

湖南省高职高专规划教材

# 应用数学

## 下册

主 审 黄立宏 罗 汉

总 主 编	邓新春								
本册主编	吴跃明	黄鹏辉	黄小红						
副 主 编	孟益民	黄 振							
参 编	汪朝晖	侯新华	魏开明	文益民					
编 委	文益民	王友琼	吴跃明	吴忠怀	吴专保				
	龙辉平	蒋明霞	邓新春	钟 莫	高 鸿				
	黄鹏辉	黄 振	黄小红	侯新华	孟益民				
	汪朝晖	贺战兵	陈 珊	魏开明					

## 内 容 简 介

本书是根据《高职高专高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》来编写的一套高职高专规划教材,全套书共分上、下两册.内容包括函数、极限与连续、微分与导数、一元函数微分学的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、线性代数、概率论与数理统计等14章.书末附有常用数学公式、积分表、部分习题的答案、数学实验等.

本书突出应用,例题、习题丰富,每章末都设有本章小结和自测题,习题分为A类基本题型和B类提高题型,书末附有数学实验,供读者灵活选择.

本书适用于高职高专工科类和经济管理类各专业,也可作为“专升本”考试培训教材,还可作为职业大学、成教和自学考试等系列相应专业的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

应用数学(下册)/邓新春总主编.

—长沙:湖南大学出版社,2006.7

ISBN 7 - 81113 - 065 - 3

I. 应... II. 邓... III. 应用数学—高等学校:技术

学校—教材 IV. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 072059 号

## 应用数学(下册)

Yinayona Shuxue(Xi ce)

总 主 编:邓新春

本册主编:吴跃明 黄鹏辉 黄小红

责任编辑:厉 亚

责任校对:张建平

封面设计:张 毅

出版发行:湖南大学出版社

社 址:湖南·长沙·岳麓山

邮 编:410082

电 话:0731-8821691(发行部) 8821142(编辑室) 8821006(出版部)

传 真:0731-8649312(发行部) 8822264(总编室)

电子邮箱:pressliya@hun.cn

网 址:http://press.hnu.cn

印 装:国防科技大学印刷厂

开本:880×1230 32开

印张:12.75

字数:380千

版次:2006年8月第1版

印次:2006年8月第1次印刷

印数:1~10 000册

书号:ISBN 7-81113-065-3/O·66

定价:40.00元(上册定价20.00元,下册定价20.00元)

版权所有,盗版必究

湖南大学版图书凡有印装差错,请与发行部联系

# 目 次

第九章 向量与空间解析几何	1
第一节 空间直角坐标系与向量的概念	1
一、空间直角坐标系	1
二、向量与向量的线性运算	3
三、向量的坐标表示式	7
第二节 向量的点积与叉积	10
一、向量的点积	10
二、向量的叉积	13
第三节 平面与直线	18
一、点的轨迹方程的概念	18
二、平面	19
三、直线	23
四、平面、直线间的夹角	26
五、点到平面的距离	28
第四节 曲面与空间曲线	29
一、几种常见的曲面及其方程	29
二、二次曲面	34
三、曲线	37
本章小结	39
数学小知识	43
习题九	45
自测题九	49
第十章 多元函数微分学	51
第一节 多元函数的概念、二元函数的极限与连续	51

一、多元函数的概念 .....	51
二、二元函数的极限 .....	54
三、二元函数的连续性 .....	55
第二节 偏导数 .....	56
一、偏导数的概念 .....	56
* 二、偏导数的几何意义 .....	58
三、高阶偏导数 .....	59
第三节 全微分 .....	61
第四节 多元复合函数微分法及偏导数的几何应用 .....	64
一、多元复合函数的微分法 .....	64
二、二元隐函数的求导公式 .....	68
三、偏导数的几何应用 .....	69
第五节 多元函数的极值 .....	74
一、极值与最大值、最小值 .....	74
二、条件极值、拉格朗日乘数法 .....	77
本章小结 .....	79
数学小知识 .....	82
习题十 .....	84
自测题十 .....	86
第十一章 多元函数积分学 .....	89
第一节 二重积分的概念与性质 .....	89
一、二重积分的概念 .....	89
二、二重积分的性质 .....	92
第二节 二重积分的计算 .....	94
一、在直角坐标系下二重积分的计算 .....	94
* 二、在极坐标系下二重积分的计算 .....	99
第三节 二重积分的应用 .....	103
一、体积 .....	103
二、曲面的面积 .....	105

