

現代应用数学丛书

塑性论

〔日〕鷲津久一郎 著

上海科学技术出版社



1

現代应用数学丛书

論 性 塑

〔日〕 鷲津久一郎 著
刘 亦 珩 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中译本。全书共七章,第1章緒論,介紹簡單拉伸的应力应变曲綫;第2章概述了彈性理論及其与塑性理論的异同点,作为討論塑性問題的準備;从第3章开始到第7章都是以书末文献〔9〕〔10〕〔11〕为典范,着重作应用数学的处理。书末另附 Green 定理和特征曲綫等两篇作为附录,同时附有十六种文献以供讀者参考。本书可供高等学校数学系和物理、力学专业的师生及工程师作参考。

1

現代应用数学丛书

塑 性 論

原 书 名	塑 性 論
原 著 者	〔日〕 驚 津 久 一 郎
原出版者	岩 波 书 店
譯 者	刘 亦 珩

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 2 8/32 字數 51,000

1961年11月第1版 1961年11月第1次印刷

印数 13,000

13119

統一書号: 13119 · 428

定 价: (十四) 0.40 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“现代应用数学讲座”翻译而成。日文原书共15卷60册,分成A、B两组,各编有序号。现在把原来同一题目分成两册或三册的加以合并,整理成42种,不另分组编号,陆续翻译出版。

这套书涉及的面很广,其内容都和现代科学技术密切有关,有一定参考价值。每一本书收集的資料都比较丰富,而叙述扼要,篇幅不多,有利于讀者以較短時間掌握有关学科的主要内容。虽然,这套书的某些观点不尽适合于我国的情况,但其方法可供参考。因此,翻译出版这一套书,对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆续出版的,写作时间和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理,为了尽可能地减少这种影响,我們在每一譯本中,特請譯者或校閱者撰写序或后記,以介紹有关学科的最近发展状况,并对全书内容作一些评价,提出一些看法,結合我国情况补充一些資料文献,在文内过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻译和校閱的同志,为提高书籍的质量付出了巨大劳动,在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯 者 序

这本小册子是岩波应用数学丛书内有关力学方面的七种著作之一。这七种著作差不多都是在力求使用統一的几何学方法的基础上写成的。所謂統一的几何学方法，乃是以近藤一夫为首的 20 多位日本工程学者及应用数学者自 1951 年以来共同研究的方向。他們的研究成果曾經汇集出版，叫作“工学基础問題的几何学統一的研究”，以后簡称为“汇编”。其中所处理的工学問題范围很广，有电路网络、工学力学系統(特别是轉动电机)、彈性塑性、流体力学以及其他方面的一些問題。其主要精神是以 Gabriel Kron 对于轉动电机分析所提出的思想为基础，进一步推广到对轉动流体机、航空机以及其他近代工业机器的分析。找出这些机器所形成的力学系統，作出它的表現空間，將状态的变化看作坐标变换，机器类型的不同当作約束条件，而建立該空間的几何学，这样就将机器分析变成了几何学的研究。又将这种研究方法应用到連續介质力学的基本問題中，將完全无应力状态看作 Lagrange 状态，任意变形状态看作 Euler 状态，于是將連續介质力学看成是在 Euler 坐标变换群下对于几何学的研究。由于 Lagrange 状态是 Riemann 空間的，Euler 状态是 Euclid 空間的，对于所有 Euler 状态都对应着同一个 Lagrange 状态(即无应力状态)，所以这种几何学是保持 Riemann 度量的空間几何学，当然是一种 Riemann 几何学。因为 Euler 状态是 Euclid 的，所以要求 Riemann 曲率張量为零，將这个条件用不同的形状写出来就得到通常所說的几何方程及协调条件。这样看来，在普通 Euclid 空間内，表面上不相同的两組条件，实质上完全是等同的。而且借此还可以直接处

理非綫性問題及大變形和大變位的問題。总的說來，這種幾何學方法的要點是利用張量算法，通過近代微分幾何空間形式的分析來處理力學及工學上的基本問題。

這本小冊子也是根據同一觀點寫成的。因為它是出版在近藤的“變形幾何學”及其他小冊子之後的，所以基本理論及幾何化過程沒有重述，只着重提出“幾何方程”就是“協調條件”。這可能使初學者及不習慣於運用 Riemann 幾何學思想的讀者引起誤解，所以在閱讀本書時最好參看比它先出版的各种小冊子。不過本著以後各章只是用了一些張量記號，並未使用張量算法及 Riemann 幾何學，讀起來並不會感到很大困難。本書的材料主要是將 R. Hill 的“塑性的數學理論”里特別是數學的部分加以介紹，對於塑性論的物理概念和實際應用敘述得不多。對塑性論不熟悉的讀者，可以參照初等塑性理論的專書閱讀。這類書籍國內已經出版的不少了。

本書共分七章，前兩章是緒論性質的，將彈性理論作了概括的敘述，特別是對彈性和塑性的關係以及二者的異同點作了比較詳細的說明，給第 3 章以後的論述打下了基礎。第 3 章介紹塑性論的基礎，推导出基本方程。第 4 章解說變分法原理，對利用變分法解決塑性論問題作了較全面的敘述。第 5 章處理塑性平面應變問題，第 6 章極限分析，第 7 章全應變塑性理論等，討論得都比較簡單，雖然也涉及到一些實際問題，但語焉不詳。

