

113.0001

天文学教程

(下 册)

南京大学数学天文学系天文专业 编



上海科学技术出版社

統一書號 13119·440

定 價 1.45 元

高等学校教学用书

天 文 学 教 程

(下 册)

南京大学数学天文学系天文专业 編

主編 戴文賽

編 写 者

容寿鏗 苗永寬 許邦信

任江平 朱耀鑫

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本教程有系統地介紹現代天文學的基本知識，共分上下兩冊。上册先論述天球的概念和天球坐標系，計量時間的各種系統，天文觀測的儀器和方法；然後就各種類型的天體分別介紹其研究方法和研究結果：由近到遠，先介紹地球和月球；其次介紹太陽系的行星、衛星、彗星、流星；再介紹太陽、恆星、雙星、變星、星團、星云、銀河系、河外星系；最後討論天體的起源和演化問題。下冊包括天體測量和天體力學部分。天體測量方面，先介紹觀測數據的處理方法（包括最小二乘法）和影響天體坐標的各種因素：視差、大氣折射、光行差、歲差和章動等等，及改正方法；然後介紹時間和地面經緯度的各種測定方法，恆星位置和距離的測定方法。天體力學方面，介紹天體運動的研究方法，討論二體問題，攝動理論，人造衛星運動理論和歲差章動的理論。

本教程可作為綜合大學及高等師範學校天文專業天文學基礎課程的教材。高等學校理科其他專業及高等工業學校中某些專業設有天文學課程的，也可選用本教程作為教材或參考書。本教程也可作為天文及其他有關科學工作人員的參考書。

參加本書個別章節編寫工作和修訂工作的有易照華、張承志、黃天衣等同志。

高等學校教學用書 天 文 學 教 程 (下 冊)

南京大學數學天文學系天文專業編

上海科學技術出版社出版

(上海瑞金二路450號)

上海市書刊出版業營業許可證出093號

新華書店上海發行所發行 各地新華書店經售

商務印書館上海廠印刷

開本 850×1168 1/32 印張 12 24/32 字數 304,000

1961年12月第1版 1962年5月第2次印刷

印數 1,001—3,000 (其中筒裝本 1,000冊)

統一書號：13119 · 440

定 價：(十) 1.45 元

目 录

(下 册)

| | |
|--------------------------------|-----|
| 第一章 观测数据的处理 | 1 |
| § 1.1 观测的偶然误差 | 1 |
| § 1.2 观测的精度标准 | 5 |
| § 1.3 非等精度观测列的最或然值和中误差 | 17 |
| § 1.4 间接观测的最或然值和中误差 | 23 |
| § 1.5 正态方程式的高斯解法 | 31 |
| 第二章 影响天体坐标的几种系统误差 | 43 |
| § 2.1 视差对天体坐标的影响 | 44 |
| § 2.2 大气折射 | 51 |
| § 2.3 光行差, 周年光行差和周日光行差对天体坐标的影响 | 55 |
| § 2.4 岁差对天体坐标的影响 | 62 |
| § 2.5 章动对天体坐标的影响 | 67 |
| § 2.6 恒星的视坐标、真坐标和平坐标 | 72 |
| 第三章 经纬度和方位角的近似测定 | 85 |
| § 3.1 经纬仪 | 86 |
| § 3.2 经纬仪的基本使用方法 | 95 |
| § 3.3 经纬仪的误差及其对观测结果的影响 | 100 |
| § 3.4 天文钟, 天文表 | 111 |
| § 3.5 观测天体的天顶距决定钟差 | 115 |
| § 3.6 观测北极星的天顶距决定纬度 | 120 |
| § 3.7 地面目标方位角的测定 | 124 |
| § 3.8 经度的测定 | 130 |
| § 3.9 天文定位在航海航空上的应用 | 135 |

