

目 录

大地测量的展望·····	57659 部队	卢福康	(1)
我国天文大地网第一次平差的理论和实践·····	57653 部队	王贞玺	(12)
观测权的估值·····	武汉测量与地球物理研究所	周江文	(31)
测量平差法原理和滤波·····	武汉测绘学院	崔希璋	刘大杰 (34)
用摄影方法测量大地点·····	57659 部队	卢福康	(43)
新的天文手段在大地测量与地球动力学上的应用·····	上海天文台	叶淑华	(52)
卫星多普勒定位法在西沙群岛大地联测中的应用·····	西沙群岛卫星联测试验组		(55)
多普勒卫星定位精度分析及利用多普勒弦长与大地弦长比较			
看我国天文大地网的扭曲·····	国家测绘总局测绘研究所	黄启祥	(60)
将轨道元素作为待平差量的多普勒解算的数学模型·····			
·····	国家测绘总局测绘研究所	胡建国	(88)
测量的误差分布及其应用·····	中国计量科学研究院	刘智敏	(100)
相关平差与条件分组相关平差理论及其应用·····	中国计量科学研究院	肖明耀	(120)
测边销试验报告·····	57659 部队	杨 诚	(136)
一、二等三角测量中的测角系统误差·····	上海天文台	朱圣源	(177)
旧二等三角网精度的初步分析·····	陕西省第四测绘大队	李国智等	(182)
微波测距边系统误差的探讨·····	解放军测绘学院	张守信	(192)
高精度授时新进展·····	中国科学院陕西天文台	吴守贤	漆贯荣 (208)
多星等向法同时测定经度、纬度和方位角·····	海军司令部航海保证部	郁祚瀛	(229)
关于推求天文大地垂线偏差的方法和精度估算问题·····	解放军测绘学院	张守信	(241)
按地形均衡法和重力法电算天文大地垂线偏差和高程异常差的探讨			
·····	57653 部队	许礼辉	唐桂生 (247)
测量计算程序语言的初步设想·····	南京市勘测设计院	曹 恒	(254)
CZJ-1 型测绘专用台式电子计算机的程序设计方法·····	武汉测绘学院	罗沛青	(260)
三角网和三角高程网平差程序 (适用于 TQ-16 机) ·····			
·····	福建省地质测绘队	江祖辉	杨泽金 (267)
三角网与导线网的平差计算程序 (DJS-6 机) ·····	内蒙古地质测绘队	洪 伟	(303)
附: 《出版说明》中所指的部分论文题目及其所刊载的书刊 ·····			(332)

大地测量的展望

57659 部队 卢福康

人类生息在大地上，由于生产斗争的需要，很自然地产生对天和地有所认识的要求。最初可能由于直观的观察，我国古代有过天圆地方的“盖天说”。希腊诗人荷马（Homer 约公元前九世纪）描述地象圆盘，四周环绕着海洋。毕达哥拉斯（Pythagoras 约生于公元前 582 年）首先提出地是球形的见解。在东汉以前（公元 25 年前）还有一种“宣夜说”，《尚书纬考灵曜》中关于宣夜说有如下一段话：“地体虽静，而终日旋转，如人坐舟中而不自觉。春星西游，夏星北游，秋星东游，冬星南游，一年之中，地有四游。……日月星象，自然浮生虚空之中，其行其止，皆须其气焉。是以七曜或游或住，或顺或逆，伏见无常，进退不同，由于无所根系，故各异也。故辰极常居其所，而北斗不与众星西没也。摄提填星（木星、土星）皆东行，日行一度，月行十三度，迟疾任情，其无所系着可知矣”。如“宣夜说”的年代可靠，可以看出那时对太阳、月亮、行星和恒星的视运动已观测得很细致，并且掌握了一些规律。认为日月星浮生在空气中，地是转动的。在欧洲到公元 1543 年，哥白尼才建立太阳系的学说。

关于地球的形状和大小问题，亚里士多德（公元前 384~322 年）论断，认为地必定是一个球体。希腊学者埃拉托色尼（公元前 276~194）首先测量地球的半径，他所用的方法后来形成弧度测量的概念。我国唐朝的张遂（即僧一行，678~727 年）和南官说等在河北平原上进行了类似的测量。到公元 1615 年荷兰学者斯奈勒（W. Snellius）提出三角测量方法。十七世纪初望远镜已开始用于测量。于是大地测量才逐渐形成一门现代学科。从埃拉托色尼测量子午线弧长到用三角和天文测量进行弧度测量，中间经过十八个世纪。十九世纪一些大地测量学者，如高斯、白塞尔、赫尔默特等人，在最小二乘平差、天文、重力测量、天文大地网平差方面作出了许多卓越的贡献；威尔特在光学仪器方面进行出色的改进。

到二十世纪，大地测量又进入一个新的时代，电磁波测距、电子计算机、人造卫星这些新的工具和手段用于大地测量，在计算和数据处理方面出现不少新的理论和方法，使大地测量有了更大的发展。总的来看，大地测量的发展过程，也就是对地球体认识的过程。最先认为地球是球形，进一步认识为椭球形，而现在是希望更细致地了解“大地水准面”的细貌和地球重力场的动态变化。

现在就下面几个方面谈谈大地测量发展的一些趋势。

一、测距与测向技术的发展

大地测量中，一直用观测方向角的手段进行三角测量。因此，所选定的三角点必须互相通视，这就必然带来三角形边长的局限性。在平坦地区，三角边长不能大于 30 公里，否则，觇标太高，建造费事。由于三角形沿着地面布设，通视距离有限，三角网须连续布

设,才能确定相距很远的点位。因此,形成一、二、三、四等和控制点许多逐级控制的问题,无论就施工或误差传播来说,都说明这是方法所带来的缺陷。经典的大地测量在理论、仪器、方法上都达到相当完善的阶段。但是,事物总是运动发展的。大地测量也将随着时代的前进而不断发展。我们就观测目标的方向来看,从1946年芬兰的范赛拉提出“恒星三角测量”的概念之后。观测方向的视线就从沿着地面而引向空中,突破两测站间互相通视的界限。形成三维大地测量,也可以说是卫星三角测量的前奏。

1. 以高空的闪光或卫星为目标,由地面测站观测目标的方向构成空间三角网,并用三维直角坐标系来标定这些点的坐标。这样,各项计算就不必在参考椭球面上进行。而直角坐标系中的计算公式比椭球面上的要简单多,尤其是测向的方法,在经典的测量中,无论是经纬仪、水准仪、测天文仪器和平台仪都必须用水准器,没有它就没有定向的标准。定空间方向的观测手段,一般采用以恒星为背景的摄影法,用恒星的赤经,赤纬作为定向的参考系,就不必用水准器,也不牵涉到铅垂线。直角坐标和地理坐标可以通过下列关系式进行互换。

$$\begin{aligned} x &= (N+h)\cos B\cos L \\ y &= (N+h)\cos B\sin L \\ z &= [(1-e^2)N+h]\sin B \end{aligned}$$

如果用三维三角测量直接测算出点的坐标 x 、 y 、 z ,应用上述公式能解算出点的经度、纬度和大地高,可以绕过大地水准面起伏(或高程异常)而得出大地高,当然,初始的坐标值仍是大地坐标。

