魏文展，男，1952年5月生，广西桂林市人，理学博士，教授，硕士研究生导师，享受国务院政府特殊津贴。现任广西经贸职业技术学院院长，自治区科协委员，广西数学学会副理事长。

主要成果：完成2项国家自然科学基金项目和4项广西科学基金项目的研究工作。并获广西科学技术进步奖二等奖两项、三等奖一项。在《科学通报》、《数学物理学报》、《数学杂志》等国家核心期刊上发表论文60余篇，其中《复空间的PL一致凸性及其鞅刻划》获1998年广西自然科学优秀学术论文一等奖。

主编教材两部，其中《文科高等数学基础（B）——数学思想和方法》获得广西高校优秀教材一等奖。主持完成的广西新世纪教改工程项目“面向新世纪高师大学生数学素质培养的探索与实践”获2005年广西壮族自治区优秀教学成果二等奖 。

序

在过去的一个世纪里，数学理论的研究和应用取得了巨大的成就。它作为整个科学技术基础的地位比以往任何时代都更加牢固。数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并且越来越直接地为人类的生产与生活作出贡献。每一个有文化知识的人都会认识到，不论他从事何种职业，都需要学习和掌握一定的数学知识去解决他面临的问题。诚如拉奥（A. N. Rao）所说，“一个国家的科学水平可以用它消耗的数学来度量”。同样的，在当今信息社会里，一个人运用数学的能力（不光是理论知识和计算能力，包括计算机的使用等）已经成为个人素质的表征。总之，数学作为一种文化已成为人类文明进步的标志。

然而人们对于数学了解和认识究竟有多少？比如究竟什么是数学？为什么说它那么重要？数学和数学研究有什么特点？数学的发展历史怎样？近代数学中是如何处理有限和无限的？数学中是否存在矛盾？当今数学为人们普遍关心的疑难问题是什么样的？应该如何学习数学以及数学教育应该怎样改革？如何让数学走出象牙塔，走向大众？等等。

《文化的数学》实际上就是《作为文化的数学》，本书试图为人们解答这些问题。数学文化是近年来出现的新词语，不少的学者已经著书立说，对数学文化进行了多层面、多角度的阐释。应该说狭义的“数学文化”主要是指数学的内容，数学的思想、方法、体系及其演变；广义的“数学文化”要包含数学的历史、数学家及其流派、数学的哲学审美和艺术审美、数学与各种文化的关系、数学教育等。这种文化是人类总体物质财富和精神财富的积淀在数学上的表现。本书是就后一种含义加以阐释的。既然是作为文化，那就不仅仅是技术层面和工具层面上的东西，尤其要注重以下几个方面的工作：第一，展现数学的起源与发展；第二，数学思想方法的提炼和升华；第三，重视数学的应用；第四，重视数学素质的培养；第五，让数学更广泛地走向生活，走向大众。本书运用历史的、比较的方法阐释了作为文化的数学的内涵，试图为广大读者提供全新的观察视角，以俯瞰现代数学的发展概貌，领略数学文化的丰采。在多层次的介绍数学发展的同时，启发读者对数学的积极思考。另外，本书选材广泛而且生活化，内容趣味性强，既适宜作为教材又适宜作为科普读物并且颇具可读性。

如何将数学文化发扬光大，《文化的数学》是一种尝试。相信它在普及数学知

识，提高数学素质，推动数学课程改革乃至促进数学教育的改革上会起到积极的作用。我想这也是作者们的初衷吧！

教 授
博士生导师
武汉大学数学研究所所长
刘培德
2007.8

前　言

多数人在中小学甚至大学都学过数学。尽管如此，有些学生和成年人越来越害怕甚至厌恶数学。他们对数学的认识仅仅局限于简单的计算和一些基本的日常生活应用，数学似乎就是一些解题技巧或深奥数学理论的集合。而且，很多人也都相信数学是固定的真理的集合，是永恒不变的定理的集合。实际上，数学也像其他事物一样，是由固定部分和可变部分组成的。如学校数学就基本是早已固定了的部分。然而，变动着的部分却鲜为人知。虽然数学的固定部分相当稳定，其可变部分却同样具有极强的可变性。如对欧几里得平行公理的不同阐释导致非欧几何的诞生。因此，数学本身也是发展的，它不但具有固定性特征，也具有可变性。这对我们客观地理解数学具有重要意义。

更重要地，数学不仅是人类文化的组成部分，而且作为一种独立的文化已经融入了现代人的生活。对所有人来说，数学是一种思维方式、研究方法、推理方法。保存和发展这种独特的文化元素是学校教育的重要任务。如果狭义地理解，数学文化即是指数学的思想、精神、方法、观点、语言以及它的形成和发展；那么，广义地说，数学文化还包括数学发展史、数学美学、数学教育、数学与人文、数学与文化之间的关系等。事实上与其他诸多文化现象相比，数学文化因国家不同而出现的差异更小。因而，数学文化更具国际性。