| | | |
|-------|------------------|-----|
| 第四章 | 時間和經緯度的精確測定 | 144 |
| § 4.1 | 中星儀, 測時的基本公式 | 146 |
| § 4.2 | 中星儀的觀測 | 153 |
| § 4.3 | 太爾各特法測定緯度 | 158 |
| § 4.4 | 等高法測定時間和緯度 | 167 |
| § 4.5 | 多星等高法同時測定經緯度 | 173 |
| § 4.6 | 時間和經度工作 | 182 |
| § 4.7 | 緯度工作 | 189 |
| 第五章 | 基本天體測量學方法 | 196 |
| § 5.1 | 子午環 | 196 |
| § 5.2 | 用子午環測定恆星赤緯和赤經的方法 | 200 |
| § 5.3 | 照相天體測量學基礎 | 207 |
| § 5.4 | 恆星自行的測定 | 215 |
| § 5.5 | 星表和星圖 | 218 |
| § 5.6 | 測定太陽視差的近代方法 | 225 |
| § 5.7 | 測定恆星三角視差的方法 | 227 |
| § 5.8 | 基本天體測量學的近代工作 | 230 |
| 第六章 | 天體力學基礎 | 233 |
| § 6.1 | 萬有引力定律的推導 | 233 |
| § 6.2 | 位函數與力函數 | 239 |
| § 6.3 | n 體問題運動方程的初積分 | 242 |
| § 6.4 | 行星擾動運動方程 | 246 |
| § 6.5 | 幾種特殊形狀天體的相互吸引 | 249 |
| § 6.6 | 剛體的定點轉動 | 256 |
| § 6.7 | 剛體運動的歐拉方程 | 257 |
| § 6.8 | 地球的慣性運動, 地極移動 | 261 |
| § 6.9 | 歲差章動原理 | 264 |
| 第七章 | 二體問題 | 272 |
| § 7.1 | 二體問題運動方程的積分 | 272 |
| § 7.2 | 宇宙速度 | 277 |
| § 7.3 | 克普勒方程的推導和解法 | 281 |

| | | |
|-------------|----------------------------|------------|
| § 7.4 | 初始值和軌道要素的关系 | 289 |
| § 7.5 | 計算三种运动的坐标 | 291 |
| § 7.6 | 計算星历表的基本方程式 | 298 |
| § 7.7 | 行星視运动的計算 | 304 |
| § 7.8 | 計算軌道要素的原理 | 309 |
| § 7.9 | 二体問題的实际应用 | 313 |
| 第八章 | 摄动理論初步 | 316 |
| § 8.1 | 拉格朗日方程 | 316 |
| § 8.2 | 哈密頓正則方程 | 323 |
| § 8.3 | 哈密頓-雅哥比方程和雅哥比定理 | 331 |
| § 8.4 | 哈密頓-雅哥比方程的特殊情况 | 334 |
| § 8.5 | 用哈密頓-雅哥比方法解二体問題 | 336 |
| § 8.6 | 哈密頓-雅哥比方法在摄动理論上的应用原理 | 345 |
| § 8.7 | 拉格朗日行星运动方程 | 355 |
| § 8.8 | 摄动的几何解釋 | 359 |
| § 8.9 | 在太阳系中常見到的几种摄动及这些摄动对軌道要素的影响 | 367 |
| § 8.10 | 人造卫星的摄动运动方程 | 371 |
| § 8.11 | 圓型限制性三体問題 | 375 |
| § 8.12 | 摄动运动方程的解法輪廓 | 379 |
| § 8.13 | 摄动函数展开方法大意,展开的結果,太阳系稳定性 | 384 |
| 习 題 | 第一章~第八章 | 393 |
| 参考书目 | | 401 |
| 参考用表 | | 402 |

第一章 觀測數據的處理

§ 1.1 觀測的偶然誤差

天文的理論基礎建立在大量的天文觀測上。任何觀測的結果都難免誤差，因此，對同一目標由同一觀測者進行多次觀測，或由不同觀測者來進行觀測，所得的數據往往互不相同。怎樣從這些數據里找出一個最可靠的結果並估計它的可靠程度，這就是本章內所要解決的問題。

1. 誤差的分類 觀測的誤差，按其產生的規律特征可分為錯誤、系統誤差和偶然誤差三類。

錯誤是由於觀測時疏忽大意，如對錯星、讀錯度盤和寫錯數字等原因所產生。我們應該盡量避免這種誤差。在觀測數據中如果含有錯誤，誤差往往特別大。這種錯誤，在反復觀測或核算時易於發現，應該及時予以消除。