关于测定空中目标方向的摄影法,可参阅图1。

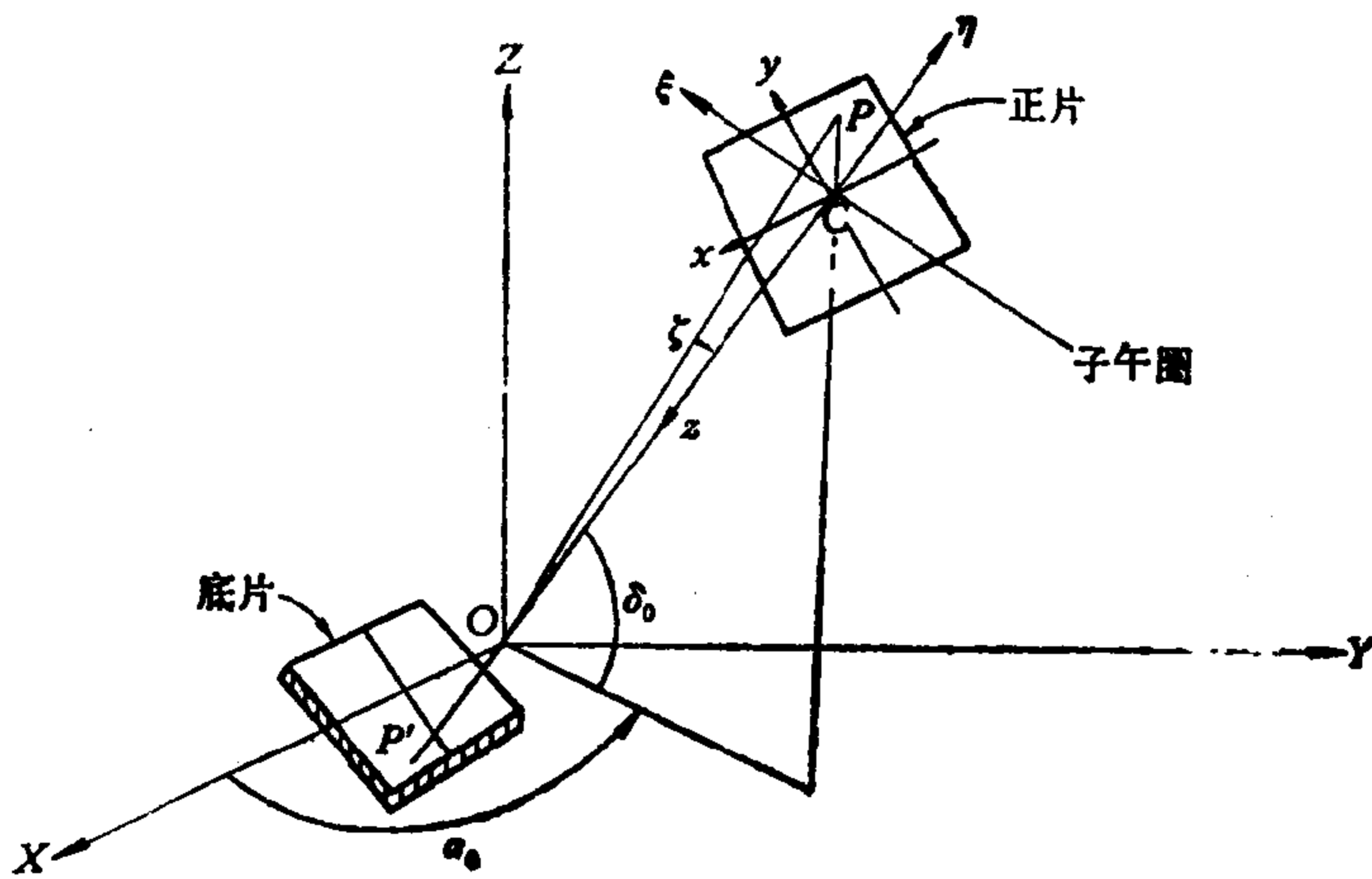


图1

图中 P 为目标, O 为摄影仪镜头中心, 相当于测站中心, OC 为主光轴方向, 它在直角坐标系 $O-XYZ$ 中的方向为 α_0 、 δ_0 。在单位球上 C 点的切平面上有理想坐标系, ξ 轴指正北, η 轴向东。切平面为摄影所得的正片, 象片坐标系 $C-x$ 、 y 、 z , 如图所示。 P 为空中目标, OP 的方向值为 α 、 δ_0 , CP 的角距为 ζ , $\angle \xi CP = A$ 。按球面三角公式有下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} \cos \zeta &= \sin \delta \sin \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0) \\ \sin \zeta \sin A &= \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_0) \\ \sin \zeta \cos A &= \sin \delta \cos \delta_0 - \cos \delta \sin \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

由图 1 可以看出:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= f \operatorname{tg} \zeta \cos A \\ \eta &= f \operatorname{tg} \zeta \sin A \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由(1)(2)两式能得出

$$\left. \begin{aligned} \xi &= f \frac{\operatorname{ctg} \delta \sin(\alpha - \alpha_0)}{\cos \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0) \operatorname{ctg} \delta + \sin \delta_0} \\ \eta &= f \frac{\cos \delta_0 - \operatorname{ctg} \delta \sin \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)}{\sin \delta_0 + \operatorname{ctg} \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

使 ξ 、 η 和象片坐标 z 、 y 满足下列关系

$$\left. \begin{aligned} x &= A\xi + B\eta + E \\ y &= C\xi + D\eta + F \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

上式中有六个待定系数, 每张象片有三颗恒星就能确定 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 系数。但是首先须计算出 α_0 、 δ_0 , 计算时用下列公式:

$$-\frac{f}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}} = m_{31} \cos \alpha \cos \delta + m_{32} \cos \delta \sin \alpha + m_{33} \sin \delta \quad (5)$$

上式中 f 为焦距。有三个恒星就能确定 α_0 、 δ_0 , 即

$$\alpha_0 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-m_{32}}{-m_{31}} \right), \quad \delta_0 = \sin^{-1}(-m_{33}) \quad (6)$$

象片上其他象点的方向值 α' 、 δ' , 就可以按下式计算出来。

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha_0) &= \frac{\varepsilon/f}{\cos \delta_0 - \eta/f \sin \delta_0} \\ \operatorname{tg} \delta' &= \frac{(\sin \delta_0 + \eta/f \cos \delta_0) \cos(\alpha' - \alpha_0)}{\cos \delta_0 - \eta/f \sin \delta_0} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

按上述方法计算空间目标的方向值, 称为“天文法”。

此外, 应用摄影测量的理论, 可以更广泛地运用于空间定向。图 1 中的站心直角坐标系 $O-XYZ$, 和象片坐标系 $C-xyz$ 之间, OP 矢量的坐标有如下的关系式:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} z \\ y \\ -f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \cos \alpha \cos \delta \\ K \sin \alpha \cos \delta \\ K \sin \delta \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{或} \quad \frac{x}{K} &= m_{11} \cos \alpha \cos \delta + m_{12} \sin \alpha \cos \delta + m_{13} \sin \delta \\ \frac{y}{K} &= m_{21} \cos \alpha \cos \delta + m_{22} \sin \alpha \cos \delta + m_{23} \sin \delta \\ -\frac{f}{K} &= m_{31} \cos \alpha \cos \delta + m_{32} \sin \alpha \cos \delta + m_{33} \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

上式中 $K = (x^2 + y^2 + f^2)^{\frac{1}{2}}$, α 、 δ 为象点 P 的方向值, 旋转矩阵的元素的表达式为:

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= \sin \alpha_0 \cos a_0 - \cos \alpha_0 \sin \delta_0 \sin a_0 \\
 m_{12} &= -\cos \alpha_0 \cos a_0 - \sin \alpha_0 \sin \delta_0 \sin a_0 \\
 m_{13} &= \cos \delta_0 \sin a_0 \\
 m_{21} &= -\sin \alpha_0 \sin a_0 - \cos \alpha_0 \sin \delta_0 \cos a_0 \\
 m_{22} &= \cos \alpha_0 \sin a_0 - \sin \alpha_0 \sin \delta_0 \cos a_0 \\
 m_{23} &= \cos \delta_0 \cos a_0 \\
 m_{31} &= -\cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\
 m_{32} &= -\sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\
 m_{33} &= -\sin \delta_0
 \end{aligned} \tag{9}'$$