蘇聯學者在這方面有着很多貢獻，但本書很少提到。蘇聯學者所著的塑性理論專著，在我國已經翻譯出版很多，讀者在学习時可以盡量多加參閱，以補書中之缺。

最後，本譯稿曾經上海交通大學工程力學系李康先同志予以詳細校閱，提出了若干寶貴的意見，特此表示感謝。

劉亦珩 1961 年 6 月於西北大學

序

按照 R. Hill 在《塑性的数学理論》中指出的，塑性論是和彈性論对应的術語，它是塑性变形体特別是金屬的应力应变的数学理論的綜称。

在設計构件时，为了使构件能經受給定的荷載，需要解决构件各部材料的尺寸的选取問題。这时，若有不发生永久变形的設計条件，那末只要使各部材料的应力不超过比例极限或屈服应力就成了，而且在它的分析里也只需要用到彈性理論。但若有在靜荷載下不发生破坏断裂的設計条件，則其分析就需应用塑性理論了。

至于压延及扭曲等塑性加工問題，因其目的是引起永久变形，所以这些內容也是塑性論里所特有的。

本书是估計讀者已經有了一些关于彈性論的預备知識的前提下写的，所以在第2章中介绍彈性論时仅略述它的大概，着重于闡明它和第3章以后的塑性論的异同点。第3章以后将以书末文献[9]，[10]，[11]作典范，着重作应用数学的处理。但由于篇幅的限制，对塑性論基础的实验及物理学的考察沒有介绍，而且对塑性論的应用方面也不得不大加精簡。对这些方面有兴趣的讀者，可以参閱书末的参考文献以及这些文献里所引用的論文。文献[14]是概述塑性論最近进展的良好資料。

目 录

出版說明

譯者序

序

第1章	緒論	1
§ 1	簡單拉伸試驗的应力应变曲綫	1
第2章	彈性論概述	4
§ 2	应变与協調条件	4
§ 3	应力与平衡方程	7
§ 4	应力应变关系	11
§ 5	边界条件	12
§ 6	微小变位彈性論所处理的問題	13
§ 7	第一变分原理	14
§ 8	第二变分原理	16
第3章	塑性論基础	18
§ 9	屈服条件	19
§ 10	应变强化或加工硬化	21
§ 11	应力应变关系	22
§ 12	对于强化材料的 Prandtl-Reuss 方程	24
§ 13	理想塑性材料的 Prandtl-Reuss 方程	26
§ 14	Saint Venant-Levy-Mises 方程	28
第4章	塑性論的变分原理	29
§ 15	强化材料	29
§ 16	理想塑性材料	31
§ 17	理想剛塑性材料	32
第5章	平面塑性应变問題	36
§ 18	平面塑性应变問題的基本方程	36
§ 19	平面塑性应变問題方程的解析积分法	40

§ 20	平滑剛模抽拉薄板	42
第 6 章	极限分析	44
§ 21	安全系数	44
§ 22	平面应变問題的极限分析的定理	45
§ 23	具有圓孔的正方形管的安全系数	48
第 7 章	全应变塑性論	51
§ 24	应力应变关系	51
§ 25	割切模量理論	53
§ 26	Kachanoff 原理	54
§ 27	理想塑性材料(Hencky 材料)	54
§ 28	理想剛塑性材料	57
附 录		59
I.	Green 定理	59
II.	特征曲綫	60
参考文献		62

第1章 緒 論

§1 簡單拉伸試驗的应力应变曲綫

檢查金属材料变形特性的最簡單的方法是簡單拉伸試驗。我們將先說明它。对图 1.1 所示的标点距离为 l_0 ，断面积为 A_0 的金属試件，作用拉伸荷載 P (这叫作加载)，則标点距离伸长而断面积縮小。將它們各命为 l 及 A 。若在纵軸上取平均应力 $\sigma = P/A$ ，在横軸上取应变 $\epsilon = \ln(l/l_0)$ 时^①，随着 P 的增加， σ 和 ϵ 便描出图 1.2 形状的应力应变曲綫。这里 $\ln$ 是自然对数，且在小变形的范围里有 $\sigma \approx P/A_0$ 及 $\epsilon = \ln \{1 + (l - l_0)/l_0\} \approx (l - l_0)/l_0$ 。从图 1.2 可以看出，在应力适当小的范围里， σ 和 ϵ 保持綫性关系，除掉荷載时 (这叫作卸載) 試件就恢复原长 l_0 。使 σ 和 ϵ 的綫性关系成立的应力最大值 (图 1.2 的 P 点) 叫作比例极限。在比例极限內