系統誤差是按着一定規律而變化（或保持常數）的誤差，它包括觀測儀器的誤差和外界環境對觀測的影響（例如大氣厚度對於測定太陽常數的影響）。此外，觀測者由於感覺器官不完善所產生的“人差”，也常有一定的規律。例如在測定恆星的位置時，觀測者往往沒有把星象對準在望遠鏡視場的中央，而每次都不自覺地使星象偏向某一邊；記錄星象通過視場中細絲的時刻，也有經常太早或太晚的現象，這些也是系統誤差。

各種不同的觀測方法、觀測儀器和觀測對象，都有各自不同的系統誤差。為了使觀測結果符合實際情況，必須查出造成系統誤

差的原因,并尽可能予以消除,或使它减小到可以忽略的程度。

在观测数据中消除了错误和系统误差后,剩下的误差称为偶然误差。偶然误差,是由于影响观测结果的一切因素(条件)的不易估计的变化,例如仪器不够稳定、温度的微小变化、仪器照明情况的好坏、观测者的熟练程度和过分疲劳或兴奋等原因的相互合并或抵消所造成。偶然误差的绝对值和符号都各不相同;它们在出现的顺序上也没有什么规律。

偶然误差与前两种误差不同,既不能避免它的出现,又不能从观测理论中推出它的大小,也不能用适当的观测方法予以消除。但决不能说,我们对偶然误差是完全无能为力的。恩格斯教导我们:“…凡表面上看去是偶然性在起作用的地方,其实这种偶然性本身始终是服从于内部的隐藏着规律的。全部问题就在于发现这种规律。”* 误差理论,就是专门研究偶然误差的特性的科学,以下我们将根据误差理论,着重讨论怎样使观测结果尽可能少受偶然误差的影响。在讨论中,我们假定在观测数据中已经没有了错误,并已消除或至少大大削弱了系统误差的影响,因而有时我们把偶然误差直接称为误差。

2. 误差分布的性质 虽然每一个偶然误差的绝对值和符号的出现没有规律,但是如果我们在相同的条件下,对同一量进行了一系列的观测,却可发现在所产生的偶然误差中,无论误差的大小和符号的分配都有一定的规律;观测次数愈多,其规律性也愈明显。

根据统计,在相同的条件下对同一量进行一系列观测所产生的偶然误差,在分布上具有下列性质:

- (1) 在一定的观测条件下,误差的绝对值不超过一定的限度;
- (2) 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的次数多;

* 恩格斯:《费尔巴哈与德国古典哲学的终结》,38页8~11行,人民出版社1959年版。

(3) 绝对值相等的正负误差出现的次数相同；

(4) 在相同的条件下,对同一量的观测,其误差的算术平均值随着观测次数的增加而无限地趋向于零。

显然,第四种性质可由第三种性质推出,但为了引用方便,也把它列出。

打靶试验,是研究偶然误差的分布的一个著名例子。曾有某炮台对炮靶进行了 1000 发实弹射击,他们把炮靶从上到下分成十一个相等的区域,以击中中央横綫为准。统计每个区域击中炮弹的数目,得出下表:

| 区域序数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|------|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|
| 中弹数 | 1 | 4 | 10 | 89 | 190 | 212 | 204 | 193 | 79 | 16 | 2 |

如果充分考虑了重力对炮弹的影响,炮弹击中点对中央横綫的偏差,可认为是偶然误差。如以区域序数为横坐标,每个区域的中弹数为纵坐标,可以画出 1000 个炮弹击中点的分布(图 1.1)。这个图也可以认为是 1000 次射击的误差分布图。1000 发炮弹全部击中炮靶,表明这一列射击的误差的绝对值有一定的限度,它不超过炮靶上下边缘至中央横綫的距离,这符合误差分布的第一个性质。其次,图中表明,愈靠近中央横綫的区域,击中的炮弹愈多,这符合于误差分布的第二个性,即绝对值小的误差,比绝对值大的误差出现次数多。此外,全部炮弹击中点的分布,基本上对称于中央横綫,这也可以大致表明上述的第三个性,即绝对值相等的正负误差出现的次数相同。本例所以未能更好地表明误差分布的第三个性,是因为在射击误差中还存在着重力影响的系统误差的残余,因此,击中炮靶下半部(第七区域至第十一区域)的炮弹偏多。

