湖南省高职高专规划教材

应 用 数 学

下册

主 审 黄立宏 罗 汉

总 主 编 邓新春
本册主编 吴跃明 黄鹏辉 黄小红
副 主 编 孟益民 黄 振
参 编 汪朝晖 侯新华 魏开明 文益民
编 委 文益民 王友琼 吴跃明 吴忠怀 吴专保
龙辉平 蒋明霞 邓新春 钟 莫 高 鸿
黄鹏辉 黄 振 黄小红 侯新华 孟益民
汪朝晖 贺战兵 陈 珊 魏开明

内 容 简 介

本书是根据《高职高专高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》来编写的一套高职高专规划教材，全套书共分上、下两册. 内容包括函数、极限与连续、微分与导数、一元函数微分学的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、线性代数、概率论与数理统计等14 章. 书末附有常用数学公式、积分表、部分习题的答案、数学实验等.

本书突出应用，例题、习题丰富，每章末都设有本章小结和自测题，习题分为 A 类基本题型和 B 类提高题型，书末附有数学实验，供读者灵活选择.

本书适用于高职高专工科类和经济管理类各专业，也可作为"专升本"考试培训教材，还可作为职业大学，成教和自学考试等系列相应专业的教材或参考书.

图书在版编目（CIP）数据
应用数学（下册）/邓新春总主编.
—长沙：湖南大学出版社，2006.7
ISBN 7-81113-065-3
Ⅰ.应… Ⅱ.邓… Ⅲ.应用数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.O29
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 072059 号

应用数学（下册）
Yinayona Shuxue（Xi ce）

总 主 编：邓新春　　本册主编：吴跃明　黄鹏辉　黄小红
责任编辑：厉　亚　　责任校对：张建平
封面设计：张　毅
出版发行：湖南大学出版社
社　　址：湖南·长沙·岳麓山　　邮　　编：410082
电　　话：0731－8821691（发行部），8821142（编辑室），8821006（出版部）
传　　真：0731－8649312（发行部），8822264（总编室）
电子邮箱：pressliya@hun.cn
网　　址：http://press.hnu.cn
印　　装：国防科技大学印刷厂
开本：880×1230　32 开　　印张：12.75　　字数：380 千
版次：2006 年 8 月第 1 版　　印次：2006 年 8 月第 1 次印刷　　印数：1～10 000 册
书号：ISBN 7－81113－065－3/O·66
定价：40.00 元（上册定价：20.00 元，下册定价：20.00 元）

目　　次

第九章　向量与空间解析几何

在这一章中,我们首先建立空间直角坐标系,并引进向量的概念,再介绍向量的一些运算,然后以向量为工具来讨论空间的平面和直线,最后介绍一些常见的曲面和曲线.

第一节　空间直角坐标系与向量的概念

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

过平面上一点 O,作两条互相垂直且以点 O 为原点的数轴,就构成了平面直角坐标系. 如果过空间内一定点 O,作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点,且一般具有相同的长度单位,就构成一个空间直角坐标系. 轴 Ox,Oy,Oz 分别叫横轴、纵轴和竖轴,统称为坐标轴. 它们的正方向符合右手法则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴正向以$\frac{\pi}{2}$角度转向 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向(见图 9－1).

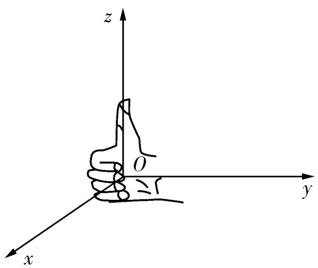

图 9－1

任意两条坐标轴可以确定一个平面,于是三条坐标轴共确定三个平面,统称为坐标面,分别是 xOy 面,yOz 面,zOx 面. 它们把整个空间分为八个部分(见图 9－2),每个部分称为一个卦限. 在 xOy 面的上方有四个卦限,下方有四个卦限. 以 x 轴正半轴,y 轴正半轴,z 轴正半轴为棱的那个卦限称为第 Ⅰ 卦限,在 xOy 平面上方的其他三个卦限依逆

时针方向依次称为第Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限，对分别位于Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限下面的四个卦限，依次称为第Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限.

