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} \sqrt{n} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) =$ _____.

(4) 设三阶方阵 $A = (\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $B = (\beta, \gamma_1, \gamma_2)$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ 都是三维列向量, 且 $|A| = 3$, $|B| = 4$, 则 $|5A - 2B| =$ _____.

(5) 已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2x - 1}$ ($-\infty < x < +\infty$), 则 X 的方差为 _____.

(6) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$ 则概率 $P\left\{|X| < \frac{1}{2}\right\} =$ _____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限().

(A) 等于 2 (B) 等于 0 (C) 为 ∞ (D) 不存在但不为 ∞

(8) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n}\right)$ (常数 $\alpha > 0$) ().

(A) 发散 (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛 (D) 收敛性与 α 有关

(9) 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线().

(A) 只有 1 条 (B) 只有 2 条 (C) 至少有 3 条 (D) 不存在

(10) 设函数 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为().

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(11) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是().

(A) $f(a) = 0$ 且 $f'(a) = 0$ (B) $f(a) = 0$ 且 $f'(a) \neq 0$

(C) $f(a) > 0$ 且 $f'(a) > 0$ (D) $f(a) < 0$ 且 $f'(a) < 0$

(12) 要使 $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 都是线性方程组 $Ax = 0$ 的解, 只要系数矩阵 A 为().

(A) $[-1 \ 1 \ 2]$

(B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(13) 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则对任意常数 k 必有().

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关

(14) 设 $P\{X=k\} = \frac{c\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ ($k=0, 2, 4, \dots$) 是 X 的概率分布, 则 λ, c 一定满足().

(A) $\lambda > 0$

(B) $c > 0$ 且 $\lambda \neq 0$

(C) $c\lambda > 0$

(D) $c > 0$ 且 $\lambda > 0$

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 11 分)

设函数 $z = f(e^x \sin y, x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(16) (本题满分 12 分)

假设生产和销售某产品的收益 R 是产量 q 的二次函数. 经统计得知: 当产量 q 分别为 0, 2, 4 万件时, 总收入 R 分别为 0, 6, 8 万元. 试确定 R 与 q 之间的函数关系.

(17) (本题满分 11 分)

求微分方程 $y' + y \cos x = (\ln x) e^{-\sin x}$ 的通解.

(18) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且关于 $x = T$ 对称, $a < T < b$. 证明:

$$\int_a^b f(x) dx = 2 \int_T^b f(x) dx + \int_a^{2T-b} f(x) dx.$$

(19) (本题满分 12 分)

计算二重积分 $\iint_D [1 + yf(x^2 + y^2)] dx dy$, 其中 D 是由 $y = x^3, y = 1, x = -1$ 所围成的区域, $f(u)$ 为连续函数.

(20) (本题满分 9 分)

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 问:

① α_1 能否由 α_2, α_3 线性表示? 证明你的结论.

② α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 证明你的结论.

(21) (本题满分 9 分)

设三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 对应的特征值向量依次为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix},$$

又向量 $\beta = (1, 2, 3)^T$.

① 将 β 用 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性表示;

② 求 $A^n \beta$ (n 为自然数).

(22) (本题满分 9 分)

设随机变量 X 与 Y 独立, X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, Y 服从 $[-\pi, \pi]$ 上的均匀分布. 试求 $Z = X + Y$ 的概率密度 (计算结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示, 其中

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt).$$

(23) (本题满分 9 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求随机变量 $Z = X + 2Y$ 的分布函数.

模拟试卷一答案与解析

一、填空题

(1) 【答案】 $\pi/2$.

【解析】 $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy + \iint_D f(x+y) dx dy = \iint_D 2x dx dy$
 $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr + 0 \cdot \iint_D f(x+y) dx dy = \frac{\pi}{2}$.

(2) 【答案】 $-\pi/8$.