在传统的数学教育中，由于过于注重知识传授不重思想渗透，重计算不重推理，重结论不重过程，过于注重数学常规能力的传授，使得大多数学生对数学的思想和精神了解不深，对数学的宏观认识和总体把握较差，数学教学有时竟变成空洞的解题训练。即使是高等数学教学也存在类似的问题。于是，数学成了最枯燥乏味的学科。同时，我国的数学教育还存在片面追求功利性的弊端。

为了进一步提高人们对数学的正确认识，提升学生的数学文化修养，使人们能够进一步了解数学文化，并将其作为一种独特的文化现象重新审视，我们组织编写了这本教材。该书是一本贯通素质教育的桥梁，科学精神、人文精神与爱国主义汇聚于此。本书涉及的数学知识难度适中，并以数学发展为主线，以开阔各专业学生的数学视野。本书可以作为高等院校各专业的公共选修课教材，也可以作为数学专业的公共必修课教材，还可以作为推广数学文化的科普读物。

本书由魏文展教授担任主编，黄旭广担任副主编。由魏文展教授确立编写大纲及任务分工。本书共分为8章，另含一个附录。其中，陆东珍负责第一、三、七章的编写；颜秀芬负责第二、四、六章的编写；黄旭广负责第五、八章的编写；吴严负责附录的编写。全书由黄旭广统稿，最后由魏文展教授审定。在编写过程中，本书得

到全国高校素质教育教材研究编审委员会和广西经贸职业技术学院的大力支持。同时，本教材的编写引用了大量国内外专家、同行的研究成果，在此，我们一并表示感谢。

由于水平有限，疏漏在所难免，所引用的文献资料没有一一列举，也希望各位专家、同行多多见谅并不吝赐教！

编者

2007年4月8日

目　　录

第一章　几个著名的数学问题

第一节　四色问题

上幼儿园的时候，我们都画过漂亮的五瓣小花。现在，让我们拿出一张白纸，准备好彩笔，一起来画一朵美丽的五瓣小花。这里，有一个小小的要求，在小花的任何两个相邻的部分不允许涂同一种颜色，必须用两种不同的颜色来涂这两个相邻的部分。那么五个花瓣加上花蕊你最少能用几种颜色涂完它们呢？如果在一张纸上任意画若干个相邻的区域，仍然要求任何两个相邻的区域不允许涂同一种颜色，最少需要几种颜色？

实际上，不论是一朵要求用两种不同的颜色来涂两个相邻部分的五瓣小花，还是一张地图，即使图上任意分成许多部分，而且要求有共同边界的两部分涂不同颜色，最少只要四种颜色就够了。事实上，这些都是“四色问题”。

四色问题又称四色猜想，是世界近代三大数学难题之一。

一、什么是四色问题

四色问题的内容可以这样描述：“任何一张地图只用四种颜色就能使具有共同边界的国家着上不同的颜色”。用数学语言表示，即“将平面任意地细分为不相重叠的区域，每一个区域总可以用1、2、3、4这四个数字之一来标记，而不会使相邻的两个区域得到相同的数字。”（见图1－1）

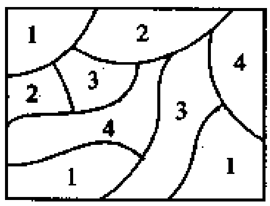

图1－1

这里所指的相邻区域，是指有一整段边界是公共的。如果两个区域只相遇于一点或有限多点，就不叫相邻的。因为用相同的颜色给它们着色不会引起混淆。

你有没有注意过：一张世界地图，除去海洋，总共用了几种颜色？答案是：四种（当然，现在的地图较花哨，用色可能不只四种颜色）。这就是说，虽然全世界有两百

多个国家，在地图上只要四种颜色就可以将其标识出来！

其实，任何一张平面或球面的地图，如果相邻的两个国家（前提是每个国家在地图上必须是一个连通区域）必须涂上不同的颜色以便划清边界，则至多只要四种颜色就搞定了，不管这张地图有多么奇特复杂。

二、发现者

四色问题源自于英国。1852 年，毕业于英国伦敦大学的佛朗西斯·格里斯（Francis Guthrie）来到一家科研单位搞地图着色工作时，发现了一种有趣的现象："看来，每幅地图都可以用四种颜色着色，使得有共同边界的国家着上不同的颜色。"然而，这个结论能不能从数学上加以严格证明呢？佛朗西斯写信向他的弟弟佛德雷克·格里斯（Frederick Guthrie）询问。佛德雷克的数学造诣颇深，他为证明这一问题用了一大叠的稿纸，可是研究工作却没有进展。