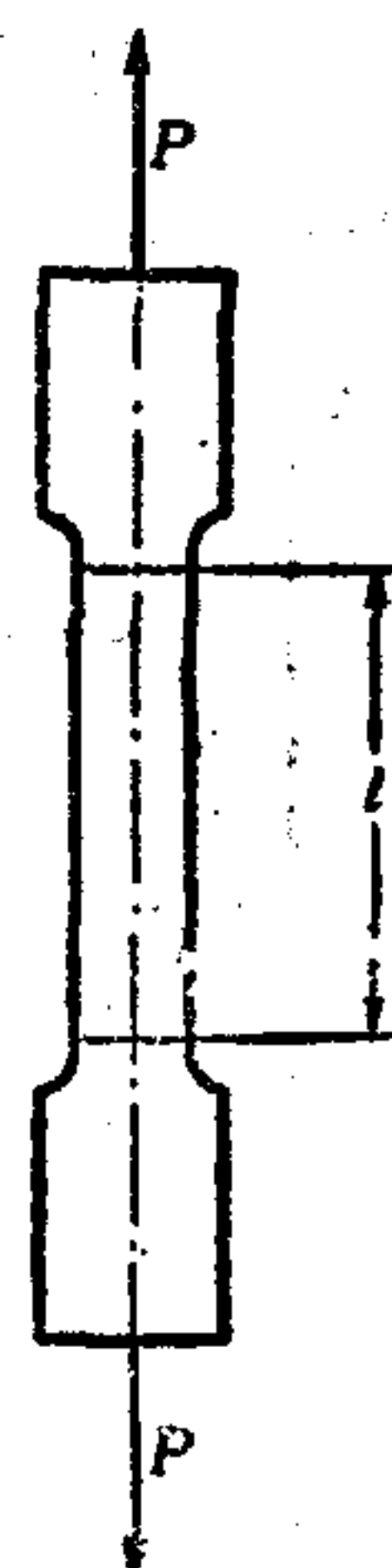


图 1.1 簡單
拉伸試驗

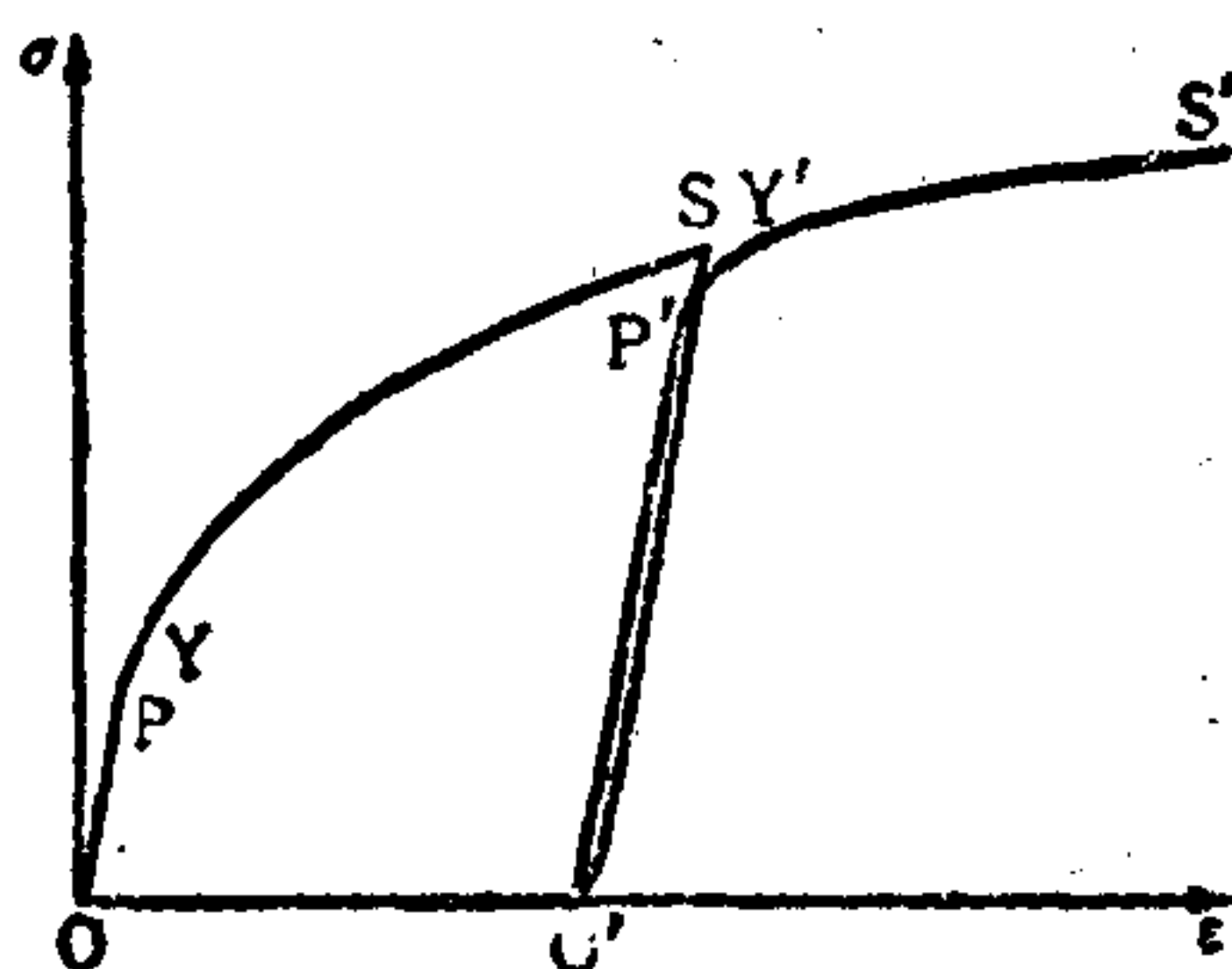


图 1.2 应力应变曲綫

恒有 $\sigma = E\epsilon$ ，比例常数 E 叫作 Young 模量。这时若同时測定横向应变 δ ，就可以知道比数 $-\delta/\epsilon$ 是一个常数，这个常数用 ν 表示，叫作 Poisson 比。即是，将直棒拉伸时，若将比例极限內的纵向拉伸应变命为 ϵ ，

① 注意在第 2 章以后， σ 将用于另一种意义，参照 (4.5)。

則在橫向發生收縮應變 $\nu\epsilon$ 。屈服應力 (圖 1.2 的 Y 點) 定義為: 當荷載全部去掉後能使試件恢復到原長 l_0 的最大應力。但若作精密測定時, 則不論加的荷載怎樣小, 當使荷載全部卸除時, 也必然殘留下和該荷載相當的微小永久應變。所以, 習慣上往往把能生成 0.2% 的永久應變的應力定義為屈服應力。若將荷載恢復到原來的形態時, 變形也隨之消失而恢復原形, 這種性質叫作彈性。與此相反, 即使將荷載全部卸掉, 也還殘留下永久應變的性質叫作塑性。

對於大多數的金屬, 若想使塑性變形持續進行時, 非增加應力不可, 即是在大多數的情形里, $\sigma-\epsilon$ 曲綫恒有 $\frac{d\sigma}{d\epsilon} > 0$ 。這個現象