取定了空间直角坐标系后，可以建立空间内的点与有序数组之间的对应关系.

设点 M 是空间的一点，过点 M 分别作垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴的三个平面，它们与 x 轴，y 轴和 z 轴的交点依次为 P，Q，R（见图 9－3）. 设点 P，Q，R 在三条坐标轴上的坐标依次为 x，y，z，于是点 M 唯一地确定有序数组 x，y，z.

反过来，已知一个有序数组 x，y，z，我们可以在 x 轴，y 轴和 z 轴上分别找到以它们为坐标的点 P，Q，R. 过这三点分别作垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴的平面，由这三个互相垂直的平面得到唯一交点 M.

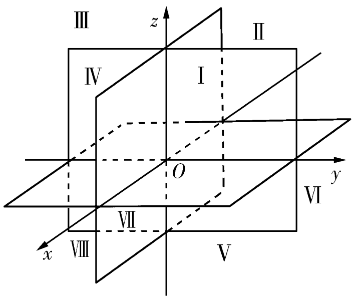

图 9－2

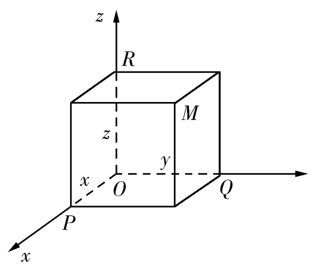

图 9－3

由此可见，空间的点 M 和有序数组 x，y，z 之间存在着一一对应的关系. 有序数组 x，y，z 称为点 M 的坐标，又分别称为横坐标，纵坐标和竖坐标. 这时点 M 可记作 $M(x,y,z)$.

显然，原点的坐标为 $O(0,0,0)$；x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$；y 轴上的点的坐标为 $(0,y,0)$；z 轴上的点坐标为 $(0,0,z)$；xOy 面上的点的坐标为 $(x,y,0)$；yOz 面上的点的坐标为 $(0,y,z)$；zOx 面上的点的坐标为 $(x,0,z)$.

2. 两点间的距离公式

给定空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$. 过点 M_1 和 M_2 分别作垂直于 x 轴, y 轴, z 轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(见图 9－4). 从图可以看出, 该长方体的各棱长分别为

$|x_2-x_1|$, $|y_2-y_1|$, $|z_2-z_1|$.

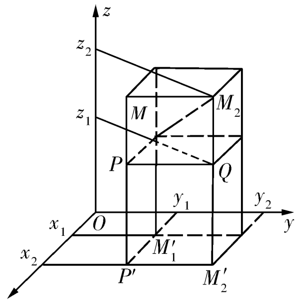

图 9－4

根据立体几何知识, 长方形的对角线的长的平方等于三条棱长的平方和, 于是有

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

所以点 M_1 和 M_2 间的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{9.1}$$

特别地, 点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{9.2}$$

例 1　在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解　因为所求的点 M 在 z 轴上, 所以设该点为 $M(0,0,z)$.

依题意有 $|MA|=|MB|$, 即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}.$$

两边平方, 解得

$$z=\frac{14}{9},$$

所以所求的点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

二、向量与向量的线性运算

1. 向量的概念

在中学物理中我们已经知道, 所遇见的量可分为两种不同类型, 一类是只有大小的量, 如质量、时间、温度、面积等, 称为数量或标量. 另外

一类量，既有大小，又有方向，如速度、加速度、力、位移等，这样的量称为向量或矢量.

向量常用一条带箭头的有向线段来表示，有向线段的长度表示向量的大小，箭头表示向量的方向. 有向线段的起点和终点又可分别叫做向量的起点和终点. 起点为 A，终点为 B 的向量记作 $\overrightarrow{AB}$（见图 9－5）. 向量也常用一个字母表示，一般用黑体小写字母表示，如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 等，有时为书写方便也用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 等表示.

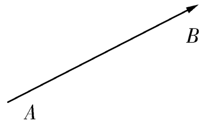

图 9－5

向量的大小称为向量的模. 用 $|\overrightarrow{AB}|$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{c}|$ 等表示向量的模. 模为 1 的向量叫做单位向量. 模为零的向量叫做零向量，记作 $\boldsymbol{0}$. 规定零向量的方向可以是任意的.