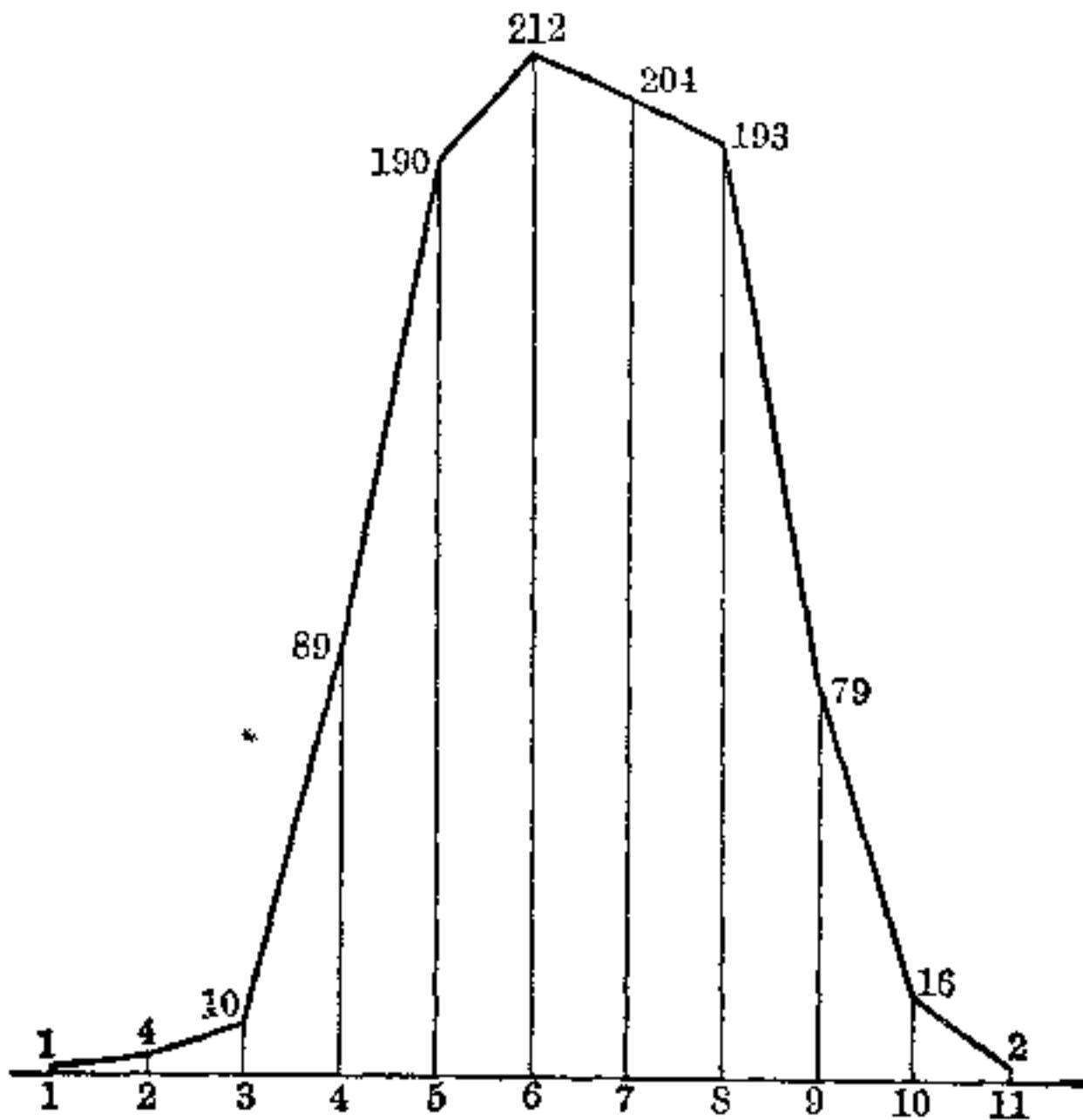


图 1.1 炮弹击中点的分布图

偶然误差的这些分布上的性质，是误差理论的基础。根据概率论，可以推出这些性质（除第一个性质外）的数学表示式，称为误差分布定律，或称高斯误差分布定律，因为它是由德国数学家高斯首先推导出来的。误差分布定律，代表一系列偶然误差在理想情况，即完全符合前述性质时的分布。关于误差分布定律的推导，本章不作介绍，必要时读者可以参看其他有关误差理论的参考书。