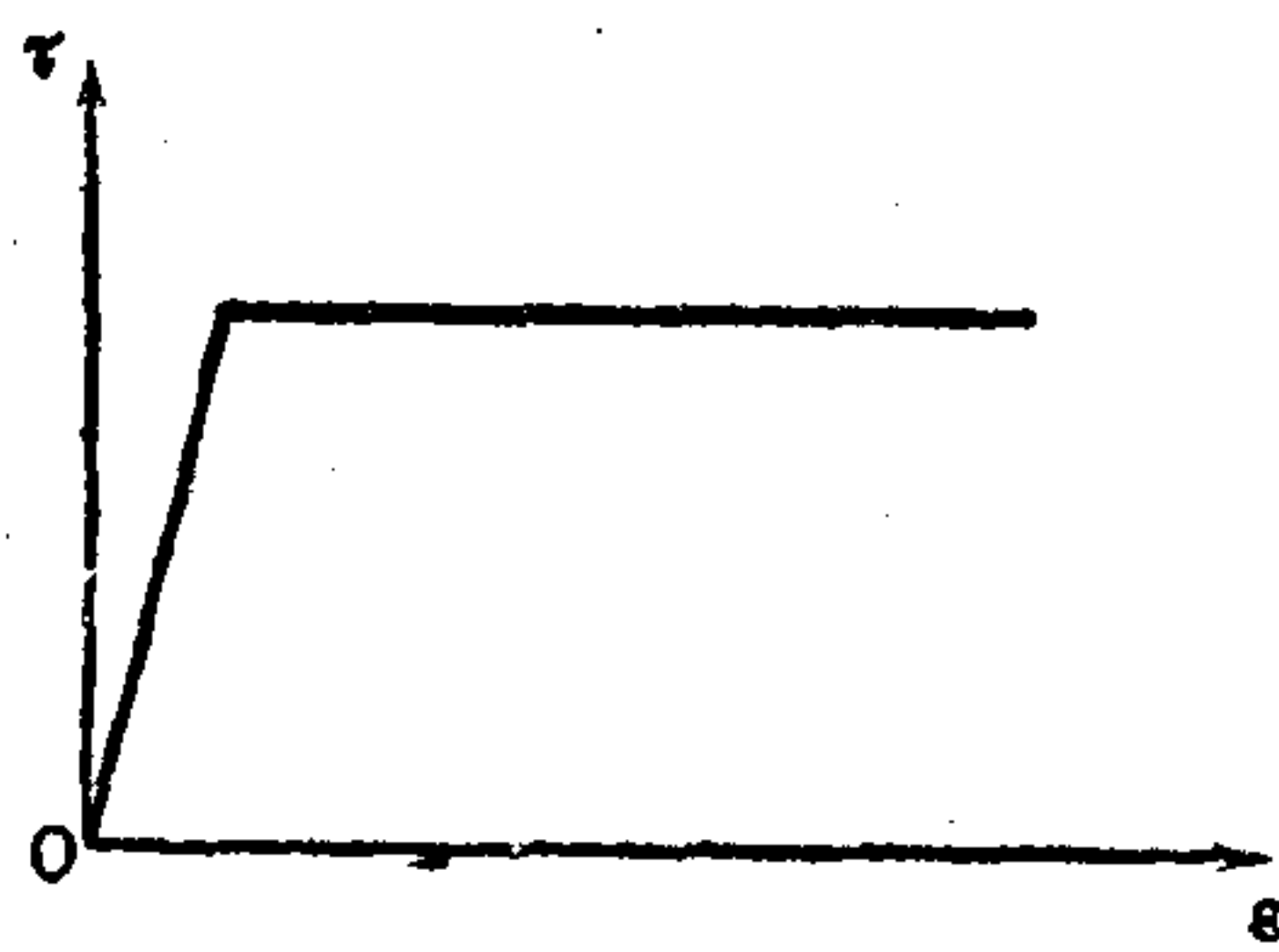


圖 1.3 理想塑性材料

叫作應變強化或者加工硬化。在一般的情形下, 為了使試件產生應變增量 $d\epsilon$ 所需要的應力增量 $d\sigma$, 亦即 $d\sigma/d\epsilon$, 恒隨 ϵ 的增加而減少, 換言之, 應變強化的比例逐漸縮小, 而應力應變曲綫逐漸彎曲。經過屈服點以後, $\sigma-\epsilon$ 曲

綫平行於 ϵ 軸, 即 $d\sigma/d\epsilon = 0$, 這樣的材料叫作理想塑性材料 (圖 1.3)。

再回到圖 1.2。若給與某種程度的塑性變形後使荷載自 S 減少, 那末當沿着圖的 SO' 使荷載回復到 0 時, 便生成 OO' 的永久應變。在此情形, SO' 幾乎平行於 PO 。自 O' 再加載, 則 $\sigma-\epsilon$ 曲綫重合於 $O'P'$, 在這個範圍里是彈性變形, P' 是具有永久應變 OO' 的材料的新的比例極限。經過 P' 再加上微小塑性應變, 使應力接近原來的 S 值時, 則曲綫在 Y' 附近劇烈彎曲形成 $Y'S'$, 好象是從 YS 延長來的。

為了對於這種材料作數學塑性論的研究, 有必要作如下的理

想化(图 1.4), 即使 P 和 Y 一致。材料到 P 点保持着线性的应力应变关系和弹性, 但 P 是屈服点。又 S, Y', P' 一致, 且 SO' 及 $O'P'Y'$ 都和 PO 平行。 S 可以看成是受有初始应变 OO' 的试件的屈服应力。若将