这里，我们只研究向量的大小和方向，而不考虑它的起点位置，这种向量称为自由向量. 如果两个向量的模相等，而且方向相同，则两向量相等. 记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 即经过平行移动后能完全重合的向量都是相等的，因此又叫共线向量.

方向相同或相反的向量是平行的，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的，可认为零向量与任何向量都平行. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

设给定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，将向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的起点重合（见图 9－6），它们所在射线之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量时，规定它们的夹角可在 $[0,\pi]$ 中任意取值. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行且方向相同，则 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行而方向相反，则 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$. 当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$ 时，就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

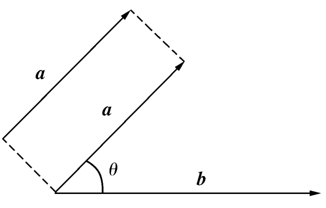

图 9－6

2. 向量的线性运算

(1)**加法**

将向量 a 与 b 的起点放在一起,以 a 和 b 为邻边作平行四边形,则从起点到对角顶点的向量称为向量 a 与 b 的和向量,记为 $a+b$(见图 9－7).

这种求向量和的方法称为向量加法的平行四边形法则. 由于向量可以平移,所以,若把 b 的起点放到向量 a 的终点上,则从向量 a 的起点到向量 b 的终点的向量就是 $a+b$ 向量(见图 9－8). 这种求向量的方法称为向量加法的三角形法则.

三角形法则可以推广到求任意有限个向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的和. 自一点 A_0 出发,依次作 $\overrightarrow{A_0A_1}=\boldsymbol{a}_1$, $\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$,则 $\overrightarrow{A_0A_n}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$. 如图 9－9 所示,$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$.

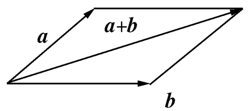

图 9－7

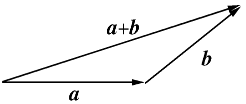

图 9－8

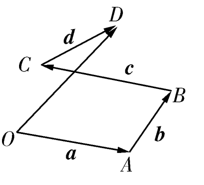

图 9－9

由向量加法的定义可知,向量的加法满足:

交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

向量 a 与 $-b$ 的和称为 a 与 b 的差,记作 $a-b$. 向量的减法也可按三角形法则进行,只要把 a 与 b 的起点放在一起,$a-b$ 即是以 b 的终点为起点,以 a 的终点为终点的向量(见图 9－10).

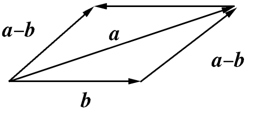

图 9－10

(2)**向量与数的乘法**

实数 λ 与向量 a 的乘积是一个平行于 a 的向量,称为 λ 与 a 的数

乘，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 它的模是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

向量与数的乘法满足：

结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$；

分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

交换律：$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\lambda$.

根据向量与数的乘法的规定，可以得出两个结论：

(1)　两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是存在实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

(2)　设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，常把与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量表示 $\boldsymbol{a}^{\circ}$，则

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},$$

或

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}.$$

向量的加减法，向量与数的乘法统称为向量的线性运算.

例 2　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点.

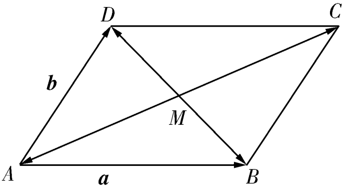

图 9－11

解　由于平行四边形对角线互相平分，故

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{AM},$$

即
$$2\overrightarrow{MA}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

于是
$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

又因
$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=2\overrightarrow{MD}$$

于是

$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

三、向量的坐标表示式

以原点为起点，以点 M 为终点的向量$\overrightarrow{OM}$也称为点 M 的向径，记作$\boldsymbol{r}(M)=\overrightarrow{OM}$（见图 9－12）.