其中 α_0 、 δ_0 为主光轴的方向值, a_0 为主光轴所在子午面和象片 y 轴的夹角, 从北按“右手规则”量为正。每张象片有三颗恒星的影象, 按 (9) 式能解出旋转矩阵的 9 个元素。并能求定 α_0 、 δ_0 、 a_0 , 再从 (9) 式消去 K , 则得出如下的两个基本方程式:

$$\left. \begin{aligned}
 x &= -f \frac{m_{11} \cos \alpha \cos \delta + m_{12} \sin \alpha \cos \delta + m_{13} \sin \delta}{m_{31} \cos \alpha \cos \delta + m_{32} \sin \alpha \cos \delta + m_{33} \sin \delta} \\
 y &= -f \frac{m_{21} \cos \alpha \cos \delta + m_{22} \sin \alpha \cos \delta + m_{23} \sin \delta}{m_{31} \cos \alpha \cos \delta + m_{32} \sin \alpha \cos \delta + m_{33} \sin \delta}
 \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

如果考虑到观测值 x 、 y 的一些必要的改正, 例如象主点不在框标中心, 镜头的径向畸变。将 (10) 式写成下式:

$$\left. \begin{aligned}
 (x - x_P) (1 + K_1 \gamma^2 + K_2 \gamma^4 + K_3 \gamma^6) \\
 + f \frac{m_{11} \cos \alpha \cos \delta + m_{12} \sin \alpha \cos \delta + m_{13} \sin \delta}{m_{31} \cos \alpha \cos \delta + m_{32} \sin \alpha \cos \delta + m_{33} \sin \delta} &= 0 \\
 (y - y_P) (1 + K_1 \gamma^2 + K_2 \gamma^4 + K_3 \gamma^6) \\
 + f \frac{m_{21} \cos \alpha \cos \delta + m_{22} \sin \alpha \cos \delta + m_{23} \sin \delta}{m_{31} \cos \alpha \cos \delta + m_{32} \sin \alpha \cos \delta + m_{33} \sin \delta} &= 0
 \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

再将 (11) 式线性化, 就可以构成下面的观测方程式

$$\left. \begin{aligned}
 -v_x &= l_x + a_1 \Delta f + a_2 \Delta x_P + a_3 \Delta y_P + a_4 \Delta K_1 + a_5 \Delta K_2 \\
 &\quad + a_6 \Delta K_3 + a_7 \Delta a + a_8 \Delta \delta + a_9 \Delta a \\
 -v_y &= l_y + b_1 \Delta f + b_2 \Delta x_P + b_3 \Delta y_P + b_4 \Delta K_1 + b_5 \Delta K_2 \\
 &\quad + b_6 \Delta K_3 + b_7 \Delta a + b_8 \Delta \delta + b_9 \Delta a
 \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

上式中的系数和自由项的计算式为

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{x'}{f'} & b_1 &= -\frac{y'}{f'} \\
 a_2 &= -1 & b_2 &= 0 \\
 a_3 &= 0 & b_3 &= -1 \\
 a_4 &= (x' - x'_P) \gamma^2 & b_4 &= (y' - y'_P) \gamma^2 \\
 a_5 &= (x' - x'_P) \gamma^4 & b_5 &= (y' - y'_P) \gamma^4
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
a_6 &= (x' - x'_p) \gamma^6 & b_6 &= (y' - y'_p) \gamma^6 \\
a_7 &= -\frac{x'}{f'} (m'_{23} x' - m'_{13} y') & b_7 &= -\frac{y'}{f'} (m'_{23} x' - m'_{13} y') \\
&\quad - m'_{33} y' - m'_{23} f' & & \quad + m'_{33} x' + m'_{13} f' \\
a_8 &= \frac{1}{\cos \delta_0} \left[\frac{x'}{f'} (m'_{13} x' + m'_{23} y') \right. & b_8 &= \frac{1}{\cos \delta_0} \left[\frac{y'}{f'} (m'_{13} x' + m'_{23} y') \right. \\
&\quad \left. + m'_{13} f' \right] & & \quad \left. + m'_{23} f' \right] \\
a_9 &= -y' & b_9 &= x'
\end{aligned}$$

$$l_x = (x - x'_p) (1 + K'_1 \gamma^2 + K'_2 \gamma^4 + K'_3 \gamma^6) + f' \frac{m'_{11} A + m'_{12} B + m'_{13} C}{m'_{31} A + m'_{32} B + m'_{33} C}$$

$$l_y = (y - y'_p) (1 + K'_1 \gamma^2 + K'_2 \gamma^4 + K'_3 \gamma^6) + f' \frac{m'_{21} A + m'_{22} B + m'_{23} C}{m'_{31} A + m'_{32} B + m'_{33} C}$$

其中带“'”的量都用概值， $A = \cos \delta \cos \alpha$ ， $B = \cos \delta \sin \alpha$ ， $C = \sin \delta$ 。

按(12)式用间接观测平差解算后，可以得出精确的摄影仪内方位角元素和定向角，从而计算象片上其它目标象点的方向值。其计算式如下：

$$\left. \begin{aligned}
\cos \delta' \cos \alpha' &= \frac{1}{K} (m_{11} \bar{z} + m_{21} \bar{y} - m_{31} f) \\
\cos \delta' \sin \alpha' &= \frac{1}{K} (m_{12} \bar{x} + m_{22} \bar{y} - m_{32} f) \\
\sin \delta' &= \frac{1}{K} (m_{13} \bar{x} + m_{23} \bar{y} - m_{33} f)
\end{aligned} \right\} \quad (13)$$

上式中 α' 、 δ' 为所求目标在站心坐标系中的方向值， \bar{x} 、 \bar{y} 为经过必要改正的目标象点的象片坐标。采用上述摄影法这一整套计算公式^①，可以适用于常角或宽角摄影仪。所以使用起来比较方便，精度也好。但计算的工作量较大。

2. 另一种情况是将摄影仪安装在空间的运载工具上，例如，在对流层内飞行的飞机，在轨道上飞行的卫星和低轨道上的航天飞机等。其目的也是测定地面点三维直角坐标和测图。航空测量中的解析法测控制点，是电子计算机出现后广泛使用的技术。阿波罗登月计划中为了详细了解着落点月球表面的细貌，确定用卫星测绘比例尺为1/2000的“月形图”。因此需布测控制网。可以说是全部用遥控遥测的技术完成的。

关于空中向地面摄影的测向原理，可参阅图2， O 为地球质心或地球椭球的中心， O' 为摄影仪中心，它的坐标为 x_c 、 y_c 、 z_c ，地心直角坐标的 X 轴在平格林尼治子午面内， xy 坐标面在平北极相应的赤道面内。象片坐标系 $C-xyz$ 的坐标原点在象框中心， z 轴和 CO' 方向一致，对正片来说， y 轴指向运载工具飞行的前进方向， x 轴向右方为正。两坐