1852 年 10 月 23 日，佛德雷克就这个问题的证明请教他的老师、著名数学家摩根（Morgan，1806～1871 年）。摩根怀着浓厚的兴趣，对此苦苦思索了几个昼夜，仍然觉得不得要领。于是写信向自己的好友、著名数学家哈密尔顿（Hamilton，1805～1865 年）爵士请教，希望他要么证明这个说法是正确的，要么就举一个反例，建构出一张需要 5 种颜色的地图来。

哈密尔顿接到摩尔根的信后，对四色问题开始进行论证。大师级的哈密尔顿耗了 13 年心血，仍一筹莫展，直到 1865 年抱憾而逝。

三、公开征答

1878 年，英国当时著名的数学家凯莱（Cayley，1821～1895 年）正式向伦敦数学学会提出了这个问题，取名为"四色猜想"。并于次年在英国皇家地理会刊的创刊号上，公开征求对"四色猜想"的解答。于是，"四色猜想"成了世界数学界关注的问题。

1879 年和 1880 年，著名的律师兼数学家肯普（Kempe）和泰勒（Tait）分别提交了证明四色猜想的论文，宣布证明了四色定理，大家都认为四色猜想从此也就解决了。轰动一时的热度终于平息。

肯普的证明是这样的：首先指出如果没有一个国家包围其他国家，或没有三个以上的国家相遇于一点，这种地图就说是"正规的"（见图 1－2 左），否则为非正规地图（见图 1－2 右）。一张地图往往由正规地图和非正规地图联系在一起，但非正规地图所需颜色种数一般不超过正规地图所需颜色，如果有一张需要五种颜色的地图，那就是指它的正规地图是五色的。要证明四色猜想成立，只要证明不存在一张正规五色地图就足够了。

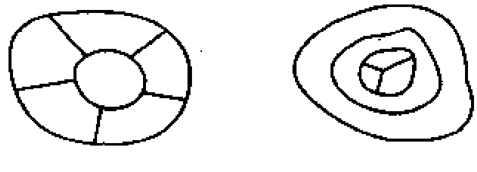

图 1－2

肯普是用归谬法来证明的。大意是，如果有一张正规的五色地图，就会存在一张国数最少的“极小正规五色地图”，如果极小正规五色地图中有一个国家的邻国数少于六个，就会存在一张国数较少的正规地图仍为五色的，这样一来就不会有极小五色地图的国数，也就不存在正规五色地图了。这样，肯普就认为他已经证明了“四色问题”，但是后来人们发现他错了。

不过，肯普的证明阐明了两个重要的概念，对以后问题的解决提供了途径。第一个概念是“不可避免构形集”。他证明了在每一张正规地图中至少有一国具有两个、三个、四个或五个邻国，不存在每个国家都有六个或更多个邻国的正规地图。也就是说，由两个邻国、三个邻国、四个或五个邻国组成的一组“构形”是不可避免的，每张地图至少含有这四种构形中的一个（见图 1－3）。

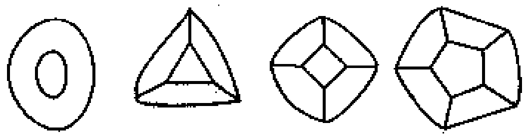

图 1－3

肯普提出的另一个概念是“可约”性，即如果某种特定的构形在需用五种颜色着色的最小正则地图中出现，就可以减少地图中的国家数而导致如下的矛盾：需用五种颜色着色的正则地图包含的国家比最小正则地图还要少。这样一来，只要能够证明不可避免构形集中每一个构形都是可约的，四色定理就得到了证明。肯普证明了只要五色地图中有一国具有四个邻国，就会有国数减少的五色地图。肯普的证明之所以失败，就在于他的可约性证明对于其不可避免构形集中的四个构形之一不能成立。

自从引入“构形”、“可约”概念后，人们逐步发展了检查构形以决定是否可约的一些标准方法。能够寻求可约构形的不可避免组，是证明“四色问题”的重要依据。但要证明大的构形可约，需要检查大量的细节，这是相当复杂的。

11 年后，即 1890 年，在牛津大学就读的年仅 29 岁的赫伍德（Heawood）以自己的精确计算指出了肯普在证明中的错误。消息一经传出，这个沉熄了 10 年之久的问题，又重新燃起了熊熊烈火！与此同时，赫伍德成功证明了用五种颜色能够区分地球上相邻的国家。

同时，泰勒的论文亦被陆陆续续发现多处错误，甚至最后一个错误一直到 1946 年才被发现。从这里我们可看出，这些人的研究精神是多么可敬，被发现错误的东西并未被弃之如敝屣般丢在一旁，仍旧不断有人去研究它，甚至是在事隔半个多世纪之后。

