101 中考 · 数学下

知识落实篇

几何部分

第五单元　直线形

第21讲　立体图形及其展开图·视图与投影

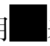
中考要求

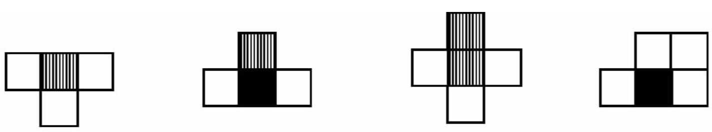
1. 会画基本几何体(直棱柱、圆柱、圆锥、球)的三视图;能根据三视图描述基本几何体.
2. 熟悉立体图形(正方体、长方体、圆柱、圆锥)的侧面展开图;能根据展开图判断立体模型.
3. 能进行几何体与其三视图、展开图之间的转化;由三视图或平面展开图还原几何体.
4. 了解中心投影和平行投影.

要点精讲

1. 了解基本几何体三视图的画法(长对正,高平齐,宽相等).
2. 由三视图或平面展开图构建组合几何体的摆放情况.
3. 熟悉常见立体图形(特别是正方体)的平面展开图.
4. 计算基本几何体的侧面积、表面积.
5. 求立体图形表面上两点间的最短距离.

典型例题

例1　如果用表示1个立方体,用表示两个立方体叠加,用表示三个立方体叠加,那么图21－1中由7个立方体叠成的几何体从正前方观察可画出的平面图形是(　　)



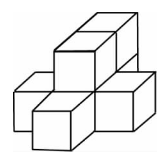
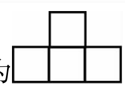
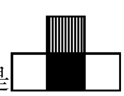


图21－1

分析:本题可直接画出从正前方观察的平面图形为,再加上已提供的1个立方体,2个立方体叠加,3个立方体叠加的表示方法,通过观察可知道平面图形应该是.

解答:选B.

点评:三个视图是分别从正面、左面、上面三个方向看同一个物体所得到的平面图形,要注意用平行光去看.画三个视图时应注意尺寸的大小,即三个视图的特征:主视图(从正面看)体现物体的长和

高,左视图体现物体的高和宽,俯视图体现物体的长和宽．画三视图时,还要注意看得见部分的轮廓线画成实线,看不见部分的轮廓线画成虚线．

例2　如图21－2,是一个正方体的展开图,每个面内部标注了字母,则正方体展开前与面E相对的是(　　)

A. 面D　　　B. 面B　　　C. 面C　　　D. 面A

分析:本题是考查正方体的平面展开图的特点,当把平面展开图折成正方体后,可以发现一个规律:相对的面之间隔着一个正方形,所以与面E相对的面应该是面D.

解答:选A.

点评:要熟悉常见几何体的展开与折叠．(1)直棱柱的展开图由两个相同的多边形和一些长方形组成,按不同的棱剪开,可能得到不同的平面展开图．特别要注意正方体,它的展开图共有11种．(2)圆柱的展开图是由两个相同的圆和一个长方形组成的．(3)圆锥的展开图是由一个扇形和一个圆形组成的．

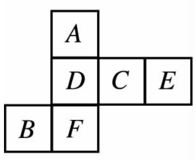


图21－2

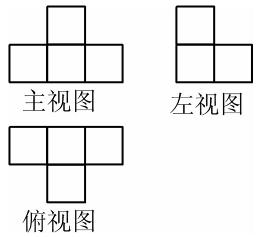


图21－3

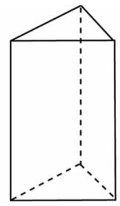


图21－4

例3　在抗震救灾某仓库里放着若干个相同的正方体货箱,某摄影记者将这堆货箱的三视图照了出来(如图21－3),则这堆正方体货箱共有(　　)

A. 4箱　　B. 5箱　　C. 6箱　　D. 7箱

分析:由主视图可知这个几何体有两层三列,由左视图可知这个几何体有两层两排,在俯视图中标出每个位置上小正方体的个数为

1	2	1
	1	

.

解答:选B.

点评:由三视图确定实物的形状和结构,求解时先根据左视图和主视图,在俯视图中标出每个位置上小立方体的个数,从而得到组成这个几何体的小正方体的个数．

例4　如图21－4所示,三棱柱底面边长都是3cm,侧棱长为5cm,则此三棱柱共有________个面,侧面展开图的面积为________ cm^2.

分析:三棱柱的展开图由两个底面和三个侧面组成,共5个面．此三棱柱的两个底面是全等的正三角形,三个侧面均为长为5cm、宽为3cm的长方形,故侧面展开图的面积为$3\times(5\times3)cm^2$．也可根据此三棱柱的侧面展开图是长为3×3cm、宽为5cm的长方形,求其侧面积．

解答:5,45.

点评:本题考查基本几何体的展开图,由展开图可以得到表面积(底面积、侧面积)的大小．

例5　如图21－5－1,一只圆桶的下方有一只壁虎,上方有一只蚊子,壁虎要想尽快吃到蚊子,应该走哪条路径?

分析:此问题可看成在圆柱表面上两点之间的最短路径问题．我们知道,在平面上,两点之间线段最短．圆柱的侧面是一个曲面,将圆柱侧面展开,即可将曲面上两点之间的路径问题转化为平面上两点之间的路径问题,进而找出答案．

解答:将圆柱侧面展开后是矩形(如图 21－5－2),壁虎只要沿图中线段爬向蚊子即可.