【解析】 因为 $\int_0^1 f(x) dx = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x) dx$,

将 $xf'(x) - f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ 及 $f(1)=0$ 代入得

$$\int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 [f(x) + \sqrt{2x-x^2}] dx,$$

即 $2 \int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx = -\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = -\frac{\pi}{4}$,

故 $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{\pi}{8}$.

(3) 【答案】 2.

【解析】 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = 2$.

(4) 【答案】 63.

【解析】 因 $5A-2B=5(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)-2(\beta, \gamma_1, \gamma_2)=(5\alpha-2\beta, 3\gamma_1, 3\gamma_2)$, 故

$$\begin{aligned} |5A-2B| &= |5\alpha-2\beta \quad 3\gamma_1 \quad 3\gamma_2| = 9(|5\alpha \quad \gamma_1 \quad \gamma_2| - |2\beta \quad \gamma_1 \quad \gamma_2|) \\ &= 9(5|A|-2|B|) = 9(5 \times 3 - 2 \times 4) = 63. \end{aligned}$$

(5) 【答案】 $1/2$.

【解析】 解法 1 因 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}/\sqrt{2}} \exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2(1/\sqrt{2})^2}\right\},$$

故 $X \sim N\left(1, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$, 从而 $D(X) = \frac{1}{2}$.

解法 2 因 $E(X)=1$, 故

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-1)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (x-1)^2 e^{-(x-1)^2} dx \\ &\stackrel{\text{令 } x-1=t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^2 e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t de^{-t^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

(6) 【答案】 $\frac{1}{3}$.

【解析】 应先确定 A , 再求概率 $P\left\{|X| < \frac{1}{2}\right\}$, 可转化为定积分计算.

由概率密度的性质, 有

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2A \arcsin x \Big|_0^1 = 2A \cdot \frac{\pi}{2} = A\pi,$$

所以 $A = \frac{1}{\pi}$. 于是

$$\begin{aligned} P\left\{|X| < \frac{1}{2}\right\} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

二、选择题

(7) 【答案】 (D).

【解析】 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) e^{\frac{1}{x-1}} = 2 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) e^{\frac{1}{x-1}} = \infty,$$

所以当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数没有极限, 也不是 ∞ . 应选(D).

(8) 【答案】 (C).

【解析】 $\left|(-1)^n \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n}\right)\right| = 1 - \cos \frac{\alpha}{n} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{n^2} (n \rightarrow +\infty)$, 又

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{n^2} \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n}\right)\right| \text{ 收敛} \Rightarrow \text{原级数绝对收敛}.$$

应选(C).

(9) 【答案】 (B).

【解析】 求曲线上的点, 使该点处的切向量 τ 与平面 $x + 2y + z = 4$ 的法向量 $n = \{1, 2, 1\}$ 垂直. 曲线在任意点处的切向量为

$$\tau = \{x'(t), y'(t), z'(t)\} = \{1, -2t, 3t^2\},$$

于是

$$n \perp \tau \Leftrightarrow n \cdot \tau = 0 \Leftrightarrow 1 - 4t + 3t^2 = 0.$$

解得 $t = 1, t = \frac{1}{3}$ (对应于曲线上的点均不在给定的平面上), 因此, 只有两条这种切线. 应选(B).

(10) 【答案】 (C).

【解析】 因 $3x^3$ 处处任意阶可导, 只需考查 $\varphi(x) = x^2|x|$. 它是分段函数, $x = 0$ 是连接点. 由于

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x^3, & x < 0, \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x < 0, \\ 3x^2, & x > 0, \end{cases}$$

又 $\varphi'_+(0) = (x^3)'_+ \Big|_{x=0} = 0, \quad \varphi'_-(0) = (-x^3)'_- \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \varphi'(0) = 0,$

则 $\varphi'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x < 0, \\ 3x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

同理可得 $\varphi''(x) = \begin{cases} -6x, & x < 0, \\ 6x, & x > 0, \end{cases} \quad \varphi''(0) = 0,$

即 $\varphi''(x) = \begin{cases} -6x, & x < 0, \\ 6x, & x \geq 0 \end{cases} = 6|x|,$

因 $y = |x|$ 在 $x=0$ 不可导, 所以 $\varphi'''(0)$ 不存在. 应选(C).