① 公式的详细推导参阅《军事测绘》1978年第五期起连载的“卫星测地”一文。

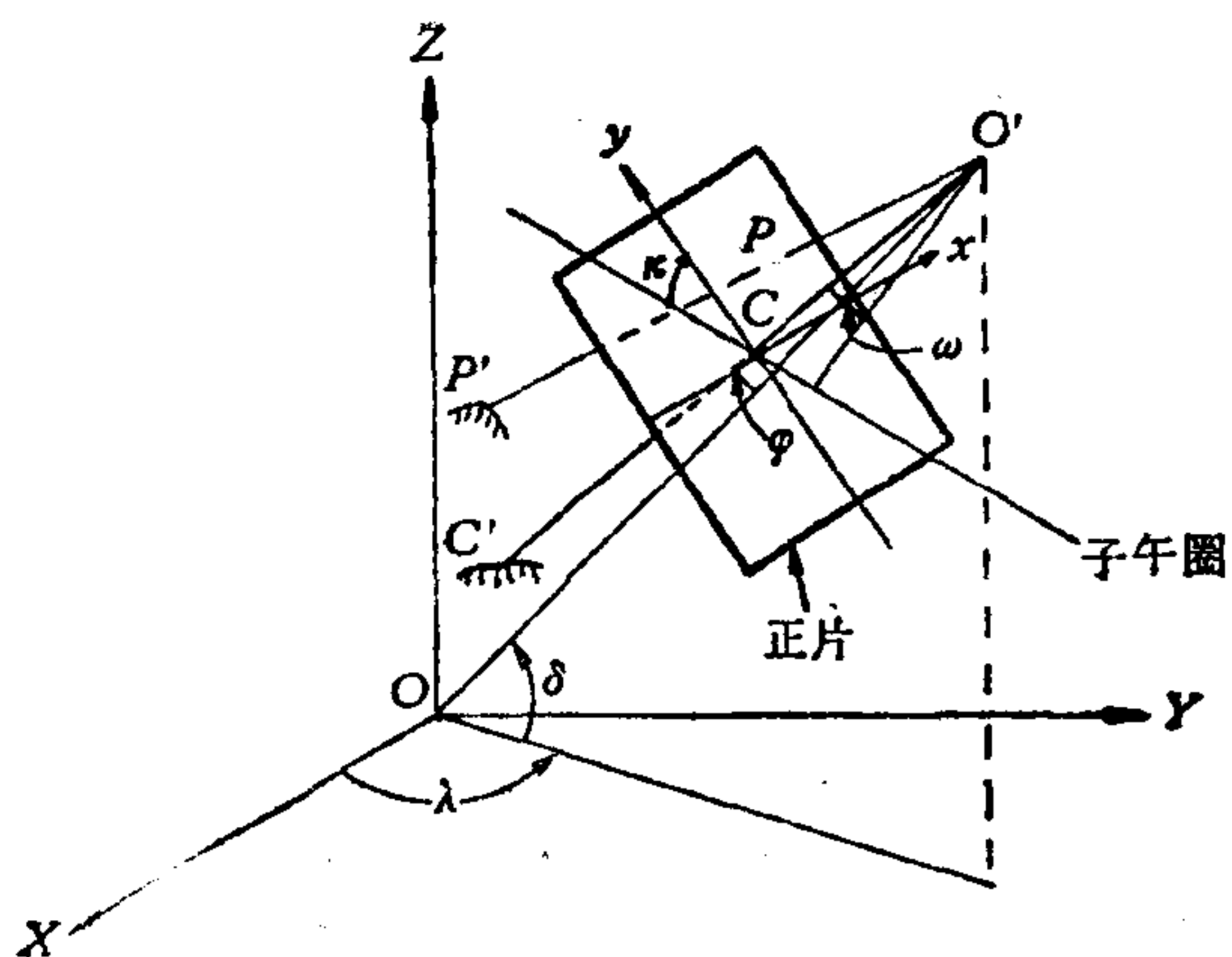


图 2

标系都是“右手坐标系”。 $O'C'$ 为摄影仪光轴的方向， OO' 为地心到摄影仪中心的连线，它的方向值为 λ 、 δ 。

设地面上有地物点 P' ，在象片上相应位置为 P 点， $\overrightarrow{O'P}$ 和 $\overrightarrow{O'P'}$ 矢量是共线的， P 点的象片坐标为 x 、 y 、 0 ， O' 点的象片坐标为 x_0 、 y_0 、 f ， P' 在地心坐标系中坐标为 X 、 Y 、 Z ，因此，共线矢量在三轴上分量有如下关系，

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ 0 - f \end{bmatrix} = R[M] \begin{bmatrix} X - X_c \\ Y - Y_c \\ Z - Z_c \end{bmatrix} \quad (14)$$

上式中 $R = d/D$ ， $[M]$ 为旋转矩阵。

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + f^2}$$

$$D = \sqrt{(X - X_c)^2 + (Y - Y_c)^2 + (Z - Z_c)^2}$$

(14) 式写成具体计算式为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} (x - x_0) &= M_{11} (X - X_c) + M_{12} (Y - Y_c) + M_{13} (Z - Z_c) \\ \frac{1}{R} (y - y_0) &= M_{21} (X - X_c) + M_{22} (Y - Y_c) + M_{23} (Z - Z_c) \\ -\frac{1}{R} f &= M_{31} (X - X_c) + M_{32} (Y - Y_c) + M_{33} (Z - Z_c) \end{aligned} \right\} \quad (14)'$$

上式中的

$$M_{11} = -\sin \lambda \cos \kappa \cos \varphi + \cos \lambda \sin \kappa \sin (\delta - \omega)$$

$$+ \cos \lambda \cos \kappa \sin \varphi \cos (\delta - \omega)$$

$$M_{12} = +\cos \lambda \cos \kappa \cos \varphi + \sin \lambda \sin \kappa \sin (\delta - \omega)$$

$$+ \sin \lambda \cos \kappa \sin \varphi \cos (\delta - \omega)$$

$$M_{13} = -\sin \kappa \cos (\delta - \omega) + \cos \kappa \sin \varphi \sin (\delta - \omega)$$

$$M_{21} = -\sin \lambda \sin \kappa \cos \varphi - \cos \lambda \cos \kappa \sin (\delta - \omega)$$

$$+ \cos \lambda \sin \kappa \sin \varphi \cos (\delta - \omega)$$

$$M_{22} = +\cos \lambda \sin \kappa \cos \varphi - \sin \lambda \cos \kappa \sin (\delta - \omega)$$

$$+ \sin \lambda \sin \kappa \sin \varphi \cos (\delta - \omega)$$

$$M_{23} = +\cos \kappa \cos (\delta - \omega) + \sin \kappa \sin \varphi \sin (\delta - \omega)$$

$$M_{31} = +\sin \lambda \sin \varphi + \cos \lambda \cos \varphi \cos (\delta - \omega)$$

$$M_{32} = -\cos \lambda \sin \varphi + \sin \lambda \cos \varphi \cos (\delta - \omega)$$

$$M_{33} = +\cos \varphi \sin (\delta - \omega)$$

将(14)'式消去 R ，则得出摄影测量的两个基本方程式：

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= -f \frac{M_{11}(X - X_c) + M_{12}(Y - Y_c) + M_{13}(Z - Z_c)}{M_{31}(X - X_c) + M_{32}(Y - Y_c) + M_{33}(Z - Z_c)} \\ y - y_0 &= -f \frac{M_{21}(X - X_c) + M_{22}(Y - Y_c) + M_{23}(Z - Z_c)}{M_{31}(X - X_c) + M_{32}(Y - Y_c) + M_{33}(Z - Z_c)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

上式中 x 、 y 为象片上同名象点，经过转点仪（或称刺点仪）精确刺点后，在天文坐标量测仪上测量的坐标。所以 x 、 y 是摄影测量法中主要的观测量，实质上相当于摄影光束中一系列象点方向的方向值。在常规三角测量中，用经纬仪观测相对的方向值，绝对定向须依赖天文方位角。把摄影仪搬到空中，用摄影方法建立空间三角网，绝对定向也必须借助天文的方法。不外乎利用大地点坐标，或对地摄影的同时，用另一摄影仪对星空摄影。

现在考虑一下 (15) 式这个数学模型，其中 x 、 y 是观测值， x_0 、 y_0 、 f 可以通过摄影仪检验取得精确值，其余有九个未知数，地面点坐标 X 、 Y 、 Z 是我们所要求的，在各种情况下，它始终是未知数。其余六个未知数为 X_c 、 Y_c 、 Z_c 和姿态角 ω 、 φ 、 κ ， λ 和 δ 是 X_c 、 Y_c 、 Z_c 的函数。由于运载工具不同，对这些摄影仪的外方位元素，可以有几种不同的处理方法。现在把几种情况分别介绍如下：

(1) 常规的航空摄影测量，飞机在对流层内飞行，摄影仪的姿态角很难精确测定，所以只能作为未知数，在解算中用回归法求定。至于摄影仪的坐标，过去采用雷达，现在用微波测距仪可以达到一米的精度。如果采用“时标测距法”●地面测站增多，还有可能提高精度。