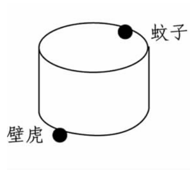


图 21－5－1

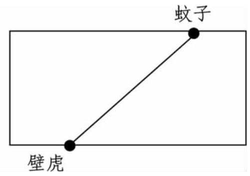
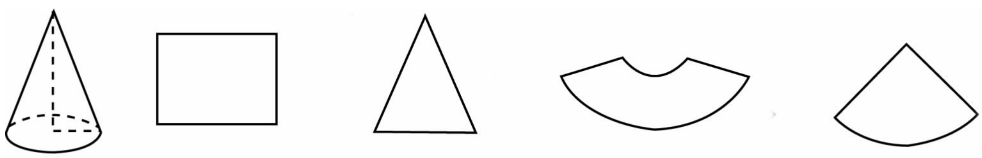


图 21－5－2

点评:解决平面上两定点之间的最短距离问题的依据是“两点之间线段最短”,对于曲面上两定点之间的最短距离问题,常常通过其展开图转化为平面上的两定点之间的最短距离来解决.

直击中考

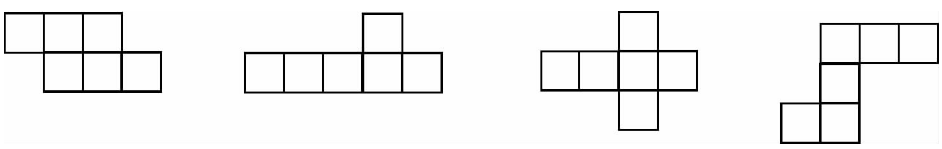
1. 如图 21－6,圆锥侧面展开图可能是下列图中的(　　)



A　　B　　C　　D

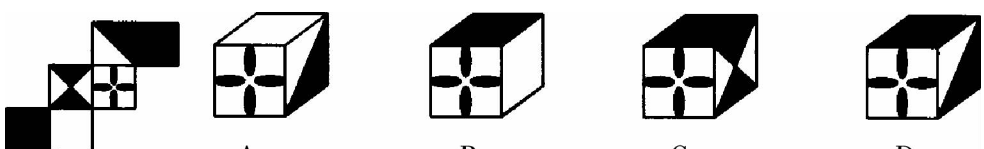
图 21－6

2. 下面各个图形是由 6 个大小相同的正方形组成的,其中能沿正方形的边折叠成一个正方体的是(　　)



A　　B　　C　　D

3. 如图 21－7,是一个正方体的平面展开图,若把它折成正方体,会是选项中的(　　)



A　　B　　C　　D

图 21－7

4. 如果一个棱柱是由 10 个面围成的,那么这个棱柱是(　　)

A. 十棱柱　　B. 九棱柱　　C. 八棱柱　　D. 七棱柱

5. (2011·北京)如图 21－8 所示是某几何体的表面展开图,则这个几何体是__________.

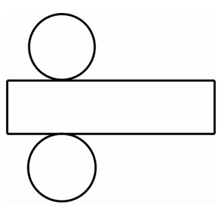


图 21－8

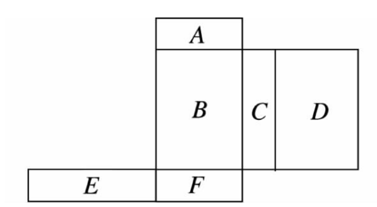


图 21－9

6. 如图 21－9 所示是一长方体的平面展开图,每个面都标注了字母,现把它折成长方体后,如果 F 在前面,从左面看是 B,那么从上面看到的字母是__________.

7. 如图21－10，已知O为圆锥的顶点，M为圆锥底面上一点，点P在OM上．一只蜗牛从P点出发，绕圆锥侧面爬行，回到P点时所爬过的最短路线的痕迹如图所示．若沿OM将圆锥侧面剪开并展开，所得侧面展开图是(　　)

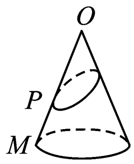
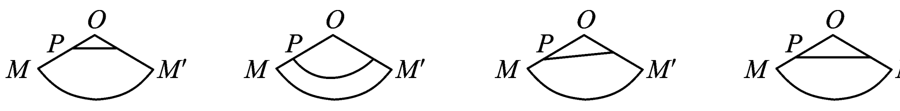


图21－10

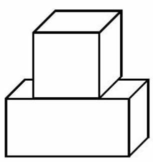


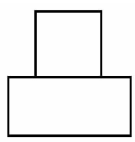
A　　B　　C　　D

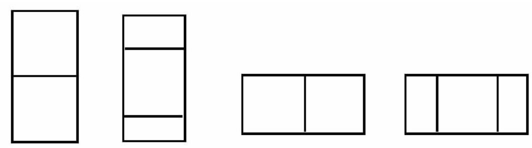
8. (2013·烟台)下列水平放置的几何体中，俯视图不是圆的是(　　)

A　　B　　C　　D

9. 如图21－11－1放置的一个机器零件，若其主视图如图21－12－2，则其俯视图是(　　)



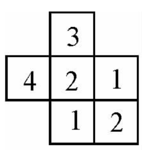




A　　B　　C　　D

图21－11－1　　图21－11－2

10. 图21－12表示一个由相同小立方块搭成的几何体的俯视图，小正方形中的数字表示该位置上小立方块的个数，那么该几何体的主视图为(　　)



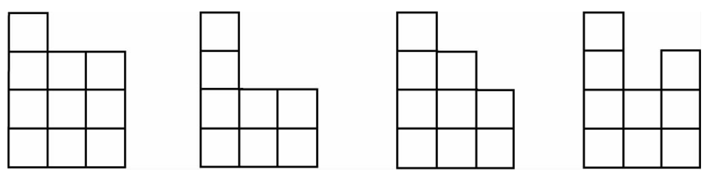


图21－12　　A　　B　　C　　D

11. 图21－13表示由几个相同的小正方体搭成的几何体的三视图，则搭成这个几何体的小正方体的个数是(　　)