当然，肯普和泰勒这两篇错误的论文在数学上仍然有其贡献，不可小觑。

四、绝路逢生

几经风雨，四色问题更加受到瞩目。由于赫伍德的“五色定理”的证明并不难，因此就有许多人也小看了“四色问题”的难度。最有趣的是以下这个例子。

1902 年秋天，闵可夫斯基教授（Hermann Minkowsky，1864～1909 年，爱因斯坦的数学导师）在上拓扑学课时，他的学生提了个问题：“如果把地图上有共同边界的国家都涂成不同的颜色，那么画一幅地图只用 4 种颜色就可以了。您能解释其中的道理

吗?”闵可夫斯基回答说:“四色问题之所以尚未被解决,是因为世界上第一流的数学家都还没空去研究它。”而且兴致所至,当场证明起来;但是写了好几个黑板,却依旧未能得证。接下来几个星期的课,他继续证下去,课一堂一堂地过去了,他如身陷泥沼,仍旧无法证明出来。他终于投降,承认自己也无能为力了。就在这个时候,天空正好霹雳一声巨响,他终于醒悟,并愧疚地说:“瞧!上帝在责备我狂妄自大呢。看来,我是解决不了这个问题了。”然后就继续上他的拓扑课了。

进入20世纪后,科学家们对四色猜想的证明在不断地进行中。

高速数字计算机的发明,促使更多数学家加入了“四色问题”的研究队伍。从1936年就开始研究四色猜想的德国数学家海克(Heinrich Heesch),公开宣称四色猜想可用寻找可约图形的不可避免组来证明。他的一个学生写了一个计算程序,海克不仅能用这个程序产生的数据来证明构形可约,而且描绘可约构形的方法是从改造地图成为数学上称为“对偶”形着手。

海克把每个国家的首都标出来,然后把相邻国家的首都用一条越过边界的铁路连接起来,除首都(称为顶点)及铁路(称为弧或边)外,擦掉其他所有的线,剩下的称为原图的对偶图(见图1-4)。到了20世纪60年代后期,海克引进一个类似于在电网络中移动电荷的方法来求构形的不可避免组。他的基本思想是,把邻网络看成电路,并给每个顶点配置1个电荷,如果一顶点的阶数为k,给它所配的电荷量为$6-k$。这样,5阶顶点就带有1个正电荷,6阶顶点不带电荷,7阶顶点带有1个负电荷,如此等等。在海克的研究中,第一次以颇不成熟的形式引进“放电法”。当我们开始沿着网络移动正电荷时,某些5阶顶点可能会失去所有的电荷(即被放电),而有些阶数大于6的顶点则可能带有正电(即被充电)。因为网络带电总量为正,一定有某些顶点带有正电。这样,由于所有可能的正电荷的接受者都被包括在已由放电过程产生的有限构形表中,这样的构形表将形成一个不可避免集,这正是我们要寻找的东西。

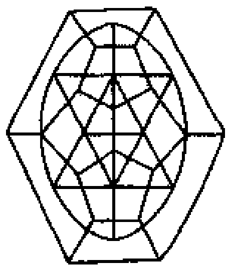

图1-4

五、捷足先登

1970年,美国伊利诺斯大学的数学家哈肯(Haken)找到了一些新的方法来改进放电过程,却面对着需要计算巨量数据的问题。尽管如此,哈肯仍希望这方面的研究最终导致四色猜想的证明。1972年,哈肯开始与他的同事阿沛尔(Appol)合作。他们的目标是要设计一种放电过程,通过它来产生一个由可约形组成的不可避免集。这需要做两件事,就是找出放电过程,同时证明它所产生的不可避免集的可约性。

电子计算机问世以后,由于演算速度迅速提高,加之人机对话的出现,大大加快了对四色猜想证明的进程。1976年初,阿沛尔和哈肯发展了一种放电过程,还编写了一

个证明可约性的程序，以便遇到一个不能证明其可约性的构形，正电荷能自动地移动起来以求排除困难。

1976年9月，阿沛尔和哈肯的程序在3台IBM360电子计算机上，以每秒计算400万次的超高速运算，耗时1 200个小时后，作了100亿个判断，终于完成了四色定理的证明。

“四色问题”的证明，轰动了世界。它不仅解决了一个历时100多年的难题，而且成为数学史上一系列新思维的起点。在“四色问题”的研究过程中，不少新的数学理论随之产生，也发展了很多数学计算技巧。如将地图的着色问题化为图论问题，丰富了图论的内容。不仅如此，“四色问题”在有效地设计航空班机日程表，设计计算机的编码程序上都起到了推动作用。

这是一个非凡的惊人之举，人们盛赞这是计算机的革命。当两位数学家将他们的研究成果在1977年发表的时候，当地的邮局在当天发出的所有邮件上都加盖了“四色足够”（Four Colors Suffice）的特制邮戳，以庆祝这一难题获得解决。

