

本书共十章，主要讨论测量平差基本理论和方法、三角测量平差（三、四等三角测量平差为主），各种平差方法在理论上都作了详细的阐述（公式有详细推导过程），在实用计算方法和程序上都作了详细的说明。特别对误差传播的理论在实际中的应用及克吕格分组平差在三角测量中的应用作了比较详细的讨论。

本书内容紧密结合实际，理论阐述浅显易懂，公式推导详尽。

本书此次修订仅作了勘误订正和小量修改。

本书可作为中级测量技术人员自修参考用书。

## 测 量 平 差

（修订本）

哈尔滨冶金测量学校控制测量教研组编

（根据中国工业出版社纸型重印）

测绘出版社出版

北京印刷二厂印刷

新华书店北京发行所发行，各地新华书店经售

\*

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ ·印张 $10^{11/16}$ ·插页 1·字数 287.000

1974年11月北京新一版·1974年11月北京第一次印刷

印数 0001—13600·定价 1.10元

统一书号：15039·新 5

# 毛主席语录

路线是个纲，纲举目张。

鼓足干劲，力争上游，多快好省地建设社会主义。

世界上怕就怕“认真”二字，共产党就最讲“认真”。

在生产斗争和科学实验范围内，人类总是不断发展的，自然界也总是不断发展的，永远不会停止在一个水平上。因此，人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。停止的论点，悲观的论点，无所作为和骄傲自满的论点，都是错误的。

## 序 言

本书共分十章，前三章讲述误差理论，这是学习各种平差方法必要的基础知识。第四章、第六章和第七章分别系统地讲述了三种不同的平差方法，这里仅是一般的严格平差方法，对于近似平差法及一些特殊平差法未一一编入。第五章、第八章、第九章和第十章则讲述在专业方面的应用。

本书理论结合实际，在理论方面，着重于概念的阐述和公式的推导，书中所有的平差公式都是根据最小二乘法原理和误差传播定律导来的。着重阐述理论的目的在于使读者学习本书之后，能够将所学过的理论和方法顺利而正确地运用到实际中去，并便于进一步阅读较深的专业书籍。在实际方面，联系专业多，例题多，对公式的规律性和计算方法都有总结和说明。对于复杂公式之推导过程另用小字排印，阅读时如有困难可略去不看，这并不妨碍对公式的运用。

学习本书，除要具有普通测量的知识外，还需要一定的数学基础，一般具有中学的数学知识就行了。如要学得更好，还必须具有一些微分学的知识，因为书中有些地方曾运用极值定理和泰罗定理。

由于编者水平有限，本书的缺点和错误在所难免，诚恳地希望读者给予指正和批评。

哈尔滨冶金测量学校  
控制测量教研组

# 毛主席语录

路线是个纲，纲举目张。

鼓足干劲，力争上游，多快好省地建设社会主义。

世界上怕就怕“认真”二字，共产党就最讲“认真”。

在生产斗争和科学实验范围内，人类总是不断发展的，自然界也总是不断发展的，永远不会停止在一个水平上。因此，人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。停止的论点，悲观的论点，无所作为和骄傲自满的论点，都是错误的。



## 再 版 说 明

本书1960年由原测绘出版社出版第一版，1964年12月由中国工业出版社出版第二版。无产阶级文化大革命前，曾作为中等专业学校试用教材。经过无产阶级文化大革命，从各地读者和有关学校反映来看，本书比较适合中等测量技术人员自学之用。

根据许多单位和读者希望得到本书的要求，我们组织编者对第二版进行了认真审阅，修改了原书中的差错及不适当的提法，并决定再版发行。

测 绘 出 版 社

1974.7.