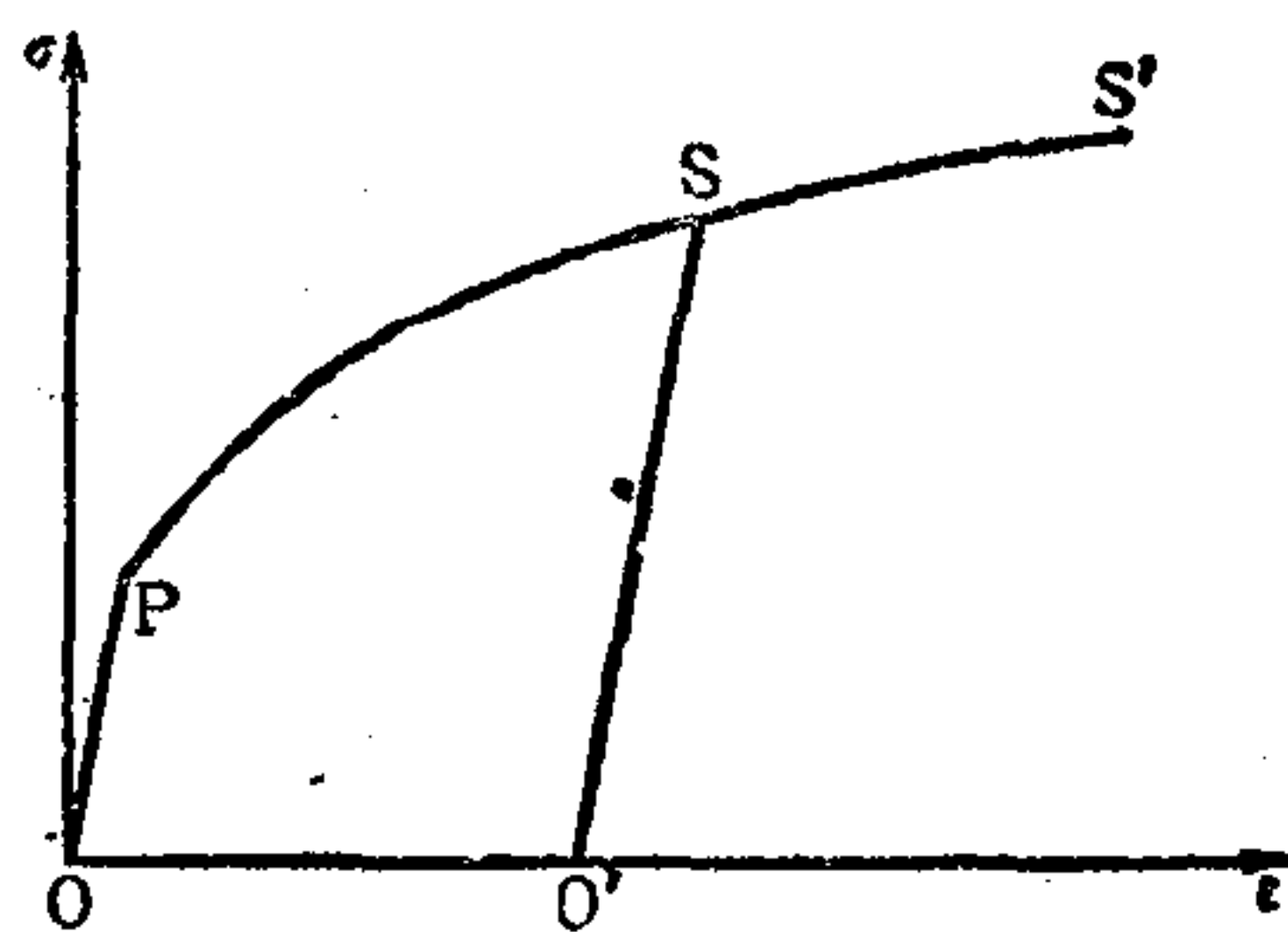


图 1.4 应力应变曲线的理想化

这种受有初始应变的金属的应力应变曲线 $O'SS'$ 和完全不受初始应变的金属的应力应变曲线 OPS 作比较, 就可以看出它的屈服应力较高, 而且超过屈服应力后曲线急剧弯曲, 具有接近理想塑性材料的特征。

如上所述, 在弹性域里, 应力和应变间有一一对应的关系, 当指定应力时, 则其对应的应变可以由直线 OP 唯一地决定。但在塑性域里却没有这样的对应关系, 不过只要利用加载和卸载的适当配合, 就可达到曲线 $OPSS'$ 和横轴间的任意点 (σ, ϵ) 。在塑性域里应变不仅取决于最终状态的应力, 而且还有赖于加载路线。因此, 塑性论里的应力应变关系比弹性论里的应力应变关系要复杂得多。

以上是对拉伸试验所作的说明。若再作压缩试验及扭转试验, 那末就可以根据它们作成三维塑性论的基础。

本书在叙述塑性论以前, 先在第 2 章概述弹性的理论, 作为第 3 章进行研讨塑性论和弹性论的异同点的资料。但由于篇幅所限, 第 2 章的弹性理论只能做到概述的程度。读者欲知其详, 可以参阅卷末的文献 [1] 至 [8] 及它们里边所引用的文献。

第2章 彈性論概述

§ 2 应变与协调条件

在空間內取直角坐标 x_1, x_2, x_3 , 命 x_1, x_2, x_3 方向的单位向量各为 i_1, i_2, i_3 , 命变形前物体内任意一点 P_0 所对应的位置向量是 r_0 , 那末有

$$r_0 = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 = \sum_{i=1}^3 x_i i_i \quad (2.1)$$