---

* 第四节 平面曲线积分 .....	108
一、对弧长的曲线积分 .....	108
二、对坐标的曲线积分 .....	112
本章小结 .....	116
数学小知识 .....	118
习题十一 .....	119
自测题十一 .....	122
第十二章 级数 .....	124
第一节 无穷级数及其敛散性 .....	124
一、无穷级数的概念 .....	124
二、级数的基本性质 .....	127
三、级数收敛的必要条件 .....	128
第二节 常数项级数的审敛法 .....	129
一、正项级数的审敛法 .....	129
二、交错级数的审敛法 .....	133
三、绝对收敛与条件收敛 .....	134
第三节 幂级数 .....	135
一、幂级数的概念 .....	135
二、幂级数的运算性质 .....	139
三、函数的幂级数展开式 .....	141
* 第四节 傅里叶级数 .....	147
一、三角函数系的正交性 .....	147
二、周期为 $2\pi$ 的周期函数展开成傅里叶级数 .....	148
三、奇函数和偶函数的傅里叶级数 .....	151
本章小结 .....	154
数学小知识 .....	156
习题十二 .....	157
自测题十二 .....	160

第十三章 线性代数	163
第一节 行列式	163
一、二、三阶行列式	163
二、 $n$ 阶行列式的定义、性质和计算	167
三、克莱姆(Cramer)法则	178
第二节 矩阵及其运算	181
一、矩阵的概念	181
二、矩阵的运算	184
第三节 逆矩阵	192
一、逆矩阵的定义	193
二、逆矩阵的性质	193
三、逆矩阵的求法	194
* 第四节 分块矩阵	197
一、分块矩阵的概念	197
二、分块矩阵的加法与数乘	199
三、分块矩阵的乘法	201
四、分块对角矩阵的逆矩阵	202
第五节 矩阵的初等变换	204
一、矩阵的初等变换	204
二、矩阵的秩	206
三、矩阵初等变换求逆矩阵	210
第六节 向量组的线性相关性	211
一、 $n$ 维向量	211
二、向量组的线性相关性	212
三、向量组的秩	217
第七节 线性方程组解的判定与解的结构	222
一、高斯消元法解线性方程组	223
二、线性方程组解的情况判定	228
三、线性方程组解的构成	231
* 四、利用图解法解线性规划问题	235

---

本章小结	241
数学小知识	244
习题十三	246
自测题十三	252
<b>第十四章 概率论与数理统计</b>	<b>254</b>
<b>第一节 随机事件与概率</b>	<b>254</b>
一、随机事件的概念	254
二、随机事件的概率	257
三、条件概率与全概率公式	261
四、事件的相互独立性	263
<b>第二节 随机变量及其数字特征</b>	<b>267</b>
一、随机变量	267
二、几种常见的随机变量的分布	270
三、分布函数	274
* 四、随机变量函数的分布	277
五、期望与方差	280
* <b>第三节 二维随机变量及其分布函数和数字特征</b>	<b>285</b>
一、二维随机变量的联合分布	285
二、二维随机变量的边缘分布	288
三、二维随机变量的期望与方差	291
<b>第四节 统计推断</b>	<b>293</b>
一、总体、样本、统计量	294
二、抽样分布	296
三、参数的点估计	299
四、区间估计	307
五、假设检验	313
* <b>第五节 一元线性回归分析</b>	<b>320</b>
本章小结	334
数学小知识	335

---

习题十四	338
自测题十四	344
习题答案	347
附录 I 数学实验	370
附录 II 标准正态分布数值表	386
附录 III $\chi^2$ 分布的临界值表	388
附录 IV t 分布的临界值表	390
附录 V F 分布的临界值表	391
参考文献	400

## 第九章 向量与空间解析几何

在这一章中,我们首先建立空间直角坐标系,并引进向量的概念,再介绍向量的一些运算,然后以向量为工具来讨论空间的平面和直线,最后介绍一些常见的曲面和曲线.