## 序 言

本书共分十章，前三章讲述误差理论，这是学习各种平差方法必要的基础知识。第四章、第六章和第七章分别系统地讲述了三种不同的平差方法，这里仅是一般的严格平差方法，对于近似平差法及一些特殊平差法未一一编入。第五章、第八章、第九章和第十章则讲述在专业方面的应用。

本书理论结合实际，在理论方面，着重于概念的阐述和公式的导演，书中所有的平差公式都是根据最小二乘法原理和误差传播定律导来的。着重阐述理论的目的在于使读者学习本书之后，能够将所学过的理论和方法顺利而正确地运用到实际中去，并便于进一步阅读较深的专业书籍。在实际方面，联系专业多，例题多，对公式的规律性和计算方法都有总结和说明。对于复杂公式之导演过程另用小字排印，阅读时如有困难可略去不看，这并不妨碍对公式的运用。

学习本书，除要具有普通测量的知识外，还需要一定的数学基础，一般具有中学的数学知识就行了。如要学得更好，还必须具有一些微分学的知识，因为书中有些地方曾运用极值定理和泰罗定理。

由于编者水平有限，本书的缺点和错误在所难免，诚恳地希望读者给予指正和批评。

哈尔滨冶金测量学校  
控制测量教研组

# 目 录

## 第一章 緒 論

概述 .....	10
§ 1-1. 測量平差的任务及目的 .....	10
§ 1-2. 观测种类 .....	11

## 第二章 观测誤差及最小二乘法原理

概述 .....	13
§ 2-1. 观测誤差的产生及分类 .....	13
一、錯誤 .....	13
二、系統誤差 .....	14
三、偶然誤差 .....	14
§ 2-2. 偶然誤差的性质 .....	15
§ 2-3. 最小二乘法原理 .....	18
一、算术平均值原理 .....	18
二、最小二乘法原理 .....	20

## 第三章 观测精度之鑑定

概述 .....	23
§ 3-1. 鑑定观测精度的尺度 .....	23
一、中誤差 .....	23
二、平均誤差 .....	24
三、或是誤差 .....	25
四、相对誤差 .....	26
五、最大誤差 .....	28
§ 3-2. 誤差传播定律 .....	29
一、观测值的倍数函数 .....	29
二、观测值的和差函数 .....	31
三、观测值的直线函数 .....	35

四、觀測值的任意函數 .....	36
§ 3-3. 偶然誤差及系統誤差之合併影響 .....	39
§ 3-4. 權 .....	40
一、觀測結果的權 .....	40
二、權與中誤差之關係 .....	41
三、單位權 .....	43
四、函數的權 .....	45
習題 .....	47

## 第四章 直接觀測平差

概述 .....	49
4-1. 等精度直接觀測平差 .....	49
一、最或是值 .....	49
二、最或是值中誤差 .....	51
三、觀測值中誤差 .....	52
四、例題 .....	54
§ 4-2. 不等精度直接觀測平差 .....	55
一、最或是值 .....	55
二、最或是值中誤差 .....	57
三、單位權中誤差 .....	58
四、例題 .....	61
習題 .....	63

## 第五章 應用問題

概述 .....	65
§ 5-1. 關於水準測量的幾個問題 .....	65
一、高差之中誤差 .....	65
二、水準路線單位長度的中誤差 .....	66
三、環形水準及附合水準的閉合差限度公式之討論 .....	68
四、水準儀至標尺的距離最大不超過 100 米之理論根據 .....	71
§ 5-2. 關於經緯儀導線測量的幾個問題 .....	72
一、角度觀測的誤差 .....	72

二、鋼尺丈量长度的精度 .....	74
三、閉合多边形导线及附合导线的角度閉合差限度 .....	75
四、測角及量距的誤差对导线端点位置之影响 .....	77
§ 5-3. 关于三角測量的几个問題 .....	81
一、三角形閉合差限度的根据 .....	81
二、菲列罗公式的推导 .....	82
三、全圓測回法两倍照准差变动的范围 .....	83