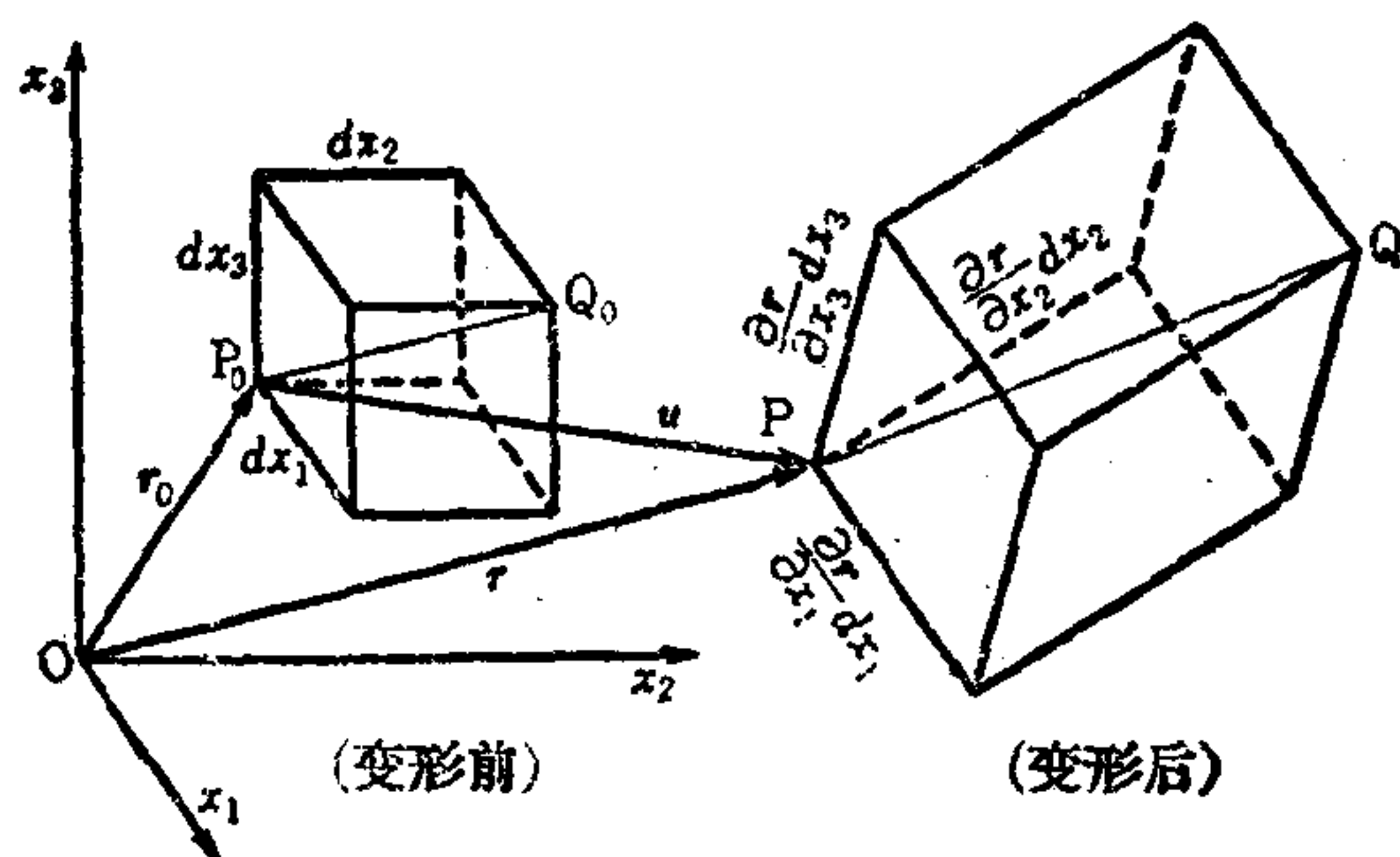


图 2.1 变 位

(图 2.1)。今后将 (x_1, x_2, x_3) 叫作物体坐标, 即是指定物体点 P_0 的一种参数。这个物体点和变形前位置在 $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ 上的点 Q_0 间的距离 P_0Q_0 用公式

$$ds_0^2 = dr_0 \cdot dr_0 = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} dx_i dx_j \quad (2.2)$$

表示。这里 δ_{ij} 是 Kronecker 記号, 当 $i=j$ 时, $\delta_{ij}=1$; $i \neq j$ 时, $\delta_{ij}=0$ 。

在变形后点 P_0 移到点 P , 命其新的位置向量为

$$r = r(x_1, x_2, x_3), \quad (2.3)$$

則 P_0Q_0 在变形后的长度 PQ 变为

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dx_i dx_j. \quad (2.4)$$

但在这里曾設

$$g_{ij} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} = g_{ji}, \quad (2.5)$$

所以应变張量 e_{ij} 可定义如下:

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_j} \right) = e_{ji}, \quad (2.6)$$

或者用 g_{ij} 及 δ_{ij} 改写时, 則有

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - \delta_{ij}) = e_{ji}. \quad (2.7)$$

若命 P_0 点的变位(或位移)向量是 $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$, 其分量为 (u_1, u_2, u_3) , 則有

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 (x_i + u_i) \mathbf{i}_i, \quad (2.8)$$

于是 e_{ij} 可用变位分量表示为

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = e_{ji}. \quad (2.9)$$

直到現在, 对于变位的大小还未加上任何限制。但在微小变位彈性論里, 由于假設变位是微小的, 所以在公式(2.9)里仅取变位的一阶項而略去高阶項。而且將微小变位理論里的 e_{ij} 改写为 ε_{ij} 时, 則有

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.10)$$

在微小变位理論里, 通常用 x, y, z 代替 x_1, x_2, x_3 , 用 u, v, w 代替 u_1, u_2, u_3 , 用 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ 代替 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}$; 亦即

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} (2.11)$$

若想說明應變的幾何意義，則 ε_x 是變形前平行於 x 軸的微小綫素在變形後的相對變形， ε_y 及 ε_z 的意義也是這樣的。 γ_{yz} 則是變形前平行於 y 軸的微小綫素和平行於 z 軸的微小綫素的交角（直角）在變形後的相差角，一般叫作剪應變。 γ_{zx} ， γ_{xy} 的意義也類此。