### 第一节 空间直角坐标系与向量的概念

#### 一、空间直角坐标系

##### 1. 空间直角坐标系

过平面上一点  $O$ , 作两条互相垂直且以点  $O$  为原点的数轴, 就构成了平面直角坐标系. 如果过空间内一定点  $O$ , 作三条互相垂直的数轴, 它们都以  $O$  为原点, 且一般具有相同的长度单位, 就构成一个空间直角坐标系. 轴  $Ox, Oy, Oz$  分别叫横轴、纵轴和竖轴, 统称为坐标轴. 它们的正方向符合右手法则, 即以右手握住  $z$  轴, 当右手的四个手指从  $x$  轴正向以  $\frac{\pi}{2}$  角度转向  $y$  轴正向时, 大拇指的指向就是  $z$  轴的正向 (见图 9-1).

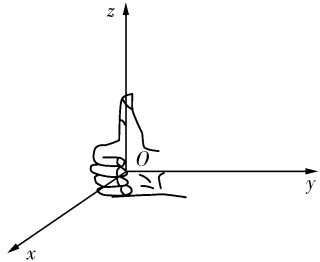


图 9-1

任意两条坐标轴可以确定一个平面, 于是三条坐标轴共确定三个平面, 统称为坐标面, 分别是  $xOy$  面,  $yOz$  面,  $zOx$  面. 它们把整个空间分为八个部分 (见图 9-2), 每个部分称为一个卦限. 在  $xOy$  面的上方有四个卦限, 下方有四个卦限. 以  $x$  轴正半轴,  $y$  轴正半轴,  $z$  轴正半轴为棱的那个卦限称为第 I 卦限, 在  $xOy$  平面上方的其他三个卦限依逆

时针方向依次称为第Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ卦限,对分别位于Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ卦限下面的四个卦限,依次称为第Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ卦限.

取定了空间直角坐标系后,可以建立空间内的点与有序数组之间的对应关系.

设点 $M$ 是空间的一点,过点 $M$ 分别作垂直于 $x$ 轴, $y$ 轴和 $z$ 轴的三个平面,它们与 $x$ 轴, $y$ 轴和 $z$ 轴的交点依次为 $P,Q,R$ (见图9-3).设点 $P,Q,R$ 在三条坐标轴上的坐标依次为 $x,y,z$ ,于是点 $M$ 唯一地确定有序数组 $x,y,z$ .

反过来,已知一个有序数组 $x,y,z$ ,我们可以在 $x$ 轴, $y$ 轴和 $z$ 轴上分别找到以它们为坐标的点 $P,Q,R$ .过这三点分别作垂直于 $x$ 轴, $y$ 轴和 $z$ 轴的平面,由这三个互相垂直的平面得到唯一交点 $M$ .

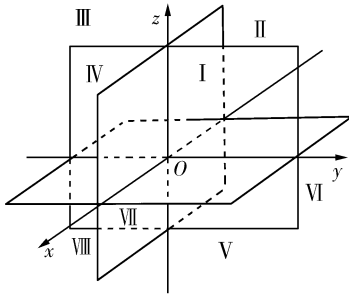


图 9-2

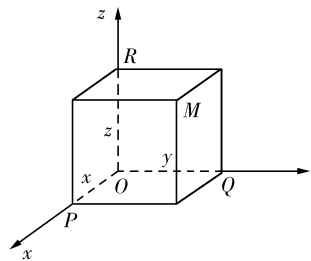


图 9-3

由此可见,空间的点 $M$ 和有序数组 $x,y,z$ 之间存在着一一对应的关系.有序数组 $x,y,z$ 称为点 $M$ 的坐标,又分别称为横坐标,纵坐标和竖坐标.这时点 $M$ 可记作 $M(x,y,z)$ .

显然,原点的坐标为 $O(0,0,0)$ ;  $x$ 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$ ;  $y$ 轴上的点的坐标为 $(0,y,0)$ ;  $z$ 轴上的点坐标为 $(0,0,z)$ ;  $xOy$ 面上的点的坐标为 $(x,y,0)$ ;  $yOz$ 面上的点的坐标为 $(0,y,z)$ ;  $zOx$ 面上的点的坐标为 $(x,0,z)$ .

## 2. 两点间的距离公式

给定空间两点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  和  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . 过点  $M_1$  和  $M_2$  分别作垂直于  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴的平面, 这六个平面围成一个以  $M_1M_2$  为对角线的长方体(见图 9-4). 从图可以看出, 该长方体的各棱长分别为  $|x_2 - x_1|$ ,  $|y_2 - y_1|$ ,  $|z_2 - z_1|$ .