## 第六章 間接觀測平差

概述 .....	84
§ 6-1. 間接觀測平差的意義 .....	85
§ 6-2. 未知量非线性函数化为线性函数 .....	91
§ 6-3. 导入未知量的近似值 .....	94
§ 6-4. 确定未知量之最或是值 .....	96
一、等精度間接觀測 .....	97
二、不等精度間接觀測 .....	99
三、法方程式系数的計算及檢核 .....	101
四、例題 .....	106
§ 6-5. 解法方程式 .....	109
§ 6-6. 改正数平方和的計算 .....	112
§ 6-7. 法方程式約化的檢核計算 .....	116
§ 6-8. 高斯約化計算表格 .....	119
§ 6-9. 高斯-杜力特尔約化計算表格 .....	121
§ 6-10. 未知量最或是值的中誤差 .....	123
§ 6-11. 未知量最或是值之函数的中誤差 .....	129
§ 6-12. 未知量最或是值及其函数之中誤差的計算 .....	132
§ 6-13. 觀測值中誤差。单位权觀測值中誤差 .....	140
§ 6-14. 例題 .....	141
一、等精度觀測举例 .....	141
二、不等精度觀測举例 .....	146
习題 .....	153

## 第七章 条件观测平差

概述	158
§ 7-1. 条件方程式	158
§ 7-2. 化非线性条件方程式为线性方程式	165
§ 7-3. 确定未知量最或是值	166
一、等精度条件观测	166
二、不等精度条件观测	173
§ 7-4. 改正数平方和的计算	178
§ 7-5. 未知量最或是值之函数的中误差	180
§ 7-6. 未知量最或是值及其函数中误差的计算	184
§ 7-7. 观测值中误差。单位权观测值中误差	191
§ 7-8. 例题	191

## 第八章 条件观测平差在三角测量上的应用

概述	199
§ 8-1. 独立三角网的条件式	200
一、三角形的条件式	200
二、对角线四边形的条件式	201
三、中心点多边形的条件式	205
四、将条件式化为误差方程式	207
五、独立三角网条件数目之计算公式	212
1. 条件总数	212
2. 内角和条件的数目	213
3. 极条件的数目	213
4. 测站条件的数目	215
5. 按方向平差的条件数目	216
§ 8-2. 非独立三角网的条件式	216
一、非独立三角网的条件数目	217
1. 两端都有起算数据的三角网	217
2. 有两条或更多条固定边相连接的三角网	218
3. 被固定边所包围的三角网	218

4. 閉合环三角鎖	220
二、附合条件式及其誤差方程式	220
1. 基线条件和固定边条件	220
2. 方位角条件和固定角条件	222
3. 縱橫坐标条件	223
§ 8-3. 例題	234
习題	238

## 第九章 克呂格分組平差及其应用

概述	240
§ 9-1. 克呂格分組平差	240
一、克呂格分組平差原理	240
二、精度計算	248
§ 9-2. 克呂格分組平差的特例	251
§ 9-3. 克呂格分組平差的应用	260
一、中点多边形及固定角插点的平差	260
二、独立測区单三角鎖的平差	265
三、线形三角鎖平差	268
§ 9-4. 克呂格分組平差的推广——三組平差	273
一、基本原理	273
二、改正数計算	273
三、精度計算	275
§ 9-5. 三組平差的应用	276
§ 9-6. 三組平差应用展开系数法	285
一、基本原理	285
二、精度計算	287
§ 9-7. 三組平差应用展开系数法例題	287

## 第十章 間接觀測平差在三角測量上的应用

概述	298
§ 10-1. 座标平差	299
§ 10-2. 固定四边形的插入一点的座标平差	305
§ 10-3. 座标角平差	310

# 第一章 緒 論

## 概 述

本章主要使初学者明确为什么会有测量平差这一門科学，以及这門科学在测量上的用处；此外，介紹几种不同的观测。这些都是我們学习测量平差时应当了解的。

### § 1-1. 測量平差的任务和目的

一切观测結果都不可能避免产生誤差，这已为实践所証明，故我們永远不能测得一量的真值。产生誤差的原因，主要是由于观测者感觉器官不完善；观测仪器不免有缺陷；以及观测时外界自然条件（空气的溫度、折光、风等等）的变化等影响所致。