A. 4　　B. 6　　C. 5　　D. 8

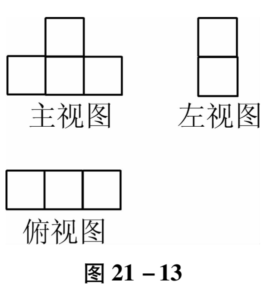


图21－13

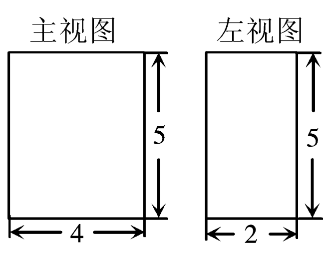


图21－14

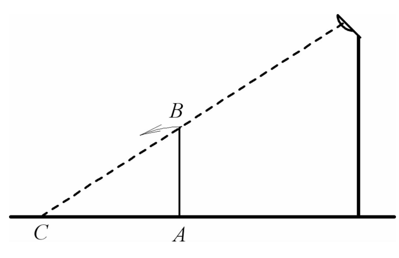


图21－15

12. 一个长方体的主视图和左视图如图21－14所示，则其表面积是＿＿＿＿＿＿．

13. 如图21－15，一根直立于水平地面上的木杆AB在灯光下形成影子．当木杆绕A按逆时针方向旋转直至到达地面时，影子的长度发生变化．设AB垂直于地面时的影长为AC(假定$AC>AB$)，影长的最大值为m，最小值为n，那么下列结论：①$m>AC$；②$m=AC$；③$n=AB$；④影子的长度先增大后减

小．其中，正确的结论的序号是＿＿＿＿＿＿＿．

14. 图 21－16 是某几何体的三视图及相关数据，则该几何体的侧面积是(　　)

A. $\frac{1}{2}ab\pi$　　B. $\frac{1}{2}ac\pi$

C. $ab\pi$　　D. $ac\pi$

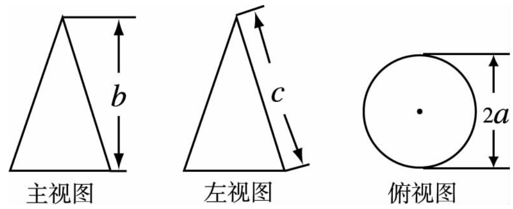


图 21－16

15. 有一个正方体，六个面上分别写有数字 1、2、3、4、5、6，有三个人从不同的角度观察的结果如图 21－17 所示．如果记 5 的对面的数字为 a，1 的对面的数字为 b，那么 $a+b$ 的值为＿＿＿＿＿．

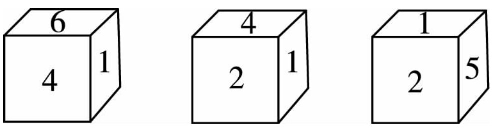


图 21－17

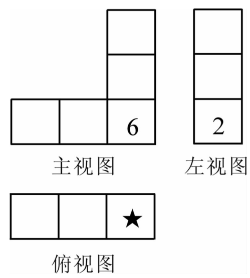


图 21－18

16. 一个不透明的小正方体的 6 个面上分别写有数字 1、2、3、4、5、6，任意两个相对面上所写的两个数字之和为 7. 将这样的几个小正方体按照相接触的两个面上的数字之和为 8 摆放成一个几何体，这个几何体的三视图如图 21－18 所示，已知图中所标注的是部分面上所见的数字，则★所代表的数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

17. 如图 21－19，小华、小军、小丽同时站在路灯下，其中小军和小丽的影子分别是 AB、CD.

(1)请你在图中画出路灯灯泡所在的位置(用点 P 表示)；

(2)画出小华此时在路灯下的影子(用线段 EF 表示).

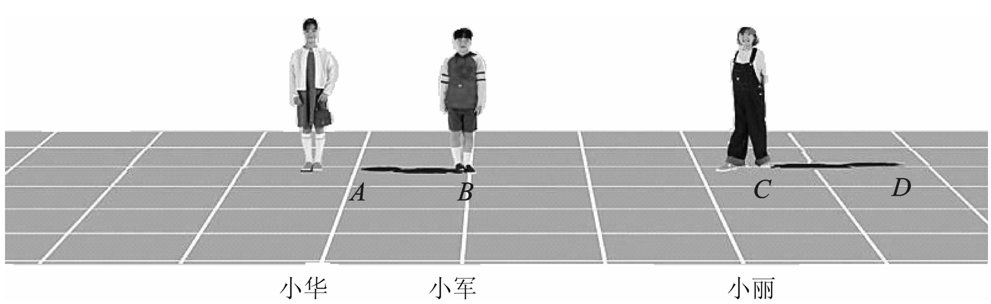


图 21－19

第22讲　平面图形的认识·相交线与平行线

中考要求

1. 掌握线段、角的概念及和差运算;会运用线段中点的知识解决简单问题.

2. 区分互相垂直、互余、互补、互为邻补角、互为对顶角的概念和性质.

3. 识别“三线八角”,掌握平行线的识别、特征及应用.

4. 掌握“两点确定一条直线”,“两点之间线段最短”,“垂线段最短”等结论,并能灵活运用这些结论解释实际生活中的问题.

5. 会运用线段垂直平分线、角平分线的性质,结合图形认识线段间、角与角之间的数量关系.

要点精讲

1. 直线、射线、线段

(1)直线公理:经过两点有且只有一条直线;

(2)线段公理:两点之间线段最短;

(3)两点间的距离;

(4)线段的中点、线段的和差运算.

2. 角

(1)角的定义、分类、和差运算($1°=60'$,$1'=60''$);

(2)角平分线的定义、性质、判定;

(3)互余角、互补角的定义及性质;

(4)邻补角、对顶角的定义及性质.

3. 平行

(1)“三线八角”的概念;

(2)平行线的定义、平行公理及其推论;

(3)平行线的性质、判定;

(4)两条平行线之间的距离.

4. 垂直

(1)垂直的定义、性质;

(2)在直线外各点与直线上各点的连线中,垂线段最短;

(3)点到直线的距离.

典型例题

例1　如图22-1-1,已知点C、D在线段AB上,线段$AC=10\text{cm}$,$BC=4\text{cm}$,取线段AC、BC的中点D、E.

(1)请你计算线段DE的长是多少?