3. 最或然值 从误差分布的第四个性质，我们可以得出误差理论的一条重要原理：在相同条件下，对同一量进行一系列观测，其中最可靠的观测结果，是这一系列观测值的算术平均值。我们称算术平均值为这一系列观测的最或然值，也就是最可靠的意思。

设 a_1, a_2, \dots, a_n 为在相同条件下，对某量观测 n 次所得的 n 个观测值，则算术平均值

$$a_0 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{[a]^*}{n}. \quad (1.1)$$

設觀測量的真值等于 A ，而觀測值 a_i 中已消除錯誤及系統誤差，則 $a_i - A = \Delta_i$ 称为 a_i 的真誤差，按其性质为 a_i 的偶然誤差。

令 n 个真誤差的算术平均值为 Δ_0 ，則

$$\Delta_0 = \frac{[\Delta]}{n} = \frac{[a]}{n} - A = a_0 - A, \quad (1.2)$$

Δ_0 可称为算术平均值的真誤差。

誤差分布的第四个性性质表明，随 n 的增大， Δ_0 将趋向于零，因而 a_0 也必趋向于真值 A 。因此可以认为，算术平均值是这一列觀測的最可靠的結果，即最或然值。这一原理虽然不能用严格的数学公式加以証明，但对于一般人都是易于接受的。

§ 1.2 觀測的精度标准

1. 精度，等精度觀測 我們已經知道，在相同的条件下，对同一量进行一系列觀測，可以得到一个最或然值。如果在另一条件下，对该量进行了另一列觀測，同样得到了一个最或然值。那么，这两个最或然值究竟哪个更为可靠？能否用某种数值来衡量它們的可靠程度？这就是我們必須解決的問題。

所謂觀測結果的可靠程度，通常我們称为觀測的精度。一般地說，觀測精度的高低可以用偶然誤差的大小来衡量，而偶然誤差的大小則决定于觀測的条件。这里所指的觀測的条件，应包括觀測仪器制造和校正的精度、觀測方法、觀測者的經驗和外界环境的影响等。仪器愈精密，觀測方法愈完善，觀測技术愈熟练，外界环境愈稳定（例如大气的稳定对地面上任何天文觀測都是非常重要

* $[a] = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 称为和数的高斯符号，以后將經常用到，与此类似的有 $[a^2] = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ ， $[ab] = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ 等。

的), 则在观测中发现不出的变化就愈少。这样, 观测数据中的错误和系统误差都能比较容易地消除掉, 而剩下来的偶然误差就愈小, 观测结果自然也就愈精确。由此可得出结论, 即观测的精度是由观测的条件所决定的。

如果对某量的一系列观测, 是在完全相同的条件下进行的, 这一系列观测在理论上被称为等精度观测。例如, 同一观测者用同一架仪器, 以同样的方法, 在同样的外界环境下, 同样细心地对某量观测了 n 次, 则所得的 n 个观测值可认为是等精度的。

但是在事实上, 自然界中的一切都在不断变化, 完全不变的观测条件是不存在的, 因而理论上的等精度观测也是不存在的。

通常我们在具体区别某列观测值是等精度或非等精度时, 只是依据主要的(或者说明显的)观测条件, 例如仪器的精度及观测方法等, 只要这些条件相同, 就认为是等精度的。至于观测者的熟练或细心的程度以及外界环境影响变化的大小等, 因为难以用精确的数字来衡量, 一般只能作大致的估计, 只要变化不大就不作考虑; 只有在对其中某些影响作专门的研究时, 才加以认真的考虑。因此, 某列观测虽然被称为等精度观测, 但其中每个观测值的偶然误差却仍互不相同, 只是在一定的条件下, 这些误差的绝对值不会超过一定的范围吧了。