根据立体几何知识, 长方形的对角线的长的平方等于三条棱长的平方和, 于是有

$$|M_1M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

所以点  $M_1$  和  $M_2$  间的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (9.1)$$

特别地, 点  $M(x, y, z)$  到坐标原点  $O(0, 0, 0)$  的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (9.2)$$

**例 1** 在  $z$  轴上求与点  $A(-4, 1, 7)$  和点  $B(3, 5, -2)$  等距离的点.

**解** 因为所求的点  $M$  在  $z$  轴上, 所以设该点为  $M(0, 0, z)$ .

依题意有  $|MA| = |MB|$ , 即

$$\begin{aligned} & \sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} \\ &= \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2}. \end{aligned}$$

两边平方, 解得  $z = \frac{14}{9}$ ,

所以所求的点为  $M(0, 0, \frac{14}{9})$ .

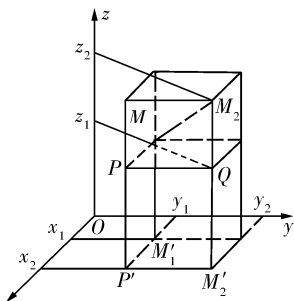


图 9-4

## 二、向量与向量的线性运算

### 1. 向量的概念

在中学物理中我们已经知道, 所遇见的量可分为两种不同类型, 一类是只有大小的量, 如质量、时间、温度、面积等, 称为数量或标量. 另外

一类量,既有大小,又有方向,如速度、加速度、力、位移等,这样的量称为向量或矢量.

向量常用一条带箭头的有向线段来表示,有向线段的长度表示向量的大小,箭头表示向量的方向.有向线段的起点和终点又可分别叫做向量的起点和终点.起点为  $A$ ,终点为  $B$  的向量记作  $\overrightarrow{AB}$  (见图 9-5). 向量也常用一个字母表示,一般用黑体小写字母表示,如  $a, b, c$  等,有时为书写方便也用  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  等表示.

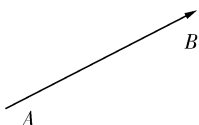


图 9-5

向量的大小称为向量的模. 用  $|\overrightarrow{AB}|, |a|, |b|, |c|$  等表示向量的模. 模为 1 的向量叫做单位向量. 模为零的向量叫做零向量,记作  $0$ . 规定零向量的方向可以是任意的.

这里,我们只研究向量的大小和方向,而不考虑它的起点位置,这种向量称为自由向量. 如果两个向量的模相等,而且方向相同,则两向量相等. 记作  $a=b$ . 即经过平行移动后能完全重合的向量都是相等的,因此又叫共线向量.

方向相同或相反的向量是平行的,记作  $a \parallel b$ . 由于零向量的方向是任意的,可认为零向量与任何向量都平行. 与向量  $a$  的模相同而方向相反的向量叫做  $a$  的负向量,记作  $-a$ .

设给定两个非零向量  $a$  与  $b$ , 将向量  $a$  或  $b$  平移,使它们的起点重合(见图 9-6), 它们所在射线之间的夹角  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) 称为向量  $a$  与  $b$  的夹角,记作  $(\widehat{a, b})$ . 当  $a$  与  $b$  中有一个是零向量时,规定它们的夹角可在  $[0, \pi]$  中任意取值. 如果向量  $a$  与  $b$  平行且方向相同,

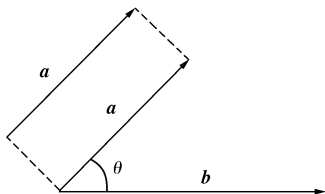


图 9-6

则  $(\widehat{a, b})=0$ , 如果向量  $a$  与  $b$  平行而方向相反,则  $(\widehat{a, b})=\pi$ . 当  $(\widehat{a, b})=\frac{\pi}{2}$  时,就称向量  $a$  与  $b$  垂直,记作  $a \perp b$ .

## 2. 向量的线性运算

### (1) 加法

将向量  $a$  与  $b$  的起点放在一起, 以  $a$  和  $b$  为邻边作平行四边形, 则从起点到对角顶点的向量称为向量  $a$  与  $b$  的和向量, 记为  $a+b$  (见图 9-7).

这种求向量和的方法称为向量加法的平行四边形法则. 由于向量可以平移, 所以, 若把  $b$  的起点放到向量  $a$  的终点上, 则从向量  $a$  的起点到向量  $b$  的终点的向量就是  $a+b$  向量 (见图 9-8). 这种求向量的方法称为向量加法的三角形法则.