(2)观察DE的大小与线段AB的关系,请用一句简洁的话将这种关系表述出来.

(3)若点 C 为直线 AB 上的一点,其他条件不变,线段 DE 的长会改变吗?如果改变,请你求出新的结果.

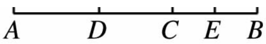


图 22-1-1

分析:结合图形由线段的和差可求得线段 DE 的长.在求解过程中通过观察、猜测,可发现一般性的规律.在第(3)问中注意点 C 的位置不确定,它可以在点 B 的左侧,也可以在点 B 的右侧,故需分类讨论.

解答:(1)$\because AC=10, BC=4, \therefore AB=AC+BC=14$.

又$\because$ 点 D 是 AC 中点,点 E 是 BC 中点,$\therefore DC=\frac{1}{2}AC, EC=\frac{1}{2}BC$.

$\therefore DE=DC+CE=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AC+BC)=\frac{1}{2}AB=7(\text{cm})$.

(2)由(1)知 $DE=\frac{1}{2}AB$,即线段上任一点把线段分成两部分,这两部分中点间的距离等于原线段长度的一半.

(3)DE 的长会改变.可分两种情形考虑:

当点 C 在线段 AB 上时,$DE=\frac{1}{2}AB=7(\text{cm})$.

当点 C 在线段 AB 外时(如图 22-1-2),$DE=DC-CE=\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AC-BC)=\frac{1}{2}(10-4)=3(\text{cm})$.

图 22-1-2

$\therefore DE$ 的长为 7cm 或 3cm.

点评:(1)利用中点的性质进行线段长度的计算是解题的关键.若 C 是 AB 的中点,则它的表达式为 $AB=2AC$ 或 $AB=2BC$,$AC=\frac{1}{2}AB$ 或 $BC=\frac{1}{2}AB$,$AC=BC$,不同情况下选择不同的表达式,可使书写简洁.

(2)本题中 C 点的位置可以改变,可以在线段 AB 上任意运动.在 C 点的位置的变化过程中,有一个关系是始终不变的,即 $DE=DC+CE$,利用这个不变的关系可以得到一般的规律.

(3)随着条件的逐步开放,C 点的位置由在线段 AB 上变为在直线 AB 上时,它与点 B 的相对位置不再是唯一的,DE、DC、CE 三者的关系也不再唯一,从而结论发生变化.解答时一定要先画图,并全面考虑所有可能情形.

例2　已知直线 AB 与 CD 相交于 O,OE 平分 $\angle AOC$,射线 $OF \perp CD$ 于 O,且 $\angle BOF=36°$,求 $\angle COE$ 的度数.

分析:本题没有给图形,应先根据题意画出示意图,再结合图形由角的和、差、倍、半及互余等关系求解.画图时要注意当直线 AB 的位置确定之后,直线 CD 上点 C、D 的位置可以交换,对应的图形有两种(如图 22-2-1、图 22-2-2),故有两种答案.

解答:根据题意可画出两个示意图,

当示意图如图 22-2-1 时,$\because OF \perp CO, \therefore \angle COF=90°$.

而 $\angle BOF=36°$,$\therefore \angle AOC=180°-(\angle COF+\angle BOF)=180°-(90°+36°)=54°$.

又$\because$ OE 平分$\angle AOC$,$\therefore$ $\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC=27°$.

当示意图如图 22－2－2 时,同理可得$\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC=63°$.

综上,$\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC=27°$或$63°$.

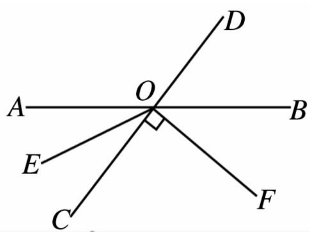


图 22－2－1

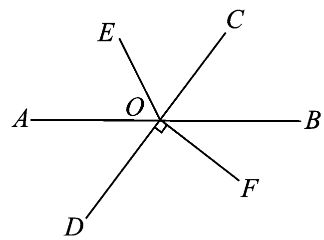


图 22－2－2

点评:与角有关的计算要注意结合图形,利用角的和、差、倍、分、互余、互补、对顶角等关系求解.如果题中没有给出图形,应先结合题意画出示意图,同时注意全面考虑所有可能情形,以免丢解.

例 3　(2010·山东荷泽)如图 22－3,直线 $PQ∥MN$,C 是 MN 上一点,CE 交 PQ 于 A,CF 交 PQ 于 B,且$\angle ECF=90°$,如果$\angle FBQ=50°$,则$\angle ECM$ 的度数为(　　)

A. 60°　　　　B. 50°　　　　C. 40°　　　　D. 30°

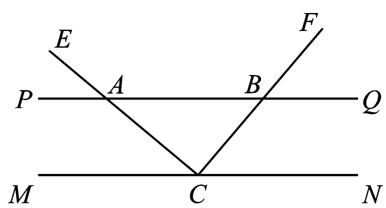


图 22－3

分析:由于直线 $PQ∥MN$,根据“两直线平行,同位角相等”可得$\angle FBQ=\angle FCN$,又$\angle ECF=90°$,根据平角的定义知$\angle ECM+\angle ECF+\angle FCN=180°$,解得$\angle ECM=40°$.

解答:选 C.

点评:平行线的性质和判定定理,是解决与平行线有关的问题的重要依据. 利用平行线的性质,可以得出两个顶点不相同的角的关系(相等或互补),知道其中一个角的大小,可求得另一个角的大小;反过来,知道了两个顶点不相同的角的关系(相等或互补),结合图形也可判定两条直线的平行关系.

例 4　(1)如图 22－4－1,小刚准备在 C 处牵牛到河边 AB 饮水,请用三角板作出小刚行走的最短路线(不考虑其他因素);

(2)如图 22－4－2,若小刚在 C 处牵牛到河边 AB 处饮水,并且必须到河边 D 处观察河水的水质情况,请作出小刚行走的最短路线.