由图 9－12 可见，向量

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM_1}+M_1M\\&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.\end{aligned}$$

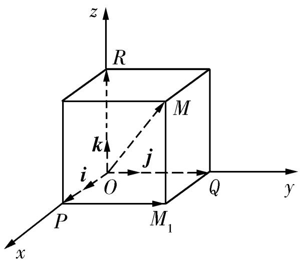

图 9－12

在坐标轴上分别与 x 轴，y 轴，z 轴方向相同的单位向量称为基本单位向量，分别用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 表示.

设点 M 的坐标是(x,y,z)，则向量$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$.

于是

$$\boldsymbol{r}(M)=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k},\tag{9.3}$$

式(9.3)称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示式 x，y，z 亦称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标，可简记为

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}.\tag{9.4}$$

利用向量的坐标，可得向量的加法、减法以及向量与数量的乘积的运算如下：

设　$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，

即　$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}\\&=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\};\end{aligned}\tag{9.5}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\};(\lambda\ \text{为实数})\tag{9.6}$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x=b_x,a_y=b_y,a_z=b_z;\tag{9.7}$$

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.\tag{9.8}$$

在式(9.8)中，当分母为零时，规定分子也为零.

若向量$\overrightarrow{M_1M_2}$是以点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$为起点，以点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$为终点，则$\overrightarrow{OM_1}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\overrightarrow{OM_2}=\{x_2,y_2,z_2\}$，由图 9－13 可知，

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$
$$=\{x_2,y_2,z_2\}-\{x_1,y_1,z_1\},$$

故
$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}. \tag{9.9}$$

任给向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，作向径$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的模就是点 $M(a_x,a_y,a_z)$到原点的距离，由两点距离公式知

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{9.10}$$

为了表示向量的方向，我们引入方向角的概念. 称非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴的正向的夹角 α,β,γ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，并规定 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$. 方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.（见图 9－14）容易推得

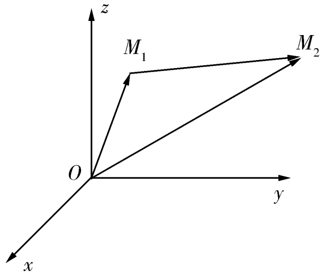

图 9－13

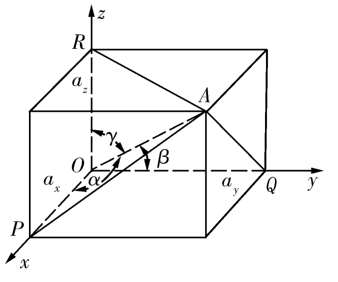

图 9－14

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\[2ex]\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\[2ex]\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.\end{cases} \tag{9.11}$$

显然
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{9.12}$$

因此，非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}. \tag{9.13}$$

例 3　已知 $A(-1,1,3)$，$B(2,1,0)$，求向量$\overrightarrow{AB}$的模、方向余弦及

与$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量.

解　由题意,得

$$\overrightarrow{AB}=\{2-(-1),1-1,0-3\}=\{3,0,-3\},$$

故

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+0^2+(-3)^2}=3\sqrt{2},$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\beta=\frac{0}{3\sqrt{2}}=0,\quad \cos\gamma=\frac{-3}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由式(9.13)知,与$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量为

$$\overrightarrow{AB}^{\circ}=\{\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\}.$$

例 4　设向量 a 的方向角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,$\beta=\frac{\pi}{2}$,γ 为锐角,且 $|\boldsymbol{a}|=2$,求向量 a 的坐标表示式.

解　因为

$$\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{2}+\cos^2\gamma=1,$$

于是有

$$\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\gamma\text{ 是锐角,负的舍去}),$$

故

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2},$$

$$a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta=2\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma=2\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2},$$

所以,向量 a 的坐标表达式为

$$\boldsymbol{a}=\{\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}.$$

例 5　已知向量 $\boldsymbol{a}=\{2,\beta,1\}$与 $\boldsymbol{b}=\{-1,3,-\gamma\}$平行,求 β,γ 的值.

解　因为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$,故由式(9.8),得

$$\frac{2}{-1}=\frac{\beta}{3}=\frac{1}{-\gamma},$$