(11) 【答案】 (B).

【解析】 因为函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导, 故 $f(x)$ 必在点 $x=a$ 处连续. 由此可知, 若 $f(a) \neq 0$, 则存在点 $x=a$ 的一个邻域, 使 $f(x)$ 在该邻域内与 $f(a)$ 同号, 从而在该领域内 $|f(x)|$ 或恒等于 $f(x)$ 或恒等于 $-f(x)$, 即 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处必可导. 可见(C), (D) 不正确.

为了判定选项(A)还是选项(B)正确, 可采用举例法:

设 $f(x) = x^2, a=0, f(x)$ 满足 $f(0) = f'(0) = 0$, 但是 $|f(x)| = f(x) = x^2$ 在点 $x=0$ 处可导, 可见(A)不正确. 从而应选(B).

【点评】 可以证明在题设的条件下, 若 $f(a) = f'(a) = 0$, 则必有 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处可导, 且导数值仍为 0; 若 $f(a) = 0$, 但 $f'(a) \neq 0$, 则 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处左、右导数存在但不相等, 因而不可导. 事实上, 由 $f(a) = 0$, 令 $\varphi(x) = |f(x)|$, 有

$$\begin{aligned} \varphi'_+(a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|f(x)|}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{x - a} \right| = |f'_+(a)| = f'(a), \\ \varphi'_-(a) &= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|f(x)|}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^-} \left| \frac{f(x)}{x - a} \right| = |f'_-(a)| = -f'(a). \end{aligned}$$

所以, 如果 $f'(a) = 0$, 则 $\varphi'_+(a) = \varphi'_-(a) = 0$, $|f(x)|$ 在 $x=a$ 可导; 如果 $f'(a) \neq 0$, 则 $\varphi'_+(a) \neq \varphi'_-(a)$, 故 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 不可导. 应选(B).

在此我们用了—个结论: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$. 这可由夹逼定理及不等式 $||f(x)| - |A|| \leq |f(x) - A|$ 推出.

(12) 【答案】 (A).

【解析】 因为 ξ_1, ξ_2 是 $Ax=0$ 的两个线性无关的解, 故 $n - r(A) \geq 2$, 从而 $r(A) \leq 1$. 故选(A).

(13) 【答案】 (A).

【解析】 解法 1 用排除法.

由题设条件知: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$ 线性相关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性无关, 且 k 任意.

取 $k=0$, 可排除(B), (C). 取 $k=1$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2$ 线性相关, 则由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, $\beta_1 + \beta_2$ 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 又 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 所以 β_2 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 与题设矛盾. 可排除(D).

解法 2 设 $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3 + \lambda_4 (k\beta_1 + \beta_2) = 0$. 若 $\lambda_4 = 0$, 则由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关必有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关; 若 $\lambda_4 \neq 0$, 则 $k\beta_1 + \beta_2$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 从而 β_2 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 与题设矛盾. 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 亦线性无关. 故选(A).

(14) 【答案】 (B).

【解析】 对一切 $k, P\{X=k\} \geq 0$, 故 $c > 0$.

三、解答题

(15) 【解析】 这是求带抽象函数记号的复合函数的二阶混合偏导数.