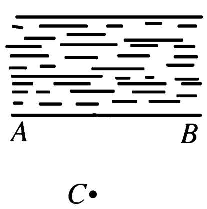


图 22－4－1

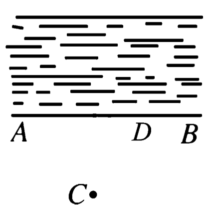


图 22－4－2

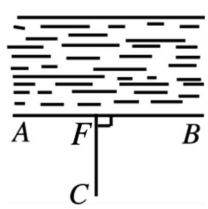


图 22－4－3

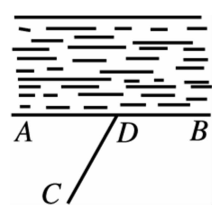


图 22－4－4

分析：对于第(1)题，根据“垂线段最短”的性质可知，只要过点 C 向河边所在的直线作垂线段即可；第(2)题，由于 C、D 都是已知的定点，根据“两点之间，线段最短”，只需连接 CD 即可．

解答：(1)如图 22－4－3，过点 C 作 $CF \perp AB$ 于 F，垂线段 CF 即为小刚行走的最短路线；

(2)如图 22－4－4，连接 C、D，线段 CD 即为小刚行走的最短路线．

点评：本题考查“两点之间，线段最短”和“垂线段最短”的性质的实际应用．利用这两个性质，可以解类似有关路程、线路最短的问题．

直击中考

1. 下列语句中正确的个数有(　　)

①直线 MN 和直线 NM 是同一条直线　②射线 AB 和射线 BA 是同一条射线　③线段 PQ 和线段 QP 是同一条线段　④直线上一点把这条直线分成的两部分都是射线

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

2. 在图 22－5 中，不同的线段的条数是(　　)

A. 4　　B. 5　　C. 10　　D. 12

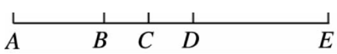


图 22－5

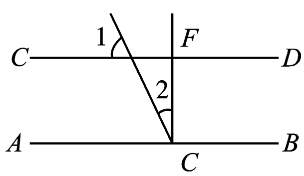


图 22－6

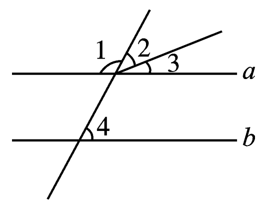


图 22－7

3. 如图 22－6，$AB \parallel CD$，$EF \perp AB$ 于点 E，EF 交 CD 于 F，已知 $\angle 2 = 30°$，则 $\angle 1$ 是(　　)

A. 20°　　B. 60°　　C. 30°　　D. 45°

4. (2010 · 天门)对于图 22－7 中标记的各角，下列条件能够推理得到 $a \parallel b$ 的是(　　)

A. $\angle 1 = \angle 2$　　B. $\angle 2 = \angle 4$

C. $\angle 3 = \angle 4$　　D. $\angle 1 + \angle 4 = 180°$

5. 下列角的平分线中，互相垂直的是(　　)

A. 平行线的同旁内角的平分线　　B. 平行线的同位角的平分线

C. 平行线的内错角的平分线　　D. 对顶角的平分线

6. 同一平面上四条直线两两相交最多有________个交点，最少________个交点．

7. 线段 $AB = 8\text{cm}$，M 是 AB 的中点，N 是 MB 的中点，则 $AN =$ ________ cm.

8. (2010 · 浙江杭州)如图 22－8，已知 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 62°$，则 $\angle 4 =$ ________．

9. 如图 22－9，已知，$a \parallel b \parallel c$，$\angle 3 = 120°$，$\angle 1 = 60°$，则 $\angle 2$ 的度数为________．

10. 如图 22－10，直线 l_1、l_2 被直线 l_3 所截，$l_1 \parallel l_2$，$\angle 1 = \angle 2 = 35°$，$\angle P = 90°$，则 $\angle 3 =$ ________．

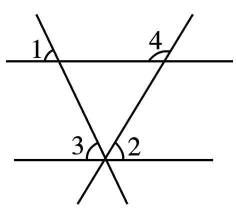


图 22－8

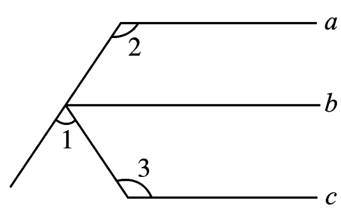


图 22－9

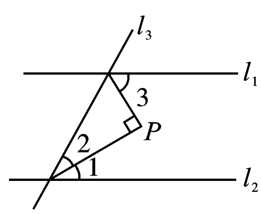


图 22－10

11. 已知$\angle\alpha$的两边分别与$\angle\beta$的两边互相平行，当$\angle\alpha=40^\circ$时，$\angle\beta=$________.

12. 如图22－11所示，直线a、b被c、d所截，且$c\perp a$，$c\perp b$，$\angle1=70^\circ$，则$\angle2=$________.

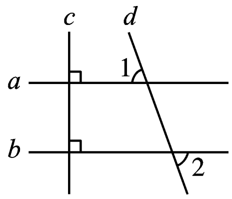


图22－11

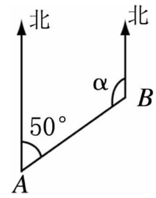


图22－12

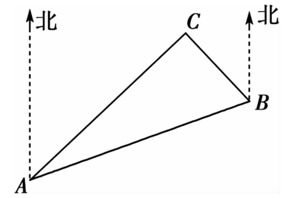


图22－13

13. 如图22－12，在AB两地间修一条公路，从A地测得公路的走向为北偏东50°，如果A、B两地同时开工，那么在B地按$\angle\alpha=$________方向施工，才能使公路准确接通.

14.（2010·山东日照）如图22－13，C岛在A岛的北偏东50°方向，C岛在B岛的北偏西40°方向，则从C岛看A，B两岛的视角$\angle ACB$等于________.