六、证明了吗

对数学家们来说，在四色猜想的证明中，最有戏剧性的方面在于证明该问题的方法。两位数学家的论证有很大部分并且是关键部分是由计算机完成的，其中用到了一些概念本身就是计算机证明的产物。证明过程所需的计算量如此巨大，对它进行逐步检验已非数学家人力所及，这就意味着整个数学证明的概念发生了突变。自从20世纪50年代电子计算机发展以来，一直酝酿的事情终于发生了——计算机从数学家手中接过了从事数学证明的重任。

不过，仍有人怀疑计算机计算的准确性。有人批评说：“整个过程主要是利用了计算机获得的结果，而这些结果从本质上来说又不能经受人工检验，这样的过程是不能被看作数学证明的。”对这些人来说，四色问题仍然悬而未决。不久前出版的文献援引了数学界权威人士在1986年的话说：“传说的四色问题获证的消息不确实。”由此来看，至少阿沛尔与哈肯的证明还没有得到国际数学界的正式承认。3台计算机上工作1 200个小时才能得出的结果，要重新检验一次都不是一件容易的事，何况更不知道是否还会存在其他问题呢?

也有不少数学家并不满足于计算机取得的成就。他们认为，应该有一种简捷明快的书面证明方法。直到现在，仍有不少数学家和数学爱好者在寻找更简洁的证明方法。因此，目前四色问题的结果还只能叫做“四色猜想”，只有从理论上证明了它的正确性之后，才能称这为“四色定理”。

第二节　费马定理

学习了几何，就能测量；学习了代数，就能计算……众多的数学分支都和现实生活有着密切的联系。然而，有一个数学分支却很难在日常生活中找到它的具体应用。这个数学分支就是“数论”。

在数论中，有不少古老而玄妙的数学“谜语”，至今尚未有人能找到“谜底”，因而给它增添了极大的魅力。且不说像“哥德巴赫猜想”那样世人皆知的数学难题，就说质数吧，尽管人们早在两千多年前就开始研究它了，可是直到如今，数学家们仍然无法找到一个公式，把所有的质数表示出来。

有趣的是，在17世纪，对数论的研究贡献最大的人，竟是一位法国业余数学家。这人就是费马（Fermat，1601～1665年）。

虽然费马没有受过严格的数学训练，也不精于严谨的数学证明，但他具有伟大的直观天才。费马正是凭借丰富的想象力和深刻的洞察力，提出了一系列重要的猜想和一些新的数学方法，确定了数论的研究方向。

费马喜欢在别人的数学著作的空白处写下自己的注解，提出自己的“定理”，却几乎从不给予证明，这就很难保证他的猜想都是正确的，而且也给后人的工作添了不少的麻烦。其中的一个猜想，即所谓的“费马定理”，300多年来，既未被证明也未被否定，成为历史上一个著名的数学难题。

一、什么是费马定理

$x^2+y^2=z^2$，这是丢番图（Diophantus，约公元246～330年）在《算术》中详细讨论过的一类不定方程，它的整数解有无穷多个，比如勾股数3、4、5，就是它的一组解。然而，若将平方换成立方，方程$x^3+y^3=z^3$有没有整数解呢？换成四次方，方程$x^4+y^4=z^4$有没有整数解呢……丢番图没有回答。

1665年1月22日，费马与世长辞。由于费马无意于做一个数学家，生前从不公开发表自己的数学见解。当人们在整理他的遗物时，发现他在丢番图的《算术》译本的空白处用拉丁文定了这么一段话：“要把一个立方数分解为两个立方数之和，一个四次方数分解为两个四次方数之和。同样地，把一个大于2的乘方数分解为同样指数的两个乘方数之和，都是不可能的。我确实发现了这个断语的绝妙证明，但书上的空白太窄，写不下。”也就是：

当自然数$n>2$时，方程$x^n+y^n=z^n$没有正整数解。

这个看起来平平淡淡的“结论”被称为“费马定理”，但更多的人称它为“费马最后定理”。之所以称之为“最后”定理，只是由于其至今还为大家留着，留到最后——既没有人能够证明它，也没有人能够举出反例来推翻它。

其实，费马的那个“绝妙的证明”方法到底是否存在，还是值得怀疑的。因为翻遍他的所有遗物，也没有发现有关这方面的只言片字。于是，有人提问：这怎么能称之为定理呢？也许他在写旁注时曾经一闪念，有一个证明的想法，而后来认识到那个想法是错误的；几乎可以肯定，他并不打算把这段旁注公诸于世。因此，他也就没有机会再回头来删除或修正这条旁注。

持上述看法的人主张把“定理”改为“猜想”。因为他们认为，费马在其他问题上曾有一个论断被人推翻过。但是，多数人意识到，这个“最后定理”是罕见的、迷人的、充满生机的。经过前赴后继的不断努力，人们宁愿称它“定理”而不是“猜想”。