(2) 卫星上安装摄影仪，卫星在轨道上飞行，有一定的规律，按轨道理论和良好的物理参数，一千公里高的轨道，卫星位置的精度可以达到几米以内。虽然卫星的坐标有相当的精度，但是仍把它当作概值，在平差解算中作为未知数。卫星上摄影仪的姿态角有可能用拍摄恒星的方法比较精确地加以测定。这点对常规的航空摄影是办不到的，但在轨道上摄影就有可能。运用 (15) 式时，姿态角可以作为已知值，按六个未知数处理，即所谓短弧法平差。

(3) 摄影仪安装在载人的宇宙飞船上，在轨道上飞行时进行摄影，如双子星座飞船、阿波罗飞船、天空实验室都安装有这套摄影设备。这种摄影方法和卫星上摄影大致相仿，只是象片可以由宇航员带回来，这点和卫星的象片回收有所不同。

(4) 摄影仪安装在航天飞机上，这是现代发展中的运载工具，它既能作轨道飞行，又能机动飞行，返回地面。比卫星和飞船都要方便些。

上面所阐述的测向发展概况，是七十年代新技术应用于大地测量所引起的急剧变化。

现在再谈谈测距问题，常规大地测量中测距，主要的方法是用镍钢基线尺（即因瓦基线尺）丈量平坦地区的基线，作为三角网长度的起算数据。量测一条基线是很费事的，所以测距只限于量基线。在五十年代出现电磁波测距仪以后，测距也成为广泛使用的手段，因此，出现了测边三角网或测角测边的三角网。在地面测量的电磁波测距仪，首先有瑞典制成“光电测距仪”，继之，南非又研制成“微波测距仪”。这两种类型，只是载波不

● 参阅《军事测绘》1978年第3期“用摄影法测大地点”一文。

同，测距的原理基本上是一致的，都采取比较相位延迟的办法。电磁波测距仪的发展，近十多年来，速度很快，由于电子技术发展的促进，使笨重复杂的测距仪改进为轻便、自动显示的新产品。如测程较短的测向测距合一的仪器几乎可以代替经纬仪和水准仪，广泛地用于工程测量。关于地面测量使用的测距仪，这里就不再作更详细介绍了。

测量空中运动着的目标的方向，上面已扼要阐述。现在来探讨一下测定空中目标距离的问题，例如观测地到月球、飞船、卫星和飞机等。这对发展中的大地测量，确是一项重要的手段。初期测运动目标的方法是雷达，将电磁波脉冲射向目标，由目标将脉冲反射回来，而后测定脉冲往返的时间，由下列电磁波测距的基本公式计算出距离 D ，

$$D = \frac{1}{2} v \cdot t \quad (16)$$

雷达天线有方向性，因此，也能概略地确定目标的方向。脉冲式雷达测距的精度不高，因为电磁波的速度很大，测时的计数器频率为300兆赫时，测距的分辨力相当于一米。旧式的雷达是在荧光屏上读数的，所以精度就更低。

用比较相位法测距能取得较高精度，如由地面微波测距仪发展起来的空中微波测距仪，测定空中运动目标（飞机）的位置，其精度能达到一米。测更远的距离，则有“西可尔系统”（SECOR），地面设四个观测站，应答机安装在卫星上，依次逐一回答地面站的“询问”，确定地面站到卫星的距离，如果地面四个测站中有三个是已知点，按几何法能计算出另一未知点的位置。测距的分辨力也能到一米。据美国陆军系统所施测的赤道两侧的西可尔卫星三角网的结果，和其它方法比较有一定的系统差。

在卫星测地中，激光测距是一项重要手段，因为它测距精度比较高，目前测地月距离已达到 ± 0.5 米数量级的精度。一般激光测距仪还是用激光脉冲投射到卫星或月球上所安置反射镜上，而后返回到接收系统测定脉冲往返时间。现在轨道上带有反射镜的卫星有七颗以上，卫星寿命都较长，而且反射镜也不受星上电源的限制，可以长期利用它。如果有精确的轨道预报，自动跟踪的激光测距仪就能在地影中的整个轨道弧段观测卫星。国外还在发展二氧化碳气体激光器所产生的连续波作为载波，按“相位法”测距，精度可以达到几厘米。

此外，用激光照明卫星，再按光学法以恒星为背景进行摄影，测定卫星的方向，那就更能加强测定点位的精度。这一方法在测向中是有力的手段。发射带闪光的卫星，进行同步摄影很方便，但星上设备复杂，耗电量较大，工作时间受限制。用激光照明卫星来测向，星上设备比较简单，使用时间很长，而地面站的设备较复杂。

在各种测距方法中，利用多普勒效应观测频率变化的个数，从而计算出测站的位置，通过实践说明是一种有效的电磁波测距方法。实际上，多普勒法只能确定卫星在两个位置距离的差，因为它所依据的方程式为：

$$\dot{r} = C \frac{f_0 - f}{f_0} \quad (17)$$

将上式写成

$$\dot{r} = \frac{c}{f_0} [(f'_0 - f) + (f_0 - f'_0)] \quad (18)$$

在(18)式中, f'_0 为地面接收机的本机振荡频率, f_0 为卫星上安装的发射机固定频率, f 为地面接收到的有变化的多普勒频率, C 为光速, \dot{r} 为距离变化的速度。将(18)式积分得出

$$\int_{r_1}^{r_2} dr = \lambda \int_{t_1}^{t_2} (f'_0 - f) dt + \lambda \int_{t_1}^{t_2} (f_0 - f'_0) dt$$

$$r_2 - r_1 = \lambda N + \lambda (f_0 - f'_0) (t_2 - t_1) \quad (19)$$

$(f'_0 - f)$ 是本机振荡频率与多普勒频率的差拍频率, 接收机由 t_1 到 t_2 的时间段内, 将差拍频率用计数器累加起来, 就相当于积分式的第一项, 以 N 表示频率的个数。第2项的 $(f_0 - f'_0)$ 可以看做是固定的。这样, 卫星在 t_1 、 t_2 两瞬间到测站的距离就能由(19)式计算出来。

假设从 t_1 开始计数, 积累计数到 t_2 , 在测站上用测地接收机观测若干颗卫星的经过, 每颗卫星在地平圈之上, 可观测的弧段大约有几分钟到几十分钟。当卫星的轨道根数为已知, 各瞬间卫星到测站的距离可按下式计算:

$$r_s = [(X_s - X_p)^2 + (Y_s - Y_p)^2 + (Z_s - Z_p)^2]^{\frac{1}{2}}$$

将上式按泰勒级数展开取一次项得:

$$r_s + v_s = [(X_s - X'_p)^2 + (Y_s - Y'_p)^2 + (Z_s - Z'_p)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{1}{r_s} (X_s - X'_p) dX_p - \frac{1}{r_s} (Y_s - Y'_p) dY_p$$

$$- \frac{1}{r_s} (Z_s - Z'_p) dZ_p$$

引入 t_1 、 t_2 两瞬间的相应值,

$$r_2 + v_2 - (r_1 + v_1) = [(X_2 - X'_p)^2 + (Y_2 - Y'_p)^2 + (Z_2 - Z'_p)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$- [(X_1 - X'_p)^2 + (Y_1 - Y'_p)^2 + (Z_1 - Z'_p)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$+ [1/r_1 (X_1 - X'_p) - 1/r_2 (X_2 - X'_p)] dX_p$$

$$+ [1/r_1 (Y_1 - Y'_p) - 1/r_2 (Y_2 - Y'_p)] dY_p$$

$$+ [1/r_1 (Z_1 - Z'_p) - 1/r_2 (Z_2 - Z'_p)] dZ_p$$

以测站概略坐标 X'_p 、 Y'_p 、 Z'_p 计算的值为“C”, 以接收机观测值为“O”, 则式可列成观测方程式:

$$\left[\frac{1}{r_1} (X_1 - X'_p) - \frac{1}{r_2} (X_2 - X'_p) \right] dX_p + \left[\frac{1}{r_1} (Y_1 - Y'_p) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r_2} (Y_2 - Y'_p) \right] dY_p + \left[-\frac{1}{r_1} (Z_1 - Z'_p) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r_2} (Z_2 - Z'_p) \right] dZ_p - (O - C) = V \quad (20)$$