15. 如图22－14，已知$AB:BC:CD=4:5:7$，且点E是AB的中点，点F是CD的中点，线段EF长为105，求线段BC的长.

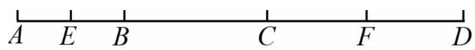


图22－14

16. 如图22－15，已知$AB\parallel CD$，求$\angle1+\angle2+\angle3+\angle4$的度数.

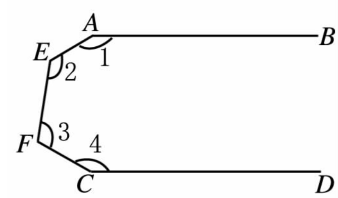


图22－15

17.（2010·云南玉溪）平面内的两条直线有相交和平行两种位置关系.

（1）如图 22－16－1，若 $AB // CD$，点 P 在 AB、CD 外部，则有 $\angle B = \angle BOD$，又因 $\angle BOD$ 是 $\triangle POD$ 的外角，故 $\angle BOD = \angle BPD + \angle D$，得 $\angle BPD = \angle B - \angle D$. 将点 P 移到 AB、CD 内部，如图 22－16－2，以上结论是否成立？若成立，说明理由；若不成立，则 $\angle BPD$、$\angle B$、$\angle D$ 之间有何数量关系？请证明你的结论.

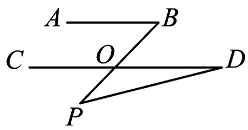


图 22－16－1

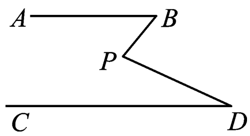


图 22－16－2

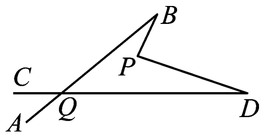


图 22－16－3

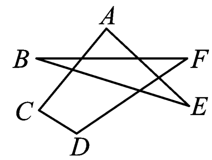


图 22－16－4

（2）在图 22－16－2 中，将直线 AB 绕点 B 逆时针方向旋转一定角度交直线 CD 于点 Q，如图 22－16－3，则 $\angle BPD$、$\angle B$、$\angle D$、$\angle BQD$ 之间有何数量关系？（不需证明）；

（3）根据（2）的结论，求图 22－16－4 中 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ 的度数.

第23讲　三角形的有关概念·等腰三角形

中考要求

1. 了解三角形的有关概念,会正确对三角形进行分类.

2. 理解三角形的角平分线、中线、高的概念,会合理使用三角形的内心、外心的知识解决问题,会利用三角形的稳定性解释实际问题.

3. 理解三角形的内角和定理及推论,理解三角形的三边关系及其应用.

4. 理解三角形的中位线的概念、性质和应用.

5. 掌握等腰三角形、等边三角形的性质和判定,能灵活运用等腰、等边三角形的知识解决有关问题.

要点精讲

1. 三角形的概念、分类、三边关系、稳定性.

2. 三角形中的重要线段(角平分线、中线、高、中位线),内心、外心的概念.

3. 三角形的内角和定理及外角性质.

4. 等腰三角形的概念、性质及判定.

5. 等边三角形的概念、性质及判定.

6. 等腰三角形中的分类讨论:边有腰和底之分,角有底角和顶角之分,高有在形内和在形外之分.

7. 线段的垂直平分线的定义、判定和性质.

典型例题

例1　三角形中的一个角是另一个角的$\frac{3}{2}$倍,第三个角比这两个角的和大$30°$,求这个三角形的三个角的度数.

分析:本题有三个未知角,直接给了两个已知条件,再加上"三角形内角和等于$180°$"这一隐含条件,可通过列方程或方程组求解.

解答:设第二个角的度数是$x°$,则第一个角的度数是$(\frac{3}{2}x)°$,第三个角的度数是$(x+\frac{3}{2}x+30)°$,

根据三角形三个内角和是$180°$,得$x+\frac{3}{2}x+(x+\frac{3}{2}x+30)=180$,

解这个方程,得$x=30$.

$\therefore \frac{3}{2}x=45, x+\frac{3}{2}x+30=105$.

答:这个三角形三个角的度数分别是$45°$、$30°$、$105°$.

点评:在求与三角形内角有关的问题时,注意应用"三角形内角和等于$180°$"这一隐含条件.

例2　下列长度的三条线段能组成三角形的是(　　)

A. $a=6\text{cm}, b=8\text{cm}, c=15\text{cm}$　　B. $a=7\text{cm}, b=6\text{cm}, c=13\text{cm}$

C. $a=4\text{cm}, b=5\text{cm}, c=6\text{cm}$　　D. $a=12\text{cm}, b=14\text{cm}, c=18\text{cm}$

分析:判断三条线段能否组成三角形的依据是"三角形任意两边之和大于第三边,任意两边之差

小于第三边”，解题时可利用较小的两边之和大于第三边来判断 .

解答：选 C.

点评：运用“三角形任意两边之和大于第三边”可以判断三条线段能否组成三角形 . 判断时可以检查是否是任意两边之和大于第三边，也可以只检查较小的两边的和是否大于第三边 . 在应用三角形三边之间的关系时，还要注意“……大于……”、“……小于……”，如上题中的选项 B，三边满足 $a+b=c$，构不成三角形 .

例 3　如图 23 – 1，P、Q 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的两点，且 $BP=PQ=QC=AP=AQ$，求 $\angle BAC$ 的度数 .

分析：由已知 $PQ=QA=AP$ 可得 $\triangle APQ$ 为等边三角形，进而得出它的各个内角的度数；再由等腰三角形的性质及三角形外角的性质可求得底角的度数，最后利用角的和差或三角形内角和求得 $\angle BAC$ 的度数 .

解答：$\because PQ=AP=AQ$，$\therefore \triangle APQ$ 为等边三角形 . $\therefore \angle APQ=\angle PQA=\angle QAP=60°$.

$\because PA=PB$，$\therefore \angle B=\angle PAB$. 又 $\because \angle B+\angle PAB=60°$，$\therefore \angle PAB=\angle B=30°$.