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$ 是按照 (2.11) 用三個量 u, v, w 的導數定義的六個量，所以它們不能相互無關。當任意確定 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$ 時，就可以按照 (2.11) 由單值連續的 u, v, w 導出充要條件，叫作協調條件。按照森口氏的寫法，可以將微小變位理論的協調條件寫成如下形狀^[4]：

$$\begin{pmatrix} R_x & U_z & U_y \\ U_z & R_y & U_x \\ U_y & U_x & R_z \end{pmatrix} = 0, \quad (2.12) \textcircled{1}$$

這裡有

$$\left. \begin{aligned} R_x &\equiv \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ R_y &\equiv \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \\ R_z &\equiv \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ U_x &\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ U_y &\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ U_z &\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} (2.13)$$

① (2.12) 就是意味着 $R_x = R_y = R_z = U_x = U_y = U_z = 0$ 。

而且曾設所考虑的物体形成一个单連通域。

协调条件的意义可以这样解释：将物体切离成小碎片，然后給各个小碎片以任意应变 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$ ；若各碎片的应变不适合条件(2.12)时，那末将它们再拼凑起来而成的物体里必然产生錯位現象。在一般的情形下，我們不考虑单連通物体发生錯位現象的問題，所以非恒滿足条件(2.12)不可^①。

在有限变位理論里，应变張量 e_{mn} 可以按(2.6)式导出的充要条件，亦即协调条件，是由 $g_{ij} = \delta_{ij} + 2e_{ij}$ 所作的 Riemann 曲率張量 $R_{ijkl} = 0$ (参看本丛书中矢野著《几何学》§46；山本著《有限变位彈性論》)。

§3 应力与平衡方程

考虑变形前由六个面

$$x_i = \text{const}, \quad x_i + dx_i = \text{const} \quad (3.1)$$

所包围着的微小六面体在变形后的平衡方程(图3.1)。在变形后的六面体上作用的力，是通过六个面由外側的物体部分所作用的

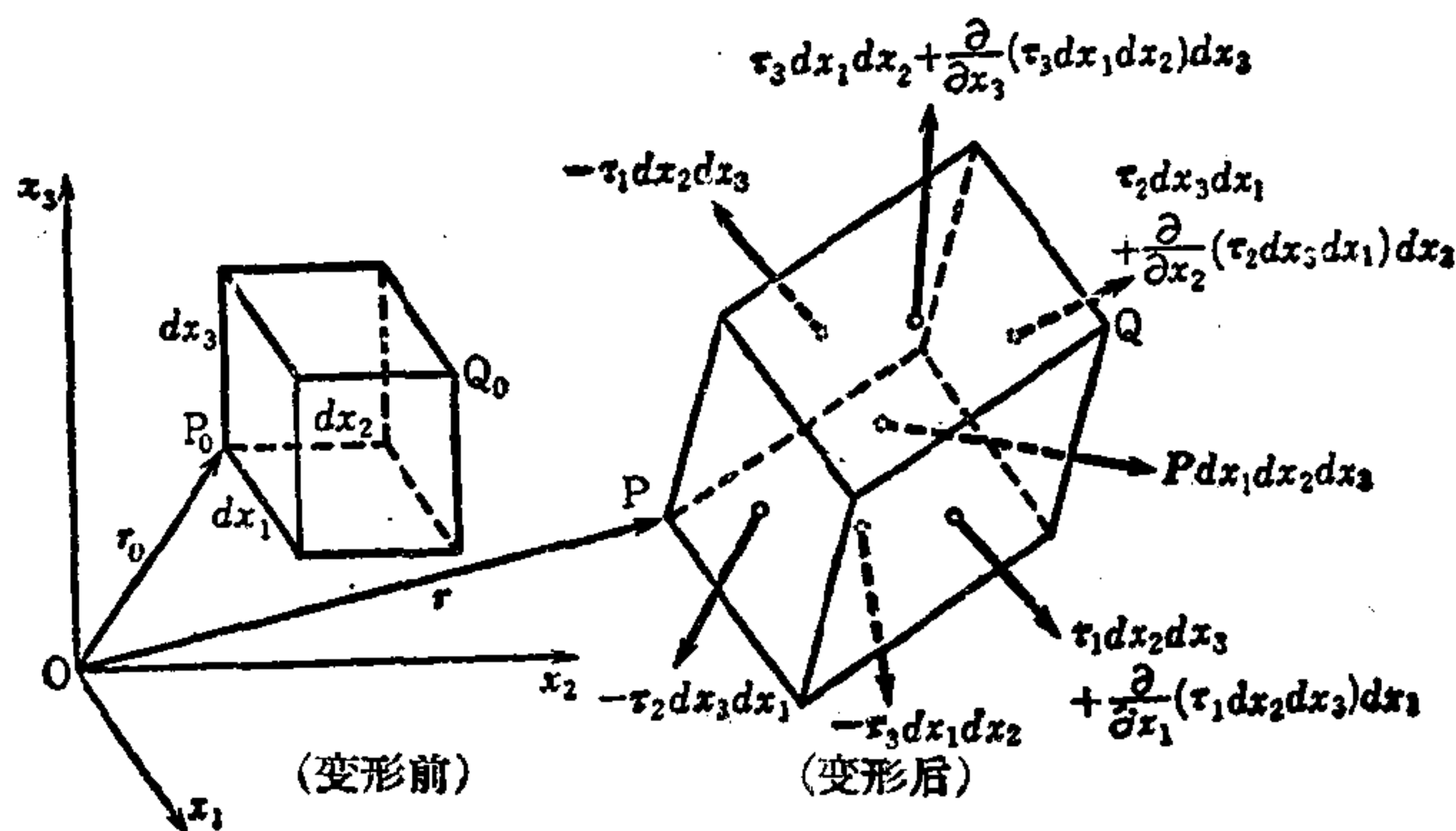


图3.1 应力

① (2.11) 和 (2.12) 是等价的，今后就将 (2.11) 叫作协调条件。这两个式子的等价是由 Riemann 几何观点作出的。关于这一点可参看譯者序。——譯者注