其中: $O = \lambda N + \lambda(f_0 - f'_0)(t_2 - t_1)$

$$C = [(X_2 - X'_P)^2 + (Y_2 - Y'_P)^2 + (Z_2 - Z'_P)^2]^{\frac{1}{2}} - [(X_1 - X'_P)^2 + (Y_1 - Y'_P)^2 + (Z_1 - Z'_P)^2]^{\frac{1}{2}}$$

在观测时, 每记录一个由 t_1 到 t_2 时间段的频率个数 N , 就可以列出一个观测方程式, 按最小二乘法解算出测站坐标改正值 dX_P 、 dY_P 、 dZ_P 。如果将卫星坐标也作为概值, 并将它表达为轨道参数和时间的函数, 轨道参数加改正量, 就称为“短弧法”平差。在没有精确轨道根数的情况下, 是一种有效的方法。用多普勒法建立地心坐标系的卫星三角网, 在现阶段是一种方便而且精度较好的方法。因为轨道上有五颗子午仪导航卫星, 除发射 400 兆赫和 150 兆赫的标准频率外, 还调制有时号和广播轨道的信息*, 收到信号后, 现场显示出测站坐标, 在测区能迅速建立起控制网。

上述测向和测距的方法, 为大地测量学的发展, 开拓了新的途径。

二、卫星在大地测量上应用

卫星在大地测量上的应用, 是现代大地测量的标志。用卫星手段测定地球形体和建立地心坐标系既方便又精确。一九五七年苏联第一颗人造卫星进入轨道之后, 引起大地测量者极大重视。一九五八年二月美国发射探险者一号卫星, 同年又发射先锋一号。在六十年代初, 测地学者很快就利用卫星轨道的摄动, 用上述方法取得的观测数据, 推求出地球扁率为 $1/298.2$, 地球引力场的带谐系数计算到六阶。众所周知, 在常规的大地测量中, 求定地球的形体是一项重要的科学研究任务。两百多年来, 无论是用几何的或物理的方法测定的地球扁率, 从发表的和实际应用的数值来看, 互相都有较大的差异, 大致在 $1/300$ 到 $1/295$ 之间, 说明不容易精确测定。而用卫星资料在短短的两年间, 很快就推算出接近现代公认的精确定值。确定地球的长半径也有同样情况, 过去由于观测资料受地区的限制, 确定的地球长半径差异很大。而人造卫星绕整个地球而转, 速度很快, 取得观测数据的周期短, 且能反映整个地球形体和引力场的影响, 这就比较有利于确定引力位和地球扁率。现在引力位系数已确定到 25 阶和某些更高阶次的系数值。

关于地心坐标系的建立, 近十多年来, 进展很快, 目前用多种手段测定的站, 其地心坐标的精度已达到 $1 \sim 2$ 米一般的点在 $4 \sim 8$ 米的范围内。为了更提高点位坐标的精度以满足航天技术和地球动力学的需要, 有人倡议利用长基线干涉的技术, 并以卫星为过渡的桥梁, 就有可能缩小天线的抛物面直径, 适合移动作业, 以适应大地测量的要求, 点位精度有可能提高到厘米的数量级。这样, 就大地测量的成果的使用, 领域更宽广了。

近年来, 卫星上安装无线电测高仪, 用它来测定卫星到海水面的高, 再精确测定卫星轨道参数, 按下列公式推算大地水准面上各点的起伏值 N_i ,

$$N_i = h_i - H_i \quad (21)$$

上式中, h_i 为卫星到参考椭球面的高, H_i 为卫星上测定的高, 经过过滤、改正的值。有了海洋部份的 N_i 值, 就可以按下式计算某一点的 Δg_0 , 不必通过解算位系数,

$$\Delta g_0 = \frac{\gamma N_0}{R} - \frac{\gamma}{16\pi R^3} \int_{\sigma} \int \frac{N_i - N_0}{\sin^3(\psi/2)} d\sigma \quad (22)$$

$$d\sigma = R^2 \sin \psi d\psi d\alpha$$

尤其是海洋部分，重力资料很缺乏，更有现实意义。

卫星在海洋面上测高，如测地三号 (GEOS-C) 和一九七七年发射的“海洋卫星一号” (Seasat-1) 工作时间较长，利用遥测技术可以向地面发回大量观测数据，用分布稠密的海洋部份的 N 值，连同陆上重力资料计算的 N 值按 (22) 式计算 Δg 值。至于陆上 N

$$\text{值的计算, 则按熟悉的司托克公式: } N = \frac{1}{4\pi R\gamma} \iint \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (23)$$

计算得陆上和海洋的所有 N 值之后，又按 (22) 式计算 Δg ，再用海上和陆地的 Δg 值计算陆上的 N 值，这样反复迭代能计算精确的全球大地水准面起伏和重力场参数。从计算的技术上看，用大地水准面起伏值计算重力异常，比观测卫星轨道的摄动值，从而解算地球引力场的位系数的途径，将更为有效。

总的看来，从五十年代引入人造卫星起，对大地测量确实起了很大的推动。由椭球面上的三角网发展为空间三角网，对洲际大地坐标系的联测，建立地心坐标系，推算地球形体和确定地球引力场模型等方面提供了新的途径。

三、加强天文大地网精度的途径

天文大地网的内部符合精度，可以肯定地说是相当良好的。疆土辽阔的国家，一般用三角锁构成方格形三角锁网，西欧一些国家都布设全面网，但是全网平差时只能固定一点，按自由网平差，因此，误差向网的边缘累积，至于系统误差的积累就更无法控制了。

关于天文大地网的平差方法，早期的如海尔默特的大地线法平差；鲍威的先固定基线网大小和定向的平差法；波尔兹的分组平差法；以及近年来运用电子计算机容量大、速度快的特点，进行全网的整体平差，但这些方法是从减少解法方程式的计算工作量上着眼，只从解算途径上做了各项改进。至于三角网内点位的相对精度，只能对偶然误差作适当的理论估计。而系统误差的积累情况和它的定量分析，还缺乏有力的措施来说明它。我们设想如果有一种测量的手段能够得出比常规方法高一个或两个数量级的结果，就很容易比较鉴别是否存在系统差。并且可以考虑加强天文大地网的点位精度。这种设想现在已有可能提到日程上来了。

我们设想在天文大地网上，布设一个 1000~1500 公里边长的测边测角网，所有的点都和天文大地网的一等点重合，三角点间的弦距采用高精度的激光测距仪观测。在地形平坦地区，尽量采取直线导线，地形困难地区则用折角导线，精度达到二百万分之一（根据目前技术水平能达到），再用摄影法观测卫星，测定弦的空间方向值，估计定向精度能达到 $\pm 0''.3$ 。将超高精度的测边测角的三维三角网进行全网平差。得出的点位相对精度有可能在百万分之一以上。用它来控制天文大地网进行整体平差，相隔较远的点位相对精度有可能大幅度地提高，而且全网的点位误差分布也比较均匀。建立这样高精度三维三角网，除加强天文大地网的精度外，对发展中的大地测量、考察地球动态、发展空间技术都能做出一定的贡献。

我国天文大地网第一次平差的理论和实践

57653 部队 王贞奎

前 言

我国的天文大地网到目前为止已布测完成，大面积的控制网已基本复盖了祖国大地。满足了国防和国民经济建设需要，为科学研究提供了重要的资料。

天文大地网的整体平差一直为测绘工作者所关心，这是由于要重新建立我国的坐标系，满足空间技术、国防和经济建设的更新更高要求，需要大力地开展理论工作，同时它又是一项规模巨大的数据处理工程，因而在理论和实践上都具有深远意义。