根据以上两点结论, 我们得到以下关于精度的概念: 一系列等精度观测的精度, 也就是其中每一次观测的精度, 它的数值代表这列观测共同的主要观测条件。精度的数值既然代表一系列观测共同的主要的观测条件, 则必须从综合全列观测值的偶然误差来确定它。我们以每列观测里大误差出现的多少来确定精度。如果某列观测里出现了较多的大误差, 就认为这列观测的精度较低; 如果大误差少, 就认为精度较高。下面将介绍三种通用的精度标准: 中误差、平均误差和或然误差, 它们都是根据这个原则来确定的。

2. 精度标准 中误差 m ，又称为均方误差，它是真误差平方的算术平均值的平方根。设一系列观测值的真误差为 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ ，则有

$$m^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n},$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \quad (1.3)$$

平均误差 t 是真误差绝对值的算术平均值，亦即

$$t = \pm \frac{|\Delta_1| + |\Delta_2| + \dots + |\Delta_n|}{n} = \pm \frac{[|\Delta|]}{n}. \quad (1.4)$$

或然误差 r 是在全列真误差中，绝对值比它大和比它小的真误差各占一半的一个值。

这三种误差的数值前都必须加上正负号，因为偶然误差为正值或为负值的可能性是完全相同的。显然，这三种误差的绝对值愈小，所代表观测的精度愈高。

根据误差分布定律，以上三种误差有一定数量上的关系，为

$$\left. \begin{aligned} r &= 0.8453t = 0.6745m, \\ t &= 0.7979m = 1.1829r, \\ m &= 1.4826r = 1.2533t. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

当一系列观测的次数 n 相当大时，真误差的分布接近于理想情况，亦即符合误差分布定律。只要知道这三种误差中的任一种，就可以根据 (1.5) 式换算为其他两种，因此这三种误差对于衡量观测的精度具有完全相同的价值。

但是在一般情况下，每列观测的次数不可能很多，因而全列误差的分布也不可能完全符合误差分布定律，这时用中误差来衡量观测的精度，就比较妥当。这是因为中误差比平均误差更能明显地反映出某列观测中出现的个别大的误差。设有两列观测各由 10 次观测所组成，它们的真误差分布情况如下：

第一列 +3, -2, -4, +2, +1, 0, +4, -3, -2, +3

第二列 0, +1, -7, -2, +1, +1, +8, 0, -3, -1

按照(1.4)式得

$$t_1 = \pm 2.4, t_2 = \pm 2.4.$$

也就是說、从平均誤差来看,分不出两列精度上的差別,但从誤差的分布来看,第二列中有两个較大的誤差,显然精度比第一列要低些。如再按(1.3)式分別計算两列观测中誤差,可得

$$m_1 = \pm \sqrt{\frac{72}{10}} = \pm 2.7 \quad m_2 = \pm \sqrt{\frac{130}{10}} = \pm 3.6$$

m_2 大于 m_1 , 表示第二列的精度較低。

至于或然誤差,本来就沒有准确的計算公式。虽然可将真誤差按絕對值大小排列,然后把該列中央的誤差值取为或然誤差的近似值,但当观测次数不多时,用这种方法是极不可靠的。例如有两列观测,各由9次观测所組成,它們的真誤差按絕對值的大小排列如下:

第一列 1.0, 1.2, 2.0, 2.3, 2.5, 2.8, 3.4, 3.5, 4.3

第二列 1.0, 1.3, 2.1, 2.2, 2.5, 3.0, 4.1, 5.0, 6.2

可以看出,两列誤差的中央的誤差值都是2.5,但显然第二列的精度比第一列要低得多。所以要精确地确定或然誤差,只有依靠(1.5)式中或然誤差与中誤差在理論上的关系式,即

$$r = 0.6745m$$

来計算。为了計算或然誤差,必須先計算中誤差,自然不如直接采用中誤差方便。此外,这个关系式既是根据誤差分布定律推出,如果实际誤差的分布不很符合于誤差分布定律,那么它也就不能很准确地代表两种誤差間的关系,因此对于观测次数較少的观测列,尤其沒有采用或然誤差的必要。