內力, 及象慣性力那样对应着六面体的质量而作用的所謂体力。若設变形前由 dx_2 和 dx_3 所作的矩形上, 变形后作用的內力为 $\tau_1 dx_2 dx_3$, 則在六面体上作用的內力是

$$\left. \begin{aligned} & -\tau_1 dx_2 dx_3, \quad \tau_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} (\tau_1 dx_2 dx_3) dx_1, \\ & -\tau_2 dx_3 dx_1, \quad \tau_2 dx_3 dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} (\tau_2 dx_3 dx_1) dx_2, \\ & -\tau_3 dx_1 dx_2, \quad \tau_3 dx_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tau_3 dx_1 dx_2) dx_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

若再把 τ_{ij} 定义为

$$\tau_i \equiv \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_j} \quad (i=1, 2, 3), \quad (3.3)$$

且設变形前 dx_1, dx_2, dx_3 所包围的微小六面体上, 变形后作用的体力为 $P dx_1 dx_2 dx_3$, 則在这个微小六面体上作用的力及力矩的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 (\partial \tau_i / \partial x_i) + P = 0, \\ & \tau_{ij} = \tau_{ji}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

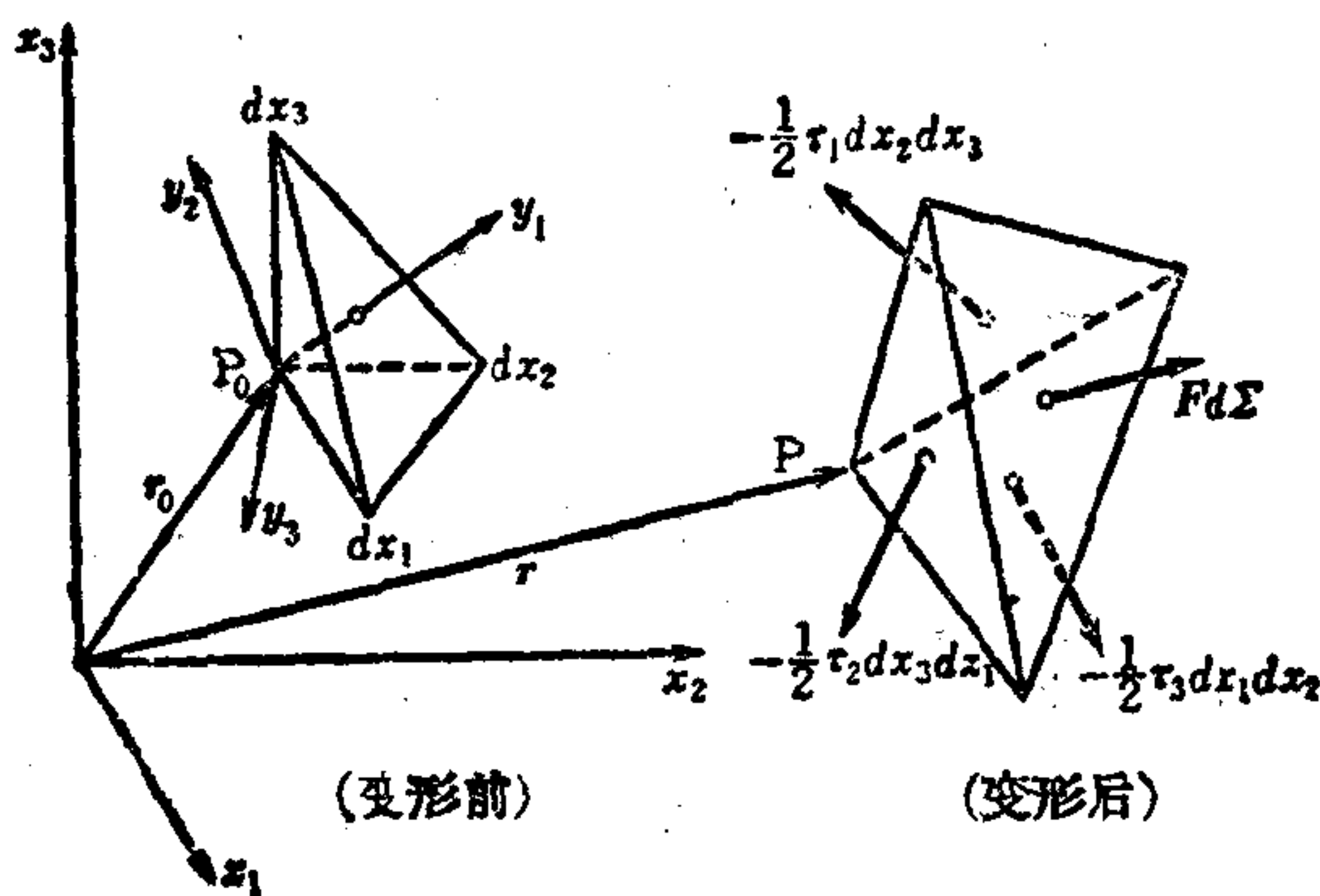


图 3.2 微小四面体

为了推出 τ_{ij} 的变换律, 考虑图 3.2 那样的微小四面体的平衡。設变形前这个微小四面体的斜面的面积是 $d\Sigma$, 变形后在这