在六十年代，我国许多学者相继提出过各种不同的天文大地网平差方案，当时方案的规模只局限于一等锁或加强锁。所以未能解决由于锁的结构单薄致使锁环内网平差的变形。

大家知道一等锁环内的二网、二等补充网或全面三等网，由于受锁的控制，不同程度上引起变形。

设 μ 是平差后的单位权中误差， m 是权为 1 的观测中误差，作统计量：

$$\frac{\mu}{m} = K \quad (1)$$

量 K 称之为平差后的“变形比”，正常情况下， K 应该近于 1；但实际上 K 往往比较大，其原因有下面几个因素：

- a) 计算过程存在错误；
- b) 数据存在错误；
- c) 平差的数学模型有问题；
- d) 起算数据精度不好；

e) 网中不等权平差时各权重比不合理；上面的五因素中头三个可当别论，所以 K 大的主要是由于后面两个因素引起的，特别是起始数据是主要影响，而权比不合理并不是敏感量，故只起助长作用。

根据我们对已平差的锁环（局部平差）统计，54 个区（含 14843 个点）平差后的变形比如下表所示：

$K \leq 1.2$	$K > 1.2$	$K > 1.5$	$K > 2.0$	K_{\max}
7	47	19	10	
12%	88%	35%	18.5%	3.00~5.28

从表中看到网受到不同程度的变形，有的甚至很严重，这就大大地损害了外业观测精度。

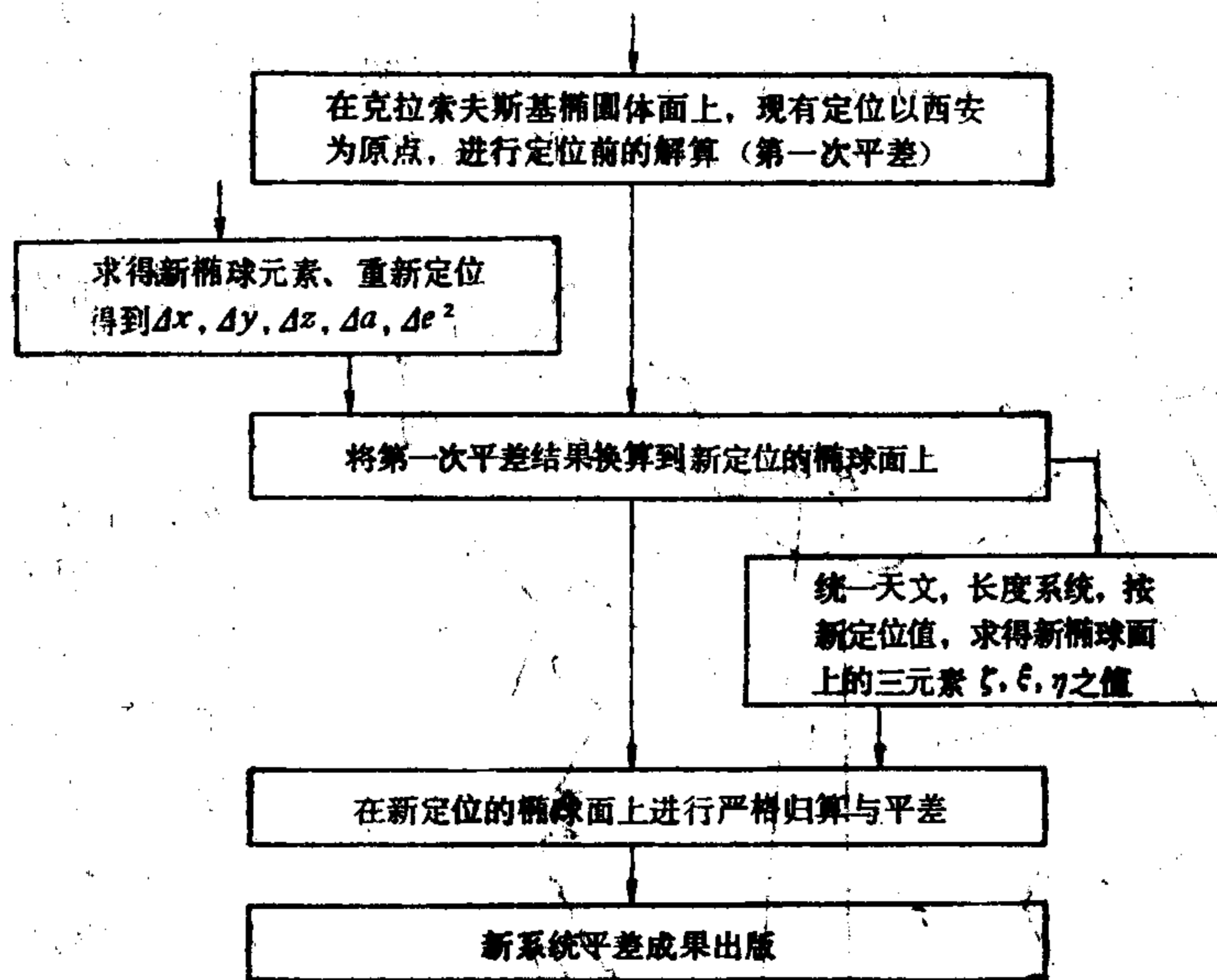
为了解决这个问题，我们于 1972 年底提出了锁网结合构成全面网进行严密平差，使平差后全网的坐标具有均匀的精度。

全面网由下列各类型测量资料构成：

类型	等级	细则规定的精度
A	一等锁、一等网	0.7
B	新二等锁	1.2
C	二锁	1.5
D	二等网	1.0
E	新二补网、新三等网	2.0, 1.8
F	二等补充网	2.5
G	一等导线网	0.7
H	二等导线网	1.2
I	三等导线网	1.8

这样选择的全面网约 50000 点左右，平差是以西安为原点，在椭球面上以方向为元素的附有条件的坐标平差法。

平差分两步进行框图如下：



也就是说分定位前和定位后两次平差，这样做的理由是使大规模平差方案稳妥可靠，由于有了第一次平差结果则观测方程式的线性程度好，系数精度高，第二次坐标改正数小，这样对解的稳定和精度都有极大的好处。