三角形法则可以推广到求任意有限个向量  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的和. 自一点  $A_0$  出发, 依次作  $\overrightarrow{A_0A_1}=a_1, \overrightarrow{A_1A_2}=a_2, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n}=a_n$ , 则  $\overrightarrow{A_0A_n}=a_1+a_2+\dots+a_n$ . 如图 9-9 所示,  $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=a+b+c+d$ .

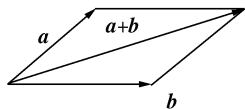


图 9-7

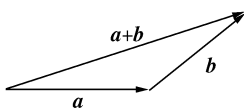


图 9-8

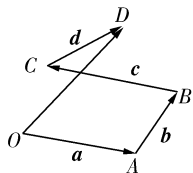


图 9-9

由向量加法的定义可知, 向量的加法满足:

交换律:  $a+b=b+a$ ;

结合律:  $(a+b)+c=a+(b+c)$ .

向量  $a$  与  $-b$  的和称为  $a$  与  $b$  的差, 记作  $a-b$ . 向量的减法也可按三角形法则进行, 只要把  $a$  与  $b$  的起点放在一起,  $a-b$  即是以  $b$  的终点为起点, 以  $a$  的终点为终点的向量 (见图 9-10).

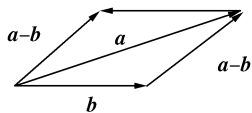


图 9-10

### (2) 向量与数的乘法

实数  $\lambda$  与向量  $a$  的乘积是一个平行于  $a$  的向量, 称为  $\lambda$  与  $a$  的数

乘,记作  $\lambda a$ . 它的模是向量  $a$  的模的  $|\lambda|$  倍,即  $|\lambda a| = |\lambda| |a|$ . 当  $\lambda > 0$  时,  $\lambda a$  与  $a$  的方向相同;当  $\lambda < 0$  时,  $\lambda a$  与  $a$  的方向相反;当  $\lambda = 0$  时,  $\lambda a$  为零向量.

向量与数的乘法满足:

结合律:  $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a = \mu(\lambda a)$ ;

分配律:  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ ,  $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ ;

交换律:  $\lambda a = a\lambda$ .

根据向量与数的乘法的规定,可以得出两个结论:

(1) 两个非零向量  $a$  与  $b$  平行的充要条件是存在实数  $\lambda$ , 使  $a = \lambda b$  或  $b = \lambda a$ .

(2) 设  $a$  是一个非零向量,常把与向量  $a$  同方向的单位向量表示  $a^\circ$ , 则

$$a^\circ = \frac{a}{|a|},$$

或

$$a = |a| a^\circ.$$

向量的加减法,向量与数的乘法统称为向量的线性运算.

例 2 在平行四边形  $ABCD$  中, 设  $\overrightarrow{AB} = a$ ,  $\overrightarrow{AD} = b$ , 试用向量  $a$  和  $b$  表示向量  $\overrightarrow{MA}$ ,  $\overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{MC}$  和  $\overrightarrow{MD}$ , 这里  $M$  是平行四边形对角线的交点.

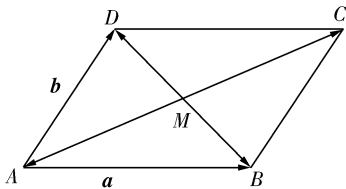


图 9-11

解 由于平行四边形对角线互相平分, 故

$$a + b = 2 \overrightarrow{AM},$$

即  $2 \overrightarrow{MA} = -(a + b)$ ,

于是  $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(a + b)$ ,  $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(a + b)$ .

又因  $b - a = 2 \overrightarrow{MD}$

于是

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(b - a), \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(a - b).$$

### 三、向量的坐标表示式

以原点为起点,以点  $M$  为终点的向量  $\overrightarrow{OM}$  也称为点  $M$  的向径,记作  $r(M) = \overrightarrow{OM}$  (见图 9-12).

由图 9-12 可见,向量

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM_1} + \overrightarrow{M_1M} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.\end{aligned}$$

在坐标轴上分别与  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴方向相同的单位向量称为基本单位向量,分别用  $i, j, k$  表示.

设点  $M$  的坐标是  $(x, y, z)$ , 则向量  $\overrightarrow{OP} = xi, \overrightarrow{OQ} = yj, \overrightarrow{OR} = zk$ .