费马——一名业余的数学爱好者，挫败了他身后300多年的所有优秀的数学家。连

高斯（Gauss，1777～1855 年）、欧拉、柯西（Cauchy，1789～1857 年）等最优秀的数学家都束手无策。

二、公开征答

对费马定理：当自然数 $n>2$ 时，方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解。那么，如何证明这一命题呢？首先，应研究几种特殊的情形，如令 $n=3$，或 $n=4$，或 $n=5$，如果能证明这些情形，或许就能证明整个定理。同时应注意，如果 x，y，z 是方程 $x^n+y^n=z^n$ 的解，那么 x，y，z 的任一倍数也是它的解。因此，真正要讨论的问题是：对于给定的 n，是否存在本原解，即无公因子的解 x，y，z。

对于 $n=4$ 的情形，我们可以从 1～100 的所有自然数中试几组 x，y，z 的具体数值，检查它们之中是否能满足方程 $x^4+y^4=z^4$。但无论如何，你都找不到这样一组数。当你想证明，当 $n=4$ 时，不存在满足方程 $x^4+y^4=z^4$ 的解，可用反证法，即先假设它有一组解，然后演绎出矛盾来。然而，我们面临的问题是，如何从这一假设演绎出矛盾来？费马创造了一种特别有效的证明方法，即所谓的无限递降法。虽然没有证据说明费马确实对 $n=4$ 的情形证明了最后定理，但不少资料使多数人乐于相信，费马获得了此项成果。

1753 年，欧拉宣布他成功地证明了 $n=3$ 时的费马定理，但没有给出证明，直到 1770 年才在由圣彼得堡出版的他的著作《代数学导论》中给出了一个证明。如同费马对于 $n=4$ 情形的“证明”一样，欧拉也使用了无限递降法。然而，这一证明存在严重的缺陷——在证明过程中，欧拉用与整数的类比进行推理，而实际上这种类比根本不可靠。

1825 年，狄里赫雷（Dirichlet，1805～1859 年）和勒让德（Legendre，1752～1833 年）证明了 $n=5$ 的情形，他们的方法基本上是欧拉对 $n=3$ 时所使用方法的延伸。1839 年，拉梅（Lame）宣布证明了 $n=7$ 的情形，但很快被发现存在严重错误。

一位美国数学家在他的著作中写道：“我在数学王国旅游，到处都是赏心悦目的景色，人们为我们打开通路。然而，我看见前面的一堵石墙，它是那样坚硬和不可逾越。”

在这堵坚硬的石墙面前，有人瞠目结舌，有人咒骂呼喊，有人挥手攘臂，有人则在默默地凿呀凿，有人在寻找某处薄弱的突破口，有人则幻想着有朝一日能长出双翅飞过去……然而，当人们心穷计竭，从惊魂甫定的战场上退下来时，巴黎科学院的院士们则胸有成竹，他们居然想到古人的两句话：重赏之下，必有勇夫。于是，重金征求证明费马最后定理的答案。1823 年和 1850 年的两次悬赏公告吸引了成千上万的名利追逐者，他们之中甚至有冒险家和江湖术士。

1857 年，一支异军突起，德国数学家库曼（Kummer，1810～1893 年）根据长期研究，得出了卓有成效的结论：“在 n 为小于 100 的奇素数中，除 37，53，67 之外，费马定理成立。”库曼的工作对费马定理的特殊价值在于，他提出了一种算术性质的条件，一种使费马定理成立的那些奇素数次幂必须满足的条件，即如果一个奇素数 p 满足库曼条件，则方程 $x^p+y^p=z^p$ 无解。今天，我们称满足库曼条件的素数为正则素数，小于 100 的素数中仅有 37，59 和 67 不是正则素数。当然，就 $n>2$ 来说，100 是个微不足道的数，离完全证明仍非常遥远。然而，巴黎科学院授予他 300 法郎的奖金，表彰他对

这个问题做出开拓性的工作。1883年，布鲁塞尔科学院又重金悬赏，迄今仍无结果。

1908年，德国数学家沃尔夫斯克尔（Wolfskehl）向德国哥廷根大学提供10万马克，奖给最先完全证明这个定理的人，有效期为100年。一场空前的风暴袭击了整个数学界，并且波及数学界以外的许多领域。有人统计过，在很短的几年里，德国的各种刊物上就刊登了近千种不同的证明。可惜，那些都不是“绝妙的证明”。有人惊叹：难道这是“化圆为方”问题？是在搞“永动机”？可是，探索者仍然此起彼伏，有增无减。然而，毫无例外，所有应证者的方法和结论都是错误的。