本文的重点是叙述我国全面网平差的方法和实践，分两个部分：第一部论述全面网平差的分区解算原理，第二部论述我国全面网的数据在 013 机上第一次平差结果的实际分析。

一、平差解算原理与方法

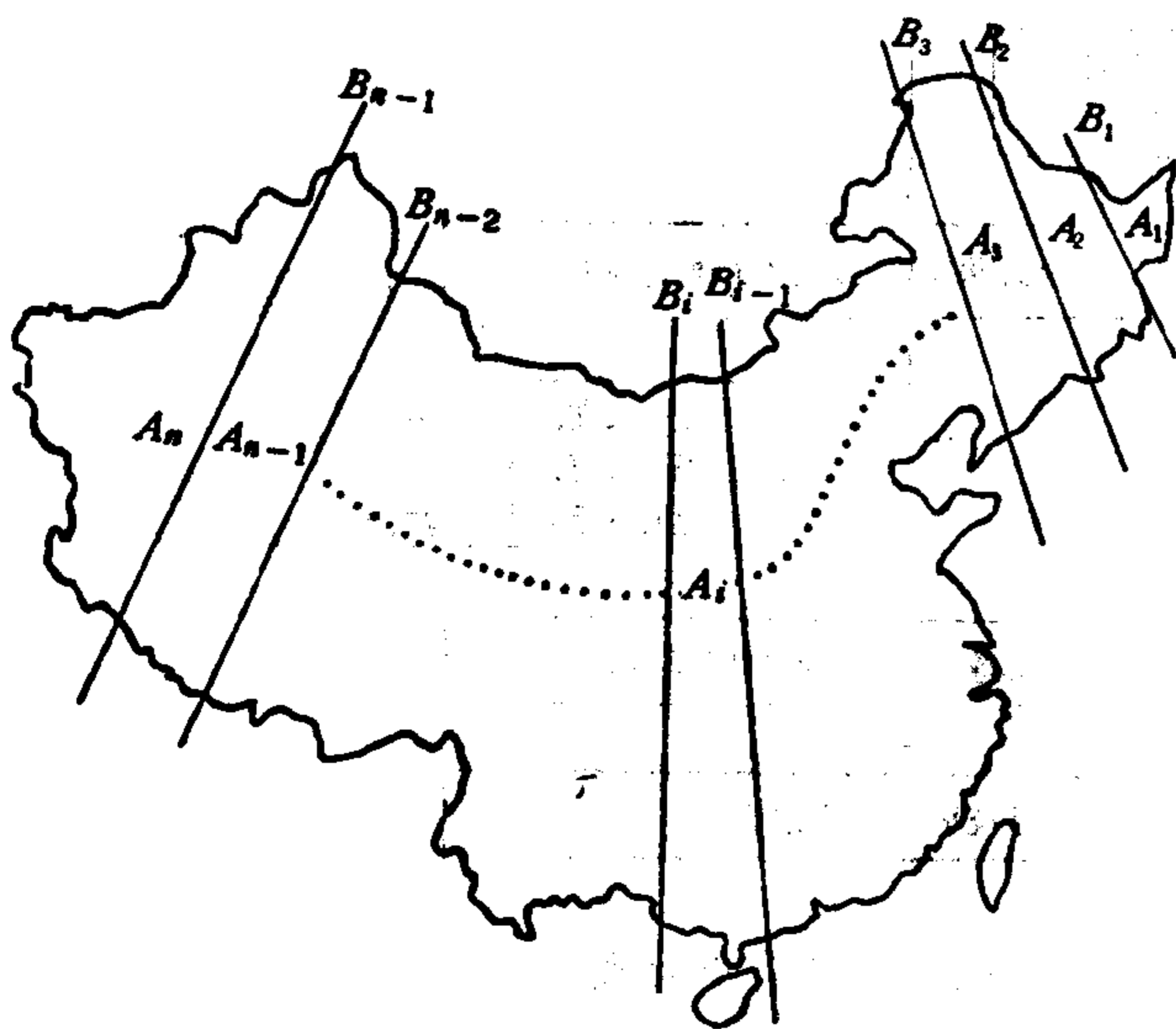
§1 总论

在以电子计算机为工具的现代大地网平差，除从平差原理应继续研究之外，重点已转移到解算方法的研究，因为它不象手工计算时代那样，简化算法，减少规模。而是尽量地严密算法，扩大规模。我国的全面网的规模平差就是例子，它要解算近 16 万阶的代数方程或能算一组近 31 万阶的观测方程，这在我国测量史上还是第一次，不仅在测绘部门没有解算这样高阶方程组的经验，而且在国内其他部门也没有这方面的经验。这个问题包括两个方面：一是解算方法的研究，二是国产机器的适应性问题。

从 1973 年开始我们就与中国科学院计算技术研究所(现在分出的 计算中心)，北京大学共同进行探讨这个问题：

1. 1973~1975 年期间我们在上海华东所的 655 机上进行了解法的选择，在迭代法方面对模型用超松弛法 (SOR) 和共轭斜量法 (Cg) 进行了研究，在直接法方面用平方根法 (C)，高斯消去法 (G)，Gram-Schmidt 法 (G-S)，及 Householder 变换法 (H) 进行了研究，结论是迭代法中 Cg 法好，直接法中，从数值稳定性看，H 法好，但工作量 C、G 比 H 要节省很多。

2. 1976 年在科学院计算中心 013 机上用 Cg 法进行全国一等锁 (4735 点、22632 个观测方程式) 及全国一等锁和导线网联合 (5437 点、24873 个观测方程式) 分别进行实际平差(用 Cg 法和分块平方根法)。结论是两种方法对解算大地测量高阶方程都是可行的，但迭代法用的时间多而直接法花时少，所以我们决定对全面网用块平方根分解进行平差。



在这期有的同志提出迭代法与直接法相结合的方法 [1]、[2]，即各锁环内的网作为一级，一等锁作为第二级，一级用直接法解算，结果附在第二级上，然后用 Cg 法解算第二级。我们认为这样作比较复杂，或者增加了第二级的压力。而我们这次分级方法如下，即不以一等锁作第二级，而是用单点联系的点列将全面网从南到北划分成几个带状的区域如下图所示：形成 A 级和 B 级，两级都用块平方根直接解算，下面叙述分块平差原理。

§2 分块平差原理

1. 块误差方程式

从图中可以看到 B_i 是将 A_i 和 A_{i+1} 截然的分开, 同时得到了各级块的误差方程:

A级:

$$V_{A_i} = A_i X_{A_i} + A_{iB_{(i-1)}} X_{B_{(i-1)}} + A_{iB_i} X_{B_i} + L_{A_i} \cdots P_{A_i} \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (n=24)$$

且 $X_{B_0} = 0, \quad X_{B_{24}} = 0$

其中的条件方程式假定预先已被消去。

B级:

$$V_{B_i} = B_i X_{B_i} + L_{B_i} \cdots P_{B_i} \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, (n-1) \quad (n=24)$$

(2)、(3) 两式中的 P_{A_i}, P_{B_i} 分别表示 A_i 区和 B_i 区的权阵。

2. 法方程式组成

按照 $V_A^T P_A V_A + V_B^T P_B V_B = \min$ 原理之下求得下列法方程组

$$(A_i^T P_{A_i} A_i) X_{A_i} + A_i^T P_{A_i} A_{iB_{(i-1)}} X_{B_{(i-1)}} + A_i^T P_{A_i} A_{iB_i} X_{B_i} + A_i^T P_{A_i} L_{A_i} = 0 \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (n=24)$$

$$X_{B_0} = X_{B_{24}} = 0$$

这是 A 级的第 A_i 块的法方程式。

$$A_i^T P_{A_i} A_{iB_i} X_{A_i} + A_{(i+1)}^T P_{A_{(i+1)}} A_{(i+1)B_i} X_{A_{(i+1)}} + (A_{iB_i}^T P_{A_i} A_{iB_i} + A_{(i+1)B_i}^T P_{A_{(i+1)}} A_{(i+1)B_i} + B_i^T P_{B_i} B_i) X_{B_i} + (A_{iB_i}^T P_{A_i} L_{A_i} + A_{(i+1)B_i}^T P_{A_{(i+1)}} L_{A_{(i+1)}} + B_i^T P_{B_i} L_{B_i}) = 0 \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (n=24)$$

$$X_{B_0} = X_{B_{24}} = L_{B_0} = L_{B_{24}} = 0$$

这是 B 级的第 B_i 块的法方程式。

为了简化上面式子的符号设:

$$\left. \begin{aligned} A_i^T P_{A_i} A_i &= A_{ii} \\ A_i^T P_{A_i} A_{iB_i} &= I_{ii} \\ A_i^T P_{A_i} L_{A_i} &= L_i \\ A_{iB_i}^T P_{A_i} A_{iB_i} + A_{(i+1)B_i}^T P_{A_{(i+1)}} A_{(i+1)B_i} + B_i^T P_{B_i} B_i &= B_{ii} \\ A_{iB_i}^T P_{A_i} L_{A_i} + A_{(i+1)B_i}^T P_{A_{(i+1)}} L_{A_{(i+1)}} + B_i^T P_{B_i} L_{B_i} &= b_i \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

则(4)、(5) 变成为

$$A_{ii} X_{A_i} + I_{i(i-1)} X_{B_{(i-1)}} + I_{i,i} X_{B_i} + L_i = 0 \quad (7)$$

$$I_{i,i}^T X_{A_i} + I_{(i+1),i}^T X_{A_{(i+1)}} + B_{ii} X_{B_i} + b_i = 0 \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (n=24)$$

$$X_{B_0} = X_{B_{24}} = b_0 = b_{24} = I_{1,0} = 0$$