尽管如此,由于习惯的影响,目前或然誤差和中誤差仍旧同时

被采用。英美等国多采用或然误差作为精度的标准，而我国、苏联以及欧洲的其他国家，则采用中误差。在本章讨论中，将采用中误差作为观测精度的标准。

3. 观测值函数的中误差 以上我们讨论的对象，限于可以直接进行观测的量，亦即我们所要求的未知量就是观测量的真值。在实际工作中，常常还遇到另外一种情况，就是所要求的未知量不能直接观测，必须通过对观测值的一系列换算而得到，也就是说，未知量是观测值的函数。例如，在上册第一章中我们知道，恒星在上中天时的天顶距与观测地点的地理纬度有一定的关系，因此有一种决定地理纬度的方法，就是由观测已知赤纬的恒星在上中天时的天顶距换算而得。为了衡量这些未知量的精度，我们将进一步讨论怎样从观测值的中误差换算观测值函数的中误差。

现在我们用最简单的函数，逐步推出一般函数的中误差与观测值中误差的关系。

(1) 函数 $z = Kx$ ，其中 K 为一常数， x 为观测值。令 Δz 、 Δx 分别为函数及观测值之真误差，则有

$$z + \Delta z = K(x + \Delta x),$$

$$\Delta z = K \Delta x,$$

如对 x 观测 n 次，可得 n 个关系式：

$$\Delta z_i = K \Delta x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

两端平方后求和，得

$$[\Delta z^2] = K^2 [\Delta x^2]$$

$$\pm \sqrt{\frac{[\Delta z^2]}{n}} = K \left(\pm \sqrt{\frac{[\Delta x^2]}{n}} \right)$$

按照中误差的定义， $\pm \sqrt{\frac{[\Delta z^2]}{n}}$ 即函数 z 的中误差 m_z ，而 $\pm \sqrt{\frac{[\Delta x^2]}{n}}$ 为 x 的中误差 m_x ，所以

$$m_z = K m_x, \quad (1.6)$$

即常数与观测值的乘积的中误差，等于该常数与观测值中误差的乘积。

(2) 函数 $z = x + y$ ，其中 x, y 为两独立观测值。令 $\Delta z, \Delta x, \Delta y$ 分别为 z, x, y 的真误差，则有

$$z + \Delta z = (x + \Delta x) + (y + \Delta y),$$

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y.$$

如对 x 观测 k 次，对 y 观测 n 次，将每一 Δx 与任一 Δy 相加，共可得 kn 个 Δz ，即

$$\Delta z_{ij} = \Delta x_i + \Delta y_j, \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots, k \\ j=1, 2, \dots, n \end{pmatrix}.$$

两端平方后求和，得

$$[\Delta z^2] = n[\Delta x^2] + k[\Delta y^2] + 2[\Delta x][\Delta y],$$

其中 $[\Delta z^2]$ 共包含 kn 项。两端各除以 kn ，得

$$\frac{[\Delta z^2]}{kn} = \frac{[\Delta x^2]}{k} + \frac{[\Delta y^2]}{n} + 2 \frac{[\Delta x]}{k} \frac{[\Delta y]}{n}.$$

根据偶然误差分布的第四个性质，当 k 和 n 相当大时，可以取

$$\frac{[\Delta x]}{k} = 0, \text{ 和 } \frac{[\Delta y]}{n} = 0.$$

所以

$$\frac{[\Delta z^2]}{kn} = \frac{[\Delta x^2]}{k} + \frac{[\Delta y^2]}{n},$$

即

$$m_z^2 = m_x^2 + m_y^2. \quad (1.7)$$

同理，若 $z = x - y$ ，可得

$$\frac{[\Delta z^2]}{kn} = \frac{[\Delta x^2]}{k} + \frac{[\Delta y^2]}{n} - 2 \frac{[\Delta x]}{k} \frac{[\Delta y]}{n},$$

仍有关系

$$m_z^2 = m_x^2 + m_y^2.$$

若 $z = x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \dots \pm x_n$ ，同样可以证得

$$m_z^2 = m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 + \dots + m_{x_n}^2, \quad (1.8)$$