先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$. 由复合函数求导法得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) + f'_2 \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = f'_1 \cdot e^x \sin y + f'_2 \cdot 2x.$$

再对 y 求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(f'_1 e^x \sin y + f'_2 2x) \\ &= (f''_{11} e^x \cos y + f''_{12} 2y) e^x \sin y + f'_1 e^x \cos y + (f''_{21} e^x \cos y + f''_{22} 2y) 2x \\ &= f''_{11} \cdot e^{2x} \sin y \cos y + 2f''_{12} \cdot e^x (y \sin y + x \cos y) + 4f''_{22} \cdot xy + f'_1 \cdot e^x \cos y. \end{aligned}$$

(16) 【解析】 设 $R(q) = aq^2 + bq + c$, 其中常数 a, b 和 c 待定. 根据条件

$$\begin{cases} R(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 0, \\ R(0) = a(0)^2 + b(2) + c = 6, \\ R(4) = a(4)^2 + b(4) + c = 8 \end{cases} \quad \text{可得} \quad \begin{cases} c = 0, \\ 4a + 2b + c = 6, \\ 16a + 4b + c = 8. \end{cases}$$

解得
$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 4, \quad c = 0,$$

所以, R 与 q 的函数关系为 $R(q) = -\frac{1}{2}q^2 + 4q$.

(17) 【解析】 解法 1 本题中的方程是一阶线性微分方程, 可直接利用通解公式求解.

$$y = e^{-\int \cos x dx} \left(\int e^{-\sin x} \ln x e^{\int \cos x dx} dx + C \right) = e^{-\sin x} \left(\int \ln x dx + C \right) = e^{-\sin x} (x \ln x - x + C).$$

解法 2 用函数 $e^{\int P(x) dx} = e^{\int \cos x dx} = e^{\sin x}$ 同乘方程两端, 得 $(ye^{\sin x})' = \ln x$. 再积分一次得

$$ye^{\sin x} = C + \int \ln x dx = C + x \ln x - x.$$

最后, 再用 $e^{-\sin x}$ 同乘上式两端即得通解

$$y = e^{-\sin x} (x \ln x - x + C).$$

(18) 【解析】 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称是指 $f(x+T) = f(T-x)$, 于是

$$\begin{aligned} \text{右边} &= 2 \int_T^b f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \int_b^{2T-b} f(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_T^b f(x) dx + \int_T^{2T-b} f(x) dx. \end{aligned}$$

可知,要证命题成立,只需证

$$\int_T^b f(x) dx + \int_T^{2T-b} f(x) dx = 0,$$

即需证

$$\int_T^{2T-b} f(x) dx = - \int_T^b f(u) du = \int_b^T f(u) du,$$

比较左右两端的积分限,可知应作代换 $x = 2T - u$.

【证明】 由于

$$\begin{aligned} \int_T^{2T-b} f(x) dx &\stackrel{\text{令 } x = 2T - u}{=} \int_T^b f(2T - u)(-du) = - \int_T^b f[T - (u - T)] du \\ &\stackrel{\substack{f(x) \text{ 关于} \\ x = T \text{ 对称}}}{=} \int_T^b f[T + (u - T)] du = - \int_T^b f(u) du = - \int_T^b f(x) dx, \end{aligned}$$

因此

$$\int_T^b f(x) dx + \int_T^{2T-b} f(x) dx = 0.$$

上面等式两边同加上 $\int_a^b f(x) dx$, 得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_T^b f(x) dx + \int_T^{2T-b} f(x) dx \\ &= \int_a^T f(x) dx + \int_T^b f(x) dx + \int_T^b f(x) dx + \int_T^{2T-b} f(x) dx \\ &= 2 \int_T^b f(x) dx + \int_a^{2T-b} f(x) dx. \end{aligned}$$

命题得证.

(19) **【解析】** 因为 $f(u)$ 连续, 所以 $\int_0^x f(t) dt$ 存在. 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D x[1 + yf(x^2 + y^2)] dx dy &= \iint_D x dx dy + \iint_D xyf(x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 x dx \int_{x^3}^1 dy \int_{-1}^1 x dx \int_{x^3}^1 yf(x^2 + y^2) dy \\ &= \int_{-1}^1 x(1 - x^3) dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 x dx \int_{x^3}^1 \frac{1}{2} f(x^2 + y^2) d(x^2 + y^2) \\ &= -2 \int_0^1 x^4 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 xF(x^2 + y^2) \Big|_{x^3}^1 dx \\ &= -\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x[F(x^2 + 1) - F(x^2 + x^6)] dx \\ &= -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

注意 这里 $[F(x^2 + 1) - F(x^2 + x^6)]$ 为偶函数, 所以 $x[F(x^2 + 1) - F(x^2 + x^6)]$ 为奇函

数,积分为零.