在这阵狂潮面前，当年主管这方面的人员想出了一个主意，印刷一份复函的标准格式，并规定寄来的答案必须是印刷件。所设计复函的标准格式是：亲爱的先生（女士）：您对费马最后定理的证明已经收到，现予退回。您的第一处错误出现在____页第____行。

然而，真正诱惑数学家的并非那10万马克。在第一次世界大战期间，由于通货膨胀，10万马克已经不值几个钱。可是，无数探索者仍在孜孜不倦地埋头研究，为显示人类智慧的威力而奋斗。单就以下几个具体数字的复杂性就可见一斑：

$76^4+1203^4=653^4+1176^4$;

$7^4+59^4+158^4+239^4=133^4+134^4+157^4+227^4$

$5^5+6^5+15^5+16^5+22^5=1^5+2^5+10^5+12^5+20^5+21^5$

$4^5+5^5+6^5+7^5+9^5+11^5=12^5$

$1^6+2^6+4^6+5^6+6^6+7^6+9^6+12^6+13^6+15^6+16^6+18^6+20^6+21^6+22^6+23^6=28^6$

……

1978年，利用大型计算机取得的最新成果，只限于$2<n<125\,000$时（当然也包括这些数的倍数），方程$x^n+y^n=z^n$没有正整数解。

1983年，29岁的德国数学家法尔廷斯（Faltings）获得了引人注目的成果，他证明，当$n>2$时，方程$x^n+y^n=z^n$至多有有限多个本原解。这一证明能否导致最后定理的完全证明仍是个谜，但它把存在无穷多个解的可能性降到了最多只有有限多个解，这确实迈出了一大步，这使他赢得了1986年的菲尔兹（Fields）奖。

对费马定理的研究虽未终止，却极大地促进了数论的发展。特别是库曼的工作，虽未能彻底解决这个问题，却因此创立了也许比费马定理本身还要重要的理想数论，这一理论现已成为大学数学系学生的例行课程。因此，德国数学家希尔伯特（Hilbert，1862～1943年）曾在60多年前预言：“费马最后定理是只会下金蛋的鹅，如果我们将它宰杀，就得不到金蛋了。”尽管如此，60多年来，费马最后定理仍然是数学爱好者很感兴趣的诱惑品，成千上万的进取者仍在磨砺以须。

三、时势造英雄

最后的英雄已经出现。1963年，年仅10岁的安德鲁·怀尔斯在一本名叫《大问题》的书中邂逅费马定理，便知道自己永远不会放弃它，而且必须解决它。20世纪70年代，他正在剑桥大学研究椭圆方程，看来与费马定理没什么关系。

20世纪50年代，日本数学家谷山丰首先提出一个有关椭圆曲线的猜想，后来由另一位数学家志村五郎加以发扬光大，这个猜想被称为“谷山－志村猜想”。当时没有人

认为这个猜想与费马定理有任何关联。80 年代，几位数学家将 17 世纪最重要的问题与 20 世纪最有意义的问题结合在一起，终于找出了证明费马定理的钥匙：只要能证明谷山－志村猜想，就自动证明了费马大定理。

曙光在前，但并没有人对黎明的到来抱有信心，谷山－志村猜想已经被研究了 30 年，都以失败告终，如今与费马定理联系在一起，更是连最后的希望都没有了。因为，任何可能导致解决费马定理的事情根据定义是根本不可能实现的——这几乎已成定论。

就连发现钥匙的关键人物肯·里贝特也很悲观：“我没有真的费神去试图证明它，甚至没有想到过要去试一下。”大多数其他数学家，包括怀尔斯的导师，都相信做这个证明会劳而无功。

但是，这些人中不包括英国数学家安德鲁·怀尔斯（Andrew Wiles，1953～）。

曾经有人问伟大的逻辑学家希尔伯特，为什么不去尝试证明费马定理，他回答说：“我没有那么多时间去浪费在一件可能会失败的事情上”。

但怀尔斯会。他意识到自己的机会不大，但即使最终没能证明费马定理，他也觉得自己的努力不会白费。他花了 18 个月的时间为将来的战斗收集必要的武器，然后得出全面估计：任何对这个证明的认真尝试，很可能需要 10 年的专心致志的努力。

怀尔斯放弃了所有与证明费马定理无直接关系的工作，在完全保密的状态下，展开了一个人对一个困扰世间智者 300 多年的谜团的挑战，妻子是唯一知道他在从事费马问题研究的人。

经过 7 年的艰苦努力，怀尔斯完成了谷山－志村猜想的证明。1993 年 6 月 23 日，在英国剑桥大学牛顿研究所的“世纪演讲”最后，怀尔斯宣布证明了费马定理。每一个对促成费马定理证明作出过贡献的人实际上都在现场的房间里，200 名数学家被惊呆了。他们看到的是，300 多年来，费马的挑战第一次被征服。