对一量观测一次，其值本可确定，但为了求得更可靠的結果，往往作多次观测，于是就有了多余观测。由于对一量作多次观测，发现其互相間总有差別，这就是誤差产生的表現。所以我們观测仅是在某种程度上找出观測量真值的近似值，但从这些互相矛盾的多次观测結果中，究竟以何值作为可靠的最后成果，这就属于平差的問題。

測量平差的主要任务，就是研究观测誤差的基本性质及其积累的規律，研究消除观测結果与理論要求間的矛盾。这个矛盾，必須在能求得最靠近真值的值之前提下来消除，以求得最可靠的結果，而不能随便改变观测結果。（高斯所創立的最小二乘法，就是研究在与各观测值之差的平方和为最小的条件下，求取观測量的最后結果。）因此，根据最小二乘法原理导出的一些平差計算的方法，就可由各观测值求得最靠近真值的值。

測量平差要达到的目的有两个，首先，就是根据各观测值求出未知量最或是值（即最靠近真值的值）；并由各观测值的誤差积累，計算出平差結果的精度，用以鉴定观测质量的好坏。其次，

由于研究了誤差理論及其积累規律，我們又可用一定的計算方法，按照要求而預先規定出觀測結果的允許誤差。这样对指导实际操作和組織測量工作具有重大意义，可作为工作前正确計劃和組織的依据，以便适当地选择作业方法和工具，保證觀測能順利地进行，而其結果又能滿足要求。

## § 1-2. 觀 測 种 类

在測量平差中，將觀測分为以下几种：

一、按觀測量与未知量之間的关系，分为直接觀測和間接觀測。

直接地去确定未知量的觀測，就称为直接觀測。比如，要确定某一角的值，就用經緯仪去直接測定它。

如果确定某未知量，不是直接去觀測它，而是觀測它的函数，这种觀測就称为間接觀測。如图 1-1，設欲确定的未知量是  $x$  ( $\angle AOB$ )、 $y$  ( $\angle BOC$ ) 和  $z$  ( $\angle COD$ )，但觀測的是其函数： $x + y + z$  ( $\angle AOD$ )、 $x + y$  ( $\angle AOC$ ) 和  $y + z$  ( $\angle BOD$ )。

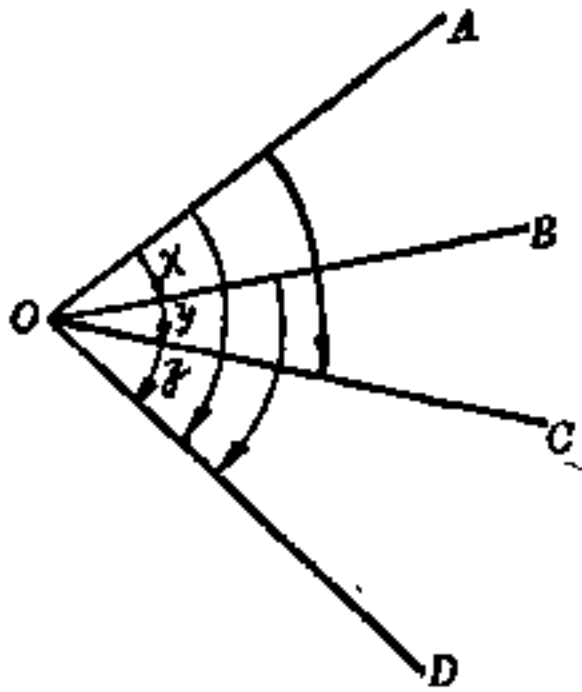


图 1-1

二、按觀測量之間的关系，分为条件觀測和独立觀測。

如果測定的一些觀測量，必須严格滿足于理論上之条件关系。那末，在这种情况下的觀測就称为条件觀測。比如三角形三內角之和应等于  $180^\circ$ ，因此对三角形各角之觀測属于条件觀測。