同理 $\angle QAC=30°$. $\therefore \angle BAC=\angle BAP+\angle PAQ+\angle QAC=30°+60°+30°=120°$.

点评：本题已知条件中只有边的关系，没有任何一个角的度数 . 我们可以根据已知中边的关系得出特殊的三角形(如等边三角形、含 30°角的直角三角形)，再利用这个特殊三角形的性质得到角的度数 . 上面解法中用到了等边三角形的判定、性质，等腰三角形的性质，三角形的外角性质，最后结合图形利用角的和差得出 $\angle BAC$ 的度数 .

本题还可以利用 $AP=\frac{1}{2}BQ$，得出 $\triangle ABQ$ 为直角三角形；再根据 $AQ=\frac{1}{2}BQ$，得 $\angle B=30°$. 同理得 $\angle C=30°$，最后利用三角形内角和定理得 $\angle BAC=180°-\angle B-\angle C=120°$.

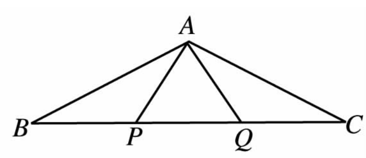


图 23 – 1

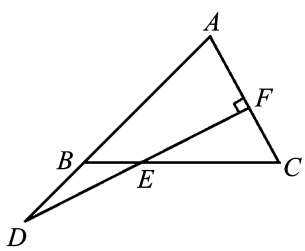


图 23 – 2

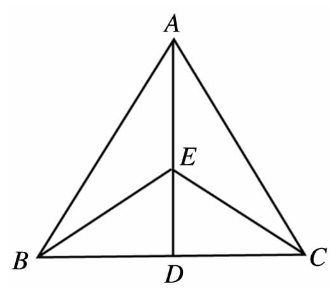


图 23 – 3

例 4　如图 23 – 2，D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 延长线上一点，过点 D 作 $DF\perp AC$，垂足为 F，交 BC 于 E，且 $BD=BE$. 试说明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形 .

分析：要说明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，只需证明 $\triangle ABC$ 中有两个相等的角 . 而由已知中 $BD=BE$ 可得到两个相等的角 $\angle BED$、$\angle D$. 根据 $\angle BED=\angle D$ 及 $DF\perp AC$，利用余角的性质可得出 $\angle C=\angle A$.

解答：$\because BD=BE$，$\therefore \angle BED=\angle D$.

$\because DF\perp AC$，$\therefore \angle AFD=\angle CFE=90°$.

在 $\triangle CEF$ 中，$\angle C=90°-\angle CEF=90°-\angle BED$，

在 $\triangle AFD$ 中，$\angle A=90°-\angle D$，

$\therefore \angle C=\angle A$，$\therefore AB=CB$，$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形 .

点评：要证明三角形是等腰三角形，有以下两种方法：①证明这个三角形的两边相等；②证明这个三角形有两个角相等，再根据“等角对等边”证明 .

例 5　已知：如图 23 – 3，$AB=AC$，D 是 BC 中点，E 是 AD 上任意一点，连接 EB、EC，

求证:$EB=EC$.

分析:由 $AB=AC$ 可知点 A 在线段 BC 的垂直平分线上,加上 D 是 BC 中点这一条件,可得 AD 是线段 BC 的垂直平分线. 再根据垂直平分线的性质即可得 $EB=EC$.

也可利用等腰三角形“三线合一”的性质及全等三角形进行证明.

证明:(方法一)$\because AB=AC$,D 是 BC 中点,$\therefore AD$ 是线段 BC 的垂直平分线.

$\because E$ 是 AD 上任意一点,$\therefore EB=EC$.

(方法二)由 $AB=AC$,D 是 BC 中点,得 $AD\perp BC$(等腰三角形三线合一),进而可得 $\triangle BED\cong\triangle CED$(SAS),从而 $EB=EC$.

(方法三)由 $AB=AC$,D 是 BC 中点,得 $\angle BAE=\angle CAE$(等腰三角形三线合一),进而可得 $\triangle BAE\cong\triangle CAE$(SAS),从而 $EB=EC$.

点评:本题证明方法较多,要注意等腰三角形性质的使用、线段垂直平分线的判定和性质的使用.

直击中考

1.(2010·四川凉山)将一副三角板按图 23-4 中的方式叠放,则 $\angle\alpha$ 等于( )

A. 75°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 30°

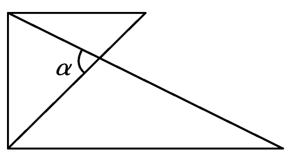


图 23-4

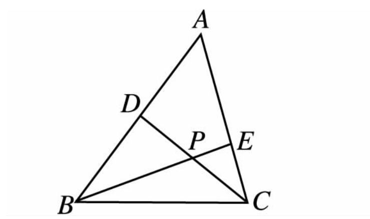


图 23-5

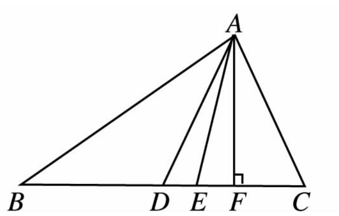


图 23-6

2. 两根木棒的长分别是 7cm 和 5cm,要选择第三根木棒,将它们钉成一个三角形相框,则第三根木棒的长可以是( )

A. 11cm　　B. 12cm　　C. 13cm　　D. 14cm

3. 如图 23-5,在锐角三角形 ABC 中,CD、BE 分别是 AB、AC 边上的高,且 CD、BE 相交于点 P,若 $\angle A=50°$,则 $\angle BPC$ 的度数是( )

A. 150°　　B. 130°　　C. 100°　　D. 120°

4. $\triangle ABC$ 中,$\angle A=80°$,$\angle B$ 的平分线与 $\angle C$ 的平分线的交点为 O,则 $\angle BOC$ 的度数为( )

A. 100°　　B. 130°　　C. 80°　　D. 50°

5. 如图 23-6,在 $\triangle ABC$ 中,AD、AE、AF 分别是 BC 边的中线、$\angle BAC$ 的角平分线、BC 边上的高,且 $BC=8$cm,$\angle B=35°$,$\angle C=65°$,则 $\angle CAF=$________,$\angle BAE=$________,$BD=$________ cm.

6. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C$ 比 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的和小 20°,$\angle B$ 的 2 倍比 $\angle A$ 小 10°,$\angle B$ 的度数 =________.

7. 等腰三角形 ABC 的外角 $\angle BCD=140°$,则 $\angle A=$( )

A. 40°　　B. 40°或 70°　　C. 70°　　D. 40°或 70°或 100°

8. 小芳画一个有两边长分别为 5 和 6 的等腰三角形,则它的周长是( )

A. 16　　B. 17　　C. 11　　D. 16 或 17

9.(2010·广州)如图 23-7,BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,$\angle ABD=36°$,$\angle C=72°$,则图中的等腰三角形有________个.

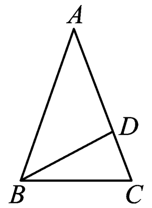


图 23-7

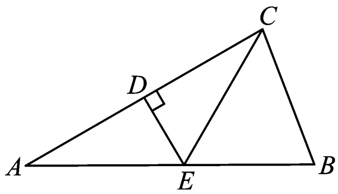


图 23-8

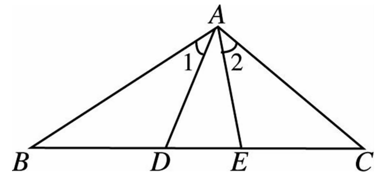


图 23-9

10.（2010·无锡）如图 23-8，△*ABC* 中，*DE* 垂直平分 *AC* 交 *AB* 于 *E*，∠*A* = 30°，∠*ACB* = 80°，则∠*BCE* = ________°.

11. 如图 23-9，在△*ABC* 中，点 *D*、*E* 在 *BC* 上，且∠1 = ∠*B*，∠2 = ∠*C*，*BC* = 10cm，则△*ADE* 的周长 = ________ cm.

12. 等腰三角形的底边长为 10cm，一腰上的中线将这个三角形分成两部分，这两部分的周长之差为 2cm，则这个等腰三角形的腰长为____________ cm.

13. 如图 23-10 所示的正方形网格中，网格线的交点称为格点．已知 *A*、*B* 是两格点，如果 *C* 也是图中的格点，且使得△*ABC* 为等腰三角形，则点 *C* 的个数是（　　）

A. 6　　　　B. 7　　　　C. 8　　　　D. 9

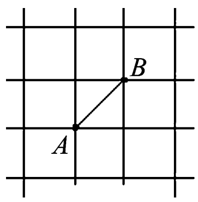


图 23-10

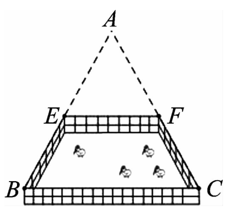


图 23-11

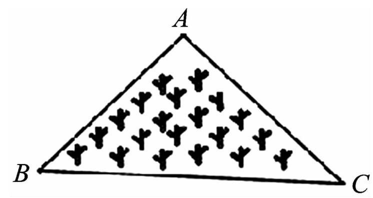


图 23-12

14.（2010·广东茂名）如图 23-11 所示，吴伯伯家有一块等边三角形的空地 *ABC*，已知点 *E*、*F* 分别是边 *AB*、*AC* 的中点，量得 *EF* = 5 米，他想把四边形 *BCFE* 用篱笆围成一圈放养小鸡，则需用篱笆的长是（　　）

A. 15 米　　　　B. 20 米　　　　C. 25 米　　　　D. 30 米

15.（2010·四川巴中）如图 23-12 所示是一块三角形的草坪，现要在草坪上建一凉亭供大家休息，要使凉亭到草坪三条边的距离相等，凉亭的位置应选在（　　）

A. △*ABC* 三条中线的交点　　　　B. △*ABC* 三边的垂直平分线的交点

C. △*ABC* 三条角平分线的交点　　D. △*ABC* 三条高所在直线的交点

16. 如图 23-13，*BE* 平分∠*ABD*，*CF* 平分∠*ACD*，*BE*、*CF* 相交于 *G*，若∠*BDC* = 150°，∠*BGC* = 95°，求∠*A* 的度数．

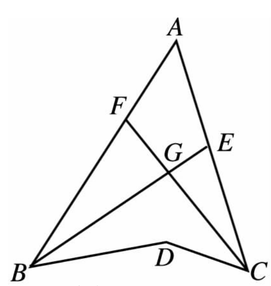


图 23-13

17. 在图 23－14 中，作出△ABC 中 CB 边上的高，AB 边上的中线，AC 边上的角平分线．

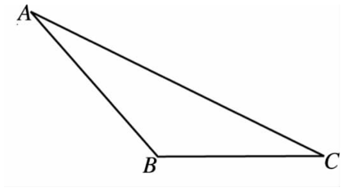


图 23－14

18. 已知：如图 23－15，△ABC 中，$AB=AC$，$\angle CAD$ 是外角，AE 是 $\angle CAD$ 的平分线，

求证：$AE \parallel BC$.

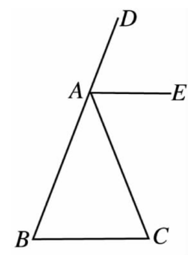


图 23－15

19.（2010·湖南衡阳）已知：如图 23－16，在等边三角形 ABC 的 AC 边上取中点 D，BC 的延长线上取一点 E，使 $CE=CD$.

求证：$BD=DE$.

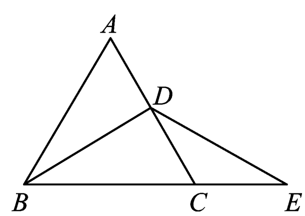


图 23－16