怀尔斯写上费马定理的结论，然后转向听众，平和地说：“我想我就在这里结束”。会场上爆发出一阵持久的掌声。第二天，数学家第一次占据了报纸的头版头条。《人物》杂志将他与黛安娜王妃、奥普拉一起列为“本年度 25 位最具魅力者”之一，一家时装公司则请这位温文尔雅的天才为他们的新系列男装做了广告。

但事情并没有在这里结束。怀尔斯长达 200 页的手稿投交到《数学发明》杂志，专家们开始了庞杂的审稿过程。这是一个特大型的论证，由数以百计的数学计算通过数以千计的逻辑链环错综复杂地构造而成。只要有一个计算出差错或一个链环没衔接好，整个证明将可能失去价值。

在苛刻的审稿过程中，审稿人碰到了一个似乎是小问题的问题。而这个问题的实质是，无法使怀尔斯像原来设想的那样保证某个方法行得通。怀尔斯的证明被检验出有少许瑕疵，他必须加强他的证明。

时间越耗越长，问题依然解决不了，全世界开始对怀尔斯产生怀疑。300 多年来，在众多尝试过对费马定理的证明中，还没有一个人能补救出现的漏洞。最近的一次失败是 1988 年 3 月 8 日，《华盛顿邮报》和《纽约时报》宣称东京大学的宫冈洋一发现了费马定理的解法，但一个月后又不得不宣布收回。难道怀尔斯也不能逃脱这种宿命？BBC 电视台的科学编辑约翰·林奇说：“我很难想象安德鲁不会是那片数学墓园中的另一块墓碑。”14 个月的时间过去了，怀尔斯准备公开承认失败，并发表一个证明有缺

陷的声明。

四、炸弹被拆除

在山穷水尽的最后时刻，1993 年 9 月 19 日，一个星期一的早晨，怀尔斯决定最后检视一次，试图确切地判断出那个方法不能奏效的原因。一个突然迸发的灵感使他的苦难走到了尽头：虽然那个方法不能完全行得通，但如果另一个他曾经放弃的理论奏效，正确答案就可以出现在废墟之中——两个分别不足以解决问题的方法结合在一起，就可以完美地互相补足。怀尔斯终于交出完美无瑕的解答，困扰数学界 300 多年的梦魇终于结束！

足足有 20 分钟，怀尔斯呆望着那个结果不敢相信。然后，是一种再也无事可做的巨大失落感。

100 年前，专为费马定理而设的沃尔夫斯克尔奖将截止日期定为 2007 年 9 月 13 日。就像所有的惊险片一样，炸弹在起爆的最后一刻被拆除了。

怀尔斯的历史性长文“模椭圆曲线和费马定理”于 1995 年 5 月发表在美国的《数学年刊》第 141 卷。1997 年 6 月，怀尔斯在德国哥廷根大学领取了沃尔夫斯克尔的 10 万马克悬赏大奖。此时离截止期还有 10 年，圆了历史的梦。当年的 10 万马克约为 200 万美金，在怀尔斯领到时，只值约 5 万美金，不过怀尔斯已经名垂青史。1996 年 3 月，怀尔斯荣获与诺贝尔奖金额相当的国际数学大奖——沃尔夫（Wolf）数学奖，并于 1996 年 6 月获得美国国家科学院奖，1998 年 8 月获得菲尔兹特别奖。

自从牛顿和莱布尼兹发明了微积分之后，数学的应用价值越来越为人们所知，数学家们被迫去从事一些新领域的研究，这些领域包括从粒子物理到生命科学，从航空技术到地质勘探等几乎一切应用学科。与此同时，在这个越来越讲求实际的时代，以费马毕生钟爱的数论为代表的纯粹数学逐渐不为人所重视。或许是害怕被人冷落，数学家们每隔一段时间就会抛出一条特大新闻，以吸引人们的眼球。2000 年 5 月 24 日，美国克莱数学研究所对七个“千禧数学难题”的每一个悬赏 100 万美元奖金。这一悬赏公告当即被媒体炒得火热，重新燃起了人们对数学问题的兴趣。

第三节　希尔伯特第十问题

数学问题是数学中最具魅力的部分之一，也是数学史上许多重要思想的源泉。据说，有人曾建议德国著名的数学家希尔伯特去解决费马猜想，以夺取为这一猜想而设的沃尔夫斯克尔奖金（Wolfskehl Prize），希尔伯特笑笑说：“我为什么要杀掉一只会下金蛋的鹅呢？”在希尔伯特看来，一个像费马猜想这样的数学问题对数学的价值是无可估量的。希尔伯特不仅舍不得“杀鹅”，还怀着极大的热诚为 20 世纪的数学界做了一回“寻鹅之人”。

一、希尔伯特 23 个问题

1900 年 8 月，来自世界各国的 200 多位数学家在巴黎举行了第二届国际数学家大