于是

$$r(M) = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk, \quad (9.3)$$

式(9.3)称为向量  $\overrightarrow{OM}$  的坐标表示式  $x, y, z$  亦称为向量  $\overrightarrow{OM}$  的坐标,可简记为

$$\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}. \quad (9.4)$$

利用向量的坐标,可得向量的加法、减法以及向量与数量的乘积的运算如下:

设  $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ ,

即  $\mathbf{a} = a_x i + a_y j + a_z k, \mathbf{b} = b_x i + b_y j + b_z k$ ,

则有  $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x) i + (a_y \pm b_y) j + (a_z \pm b_z) k$

$$= \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}; \quad (9.5)$$

$\lambda \mathbf{a} = \lambda a_x i + \lambda a_y j + \lambda a_z k = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$ ; ( $\lambda$  为实数)  $(9.6)$

$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$ ;  $(9.7)$

$\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ .  $(9.8)$

在式(9.8)中,当分母为零时,规定分子也为零.

若向量  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  是以点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  为起点,以点  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  为终点,则  $\overrightarrow{OM_1} = \{x_1, y_1, z_1\}, \overrightarrow{OM_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$ ,由图 9-13 可知,

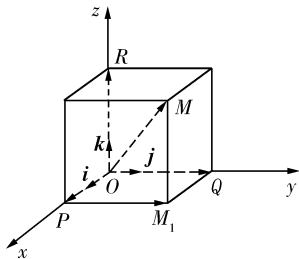


图 9-12

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \\ &= \{x_2, y_2, z_2\} - \{x_1, y_1, z_1\},\end{aligned}$$

故 
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}. \quad (9.9)$$

任给向量  $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ , 作向量  $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a}$ , 则向量  $\mathbf{a}$  的模就是点  $M(a_x, a_y, a_z)$  到原点的距离, 由两点距离公式知

$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (9.10)$$

为了表示向量的方向, 我们引入方向角的概念. 称非零向量  $\mathbf{a}$  与三条坐标轴的正向的夹角  $\alpha, \beta, \gamma$  叫做向量  $\mathbf{a}$  的方向角, 并规定  $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$ . 方向角的余弦  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  称为向量  $\mathbf{a}$  的方向余弦. (见图 9-14) 容易推得

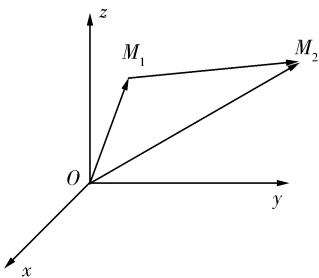


图 9-13

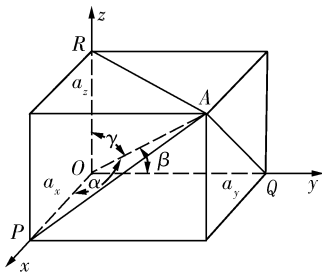


图 9-14

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \end{cases} \quad (9.11)$$

显然 
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (9.12)$$

因此, 非零向量  $\mathbf{a}$  的单位向量

$$\mathbf{a}^\circ = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}. \quad (9.13)$$

例 3 已知  $A(-1, 1, 3), B(2, 1, 0)$ , 求向量  $\overrightarrow{AB}$  的模、方向余弦及

与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量.

解 由题意,得

$$\overrightarrow{AB} = \{2 - (-1), 1 - 1, 0 - 3\} = \{3, 0, -3\},$$

故

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \beta = \frac{0}{3\sqrt{2}} = 0, \quad \cos \gamma = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由式(9.13)知,与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量为

$$\overrightarrow{AB}^{\circ} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

例 4 设向量  $a$  的方向角  $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma$  为锐角,且  $|a| = 2$ ,求向量  $a$  的坐标表示式.

解 因为

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \gamma = 1,$$

于是有

$$\cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\gamma \text{ 是锐角, 负的舍去}),$$

故

$$a_x = |a| \cos \alpha = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2},$$

$$a_y = |a| \cos \beta = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$a_z = |a| \cos \gamma = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2},$$

所以,向量  $a$  的坐标表达式为

$$a = \{\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}.$$

例 5 已知向量  $a = \{2, \beta, 1\}$  与  $b = \{-1, 3, -\gamma\}$  平行,求  $\beta, \gamma$  的值.

解 因为  $a // b$ ,故由式(9.8),得

$$\frac{2}{-1} = \frac{\beta}{3} = \frac{1}{-\gamma},$$