如果一些觀測量之間无任何关系，在这种情况下的觀測就称为独立觀測。例如只觀測一三角形內任意两个角，这两觀測量之間沒有几何关系存在，像这样的觀測就属于独立觀測。

三、按觀測时所处的条件，分为等精度觀測及不等精度觀測。

在观测中要注意观测结果的质量，观测的质量取决于观测时所处的条件。如一组观测结果是在同样可靠的条件下获得的，其观测质量又认为相同，则这些观测称为等精度观测。

如在一组观测结果中，各个观测结果是在不同的可靠条件下而获得的，其观测质量认为是不相同的，则这些观测称为不等精度观测。

## 第二章 觀測誤差及最小二乘法原理

### 概 述

在这一章中，首先对觀測誤差的种类、性质和处理方法作了歸納性的說明，接着根据偶然誤差（觀測誤差的一种）的性质，以觀測实例导出了最小二乘法原理。最小二乘法原理是处理觀測中既不能避免又不能消除的这个偶然誤差的理論根据，也就是測量平差这一門科学的理論根据。

学习了这一章，讀者就会明白測量平差所处理的誤差是什么样的誤差，以及处理这誤差的理論基础又是什么。这一章是觀測誤差理論的必要知识，又是測量平差的理論基础。

这一章，对具有測量外业知识的讀者來說是很容易理解的，对于还没有具有測量知识的讀者來說，應該积极联系实际，力求在实际工作中去深刻的体会它。

### § 2-1. 觀測誤差的产生及分类

觀測誤差是由于仪器的缺点，觀測者感觉器官不完善和外界条件的变化而产生的。按照觀測誤差的性质和特征，分为錯誤，系統誤差和偶然誤差三种。

#### 一、錯 誤

在觀測时，由于觀測者和記錄者之疏忽大意而出現了誤差，这种誤差属于錯誤。例如量距时讀錯一个分划数；測角記錄时，把分数記为度数等等。这种誤差，只要注意检查就容易发现和避免。因此要求觀測者及記錄者細心操作外，还要注意記錄的检查，务使在外业中完全消除錯誤，以免造成严重的返工。

## 二、系統誤差

在相同的觀測條件下，作一系列的觀測，其誤差常保持同一數值，同一符號，或者隨着觀測條件的不同，其誤差遵循着一定的規律變化，凡具有這種性質的誤差稱為系統誤差。例如用20米長的鋼尺量距，量得之距離為 $S$ ；此尺與標準尺比較結果長（或短） $\alpha$ ，則距離 $S$ 就含有誤差 $\frac{\alpha}{20} S$ 。這種誤差的大小與所測之距離成正比，並且保持同一符號。又如用照準軸不平行於水準軸的水準儀進行高程測量，則標尺讀數的誤差就與水準儀至標尺的距離成正比，也保持同一符號。

這種誤差是由於儀器構造有缺陷或檢查校正不嚴格而產生的。這種誤差的變化具有規律性，因此採用觀測的方法或計算的方法就可以消除。例如測水準時，採取前後視距離相等，就可以消除照準軸不平行於水準軸所引起的標尺讀數誤差對高差的影響；經緯儀測角採取正倒鏡觀測，就可以消除照準軸不垂直於水平軸所產生的誤差對水平角的影響；又如用長度不合標準的鋼尺去量距離所產生的誤差，就可用鋼尺檢定的改正數經過計算加以消除。

此外，系統誤差也有由外界的自然條件和觀測者的影響而產生的。例如空氣溫度變化使鋼尺的長度發生變化，大氣折光對水準測量產生濛氣折光差；又如觀測者照準目標時，習慣把望遠鏡十字絲交點對在目標中央之右側或左側而產生誤差，等等即是。

但是自然條件對觀測之影響，其規律不容易掌握，人的誤差不容易發現，因此除採用一定觀測方法和計算方法以消除或減小其影響外，在觀測時應注意自然條件之變化，以使系統誤差之影響減少到最小。

## 三、偶然誤差

如果觀測誤差在大小（絕對值）和符號（正負）上均不表示出一致性，不能按觀測順序得出一定的規律，這種性質的誤差稱為偶