(20) 【解析】 ① α_1 能由 α_2, α_3 线性表示. 事实上, 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关知, 必存在不全为零的常数 k_1, k_2, k_3 , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}$. 假设 $k_1 = 0$, 则有 $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}$, 而由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关知 α_2, α_3 线性无关, 从而 $k_2 = k_3 = 0$. 这与 k_1, k_2, k_3 不全为零矛盾, 故必有 $k_1 \neq 0$. 于是有 $\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \frac{k_3}{k_1}\alpha_3$, 即 α_1 能由 α_2, α_3 线性表示.

② 因为已知 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 所以 α_2, α_3 线性无关. 假设

$$\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3.$$

由①知, 可设 $\alpha_1 = l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$, 那么代入上式整理得

$$\alpha_4 = (k_1l_2 + k_2)\alpha_2 + (k_1l_3 + k_3)\alpha_3,$$

即 α_4 可以由 α_2, α_3 线性表出, 从而 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关. 这与已知矛盾, 因此, α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

(21) 【解析】 ① 设 $\beta = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$, 对增广矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$ 作初等行变换, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

解出 $x_3 = 1, x_2 = -2, x_1 = 2$, 故

$$\beta = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3.$$

② 由 $A\xi_i = \lambda_i\xi_i$ 得

$$A^n\xi_i = \lambda_i^n\xi_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

据①的结论 $\beta = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3$ 有

$$A\beta = A(2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3) = 2A\xi_1 - 2A\xi_2 + A\xi_3,$$

于是

$$\begin{aligned} A^n\beta &= 2A^n\xi_1 - 2A^n\xi_2 + A^n\xi_3 = 2\lambda_1^n\xi_1 - 2\lambda_2^n\xi_2 + \lambda_3^n\xi_3 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot 2^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 3^n \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2^{n+1} + 3^n \\ 2 - 2^{n+2} + 3^{n+1} \\ 2 - 2^{n+3} + 3^{n+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(22) 【解析】 解法 1 先求分布函数 $F_Z(z)$.

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f_X(x)f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} dy \int_{-\infty}^{z-y} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right) dy. \end{aligned}$$

因此, Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right) dy,$$

其中 $\varphi(x)$ 是标准正态分布的概率密度. 由于 $\varphi(x)$ 是偶函数, 故有

$$\varphi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right).$$

于是

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{y+\mu-z}{\sigma}\right) dy = \frac{1}{2\pi} \left[\Phi\left(\frac{\pi+\mu-z}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\pi+\mu-z}{\sigma}\right) \right].$$

解法 2 直接应用相互独立随机变量之和的概率密度的卷积公式, 求 $f_Z(z)$ 更为简单.

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y+\mu-z)^2}{2\sigma^2}} dy = \frac{1}{2\pi} \left[\Phi\left(\frac{\pi+\mu-z}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\pi+\mu-z}{\sigma}\right) \right]. \end{aligned}$$

(23) 【解析】 $F(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X+2Y \leq z\} = \iint_{x+2y \leq z} f(x,y) dx dy.$

当 $z \leq 0$ 时, $F(z) = 0$;

当 $z > 0$ 时,

$$F(z) = \int_0^z dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)} dy = \int_0^z (e^{-x} - e^{-z}) dx = 1 - e^{-z} - ze^{-z}.$$

所以 $Z=X+2Y$ 的分布函数为

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ 1 - e^{-z} - ze^{-z}, & z > 0. \end{cases}$$