

現代应用数学丛书

非线性振动论

〔日〕古屋茂 著
南雲仁一

上海科学技术出版社

2
528

現代应用数学丛书

非綫性振动论

〔日〕 古屋 茂 著
南雲 仁一

呂 紹 明 譯
朱 照 宣 校

上海科學技術出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中译本,简洁而概括地介绍了非线性振动理论的基本成果。全书共分:自治系统的几何方法,自治系统的解析方法,非自治系统的几何方法,非自治系统的解析方法等四章。所取数学模型限于二维系统,即相应于力学中单自由度系统或电学中的单回路系统。对实际振动问题中高于二维的情况,亦可从本书得到借鉴。

本书可供高等学校数学系、物理系、无线电系师生以及有关的工程技术人员参考。

现代应用数学丛书

非 线 性 振 动 论

原 书 名 非 线 型 振 动 論

原 著 者 (日) 古 屋 茂 著
南 雲 仁 一

原出版者 岩 波 书 店 1957

译 者 吕 紹 明

校 者 朱 照 宣

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业许可证出 093 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

商务印书馆上海厂印刷

*

开本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ 印张 3 26/32 字数 88,000

1962 年 9 月第 1 版 1962 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—5,500

统一书号: 13119 · 476

定 价: (十四) 0.66 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册,分成A、B两组,各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并,整理成42种,不另分組編号,陸續翻譯出版。

这套书涉及的面很广,其內容都和現代科学技术密切有关,有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富,而叙述扼要,篇幅不多,有利于讀者以較短時間掌握有关学科的主要內容。虽然,这套书的某些观点不尽适合于我国的情况,但其方法可供参考。因此,翻譯出版这一套书,对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陸續出版的,写作時間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理,为了尽可能地减少这种影响,我們在每一譯本中,特請譯者或校閱者撰写序或后記,以介紹有关学科的最近发展状况,并对全书內容作一些評价,提出一些看法,結合我国情况补充一些資料文献,在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志,为提高书籍的质量付出了巨大劳动,在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

序

一个物理的振动系统,当它的元素都服从线性规则时,可以用线性方程来表示。在很多元素中,有关的物理量的变化不能视为(在某种意义下)很小,因而出现非线性,对应的方程就是非线性方程。还有,在元素的微小变化不服从线性规则的情况下,也成为非线性方程^①。凡是由非线性方程描述的振动统称为非线性振动^②。很早 H. Helmholtz, J. Rayleigh 就注意过非线性振动,但引起特别的注意还是 1920 年前后的事,例如 B. van der Pol 和 G. Duffing 的工作。成为问题的方程的形式在很多情况中是简单的,但分析一些复杂的试验结果时就遇到意外的困难,还不能用数学的方法来完成。

非线性振动的研究一向是以工程技术问题为主,特别在电系统和机械系统中。一般说来,在机械中采取各种方法来防止振动的发生;在电系统中,因为电振荡和通讯工程相关,振荡被用来达到通讯的目的。所以振动理论,特别是非线性振动理论,在电讯工程学中内容最丰富。非线性振动问题的主要部分是随着电工学发展起来的,其中许多所处理的对象关系到非线性回路中的振荡。它们在数学上就表示为非线性的常微分方程,而周期解的稳定性则是其中心问题。总之,这里主要的目标是研究非线性振动现象在大范围内的性质,因此相应的数学方法也着重于非小范围的(非局部的)手法。

除了振动以外,还有其他重要的非线性问题,这些统称为非线性力学。

① 上述两种非线性分别称为可线性化的和不可线性化的。——校者注

② 在电学中译为振荡、在力学中称振动,统称时用振动。——校者注

本书的目的是对于振动的数学模型，特别是非綫性振动的数学模型（即非綫性現象的数学表現——非綫性方程）作初步的說明，說明其中主要的数学分析方法，假設讀者并不具有特别的准备知識。这种数学方法关系到天体力学中发达的理論，即 H. Poincaré 的摄动理論和 A. M. Ляпунов 的稳定性理論，以及关于一阶方程的 Poincaré-Bendixson 的理論，H. M. Крылов, H. H. Боголюбов 和 N. Levinson 等人发展的重要理論。限于篇幅，本书不能对上述数学方法全部介紹，而只介紹和应用直接有关的基本部分，所取的数学模型限于二元联立常微分方程（或二阶常微分方程）。对非綫性方程所举的例子，是非綫性現象的典型模型，以便尽可能說明一些基本的非綫性現象。这里着重考虑了統一的現象，着眼于这种現象有什么性质，因而相应的模型可能有什么样的变化。这就省去了无益的冗长的計算，以便有效地将應該注意的現象的主要性质鮮明地表达出来。虽然例示的模型中照原样并不适用于現代技术的也不少，但是它們还表示了問題的实质。

如前所述，过去研究非綫性問題主要是沿着工程技术方向进行的。但非綫性問題并不仅仅限于自然現象，而且广泛地存在于生物界、心理世界和社会現象，特別在經濟現象中它是显著的。在自然界中的非綫性現象，一旦抽象化成为数学模型，其結果显然就可适用于其他范围，目前已經有这种尝试。

在进入本論以前，先简单地說明非綫性振动的研究情况。

1920 年，荷兰无綫电工程师 B. van der Pol 和 E. V. Appleton 为了說明三极管振蕩器的波形，从研究电子管的非綫性特性开始，导出了 van der Pol 方程；二十年代有許多非綫性振动方面的研究，但只能說是建立了非綫性振动理論的基础。在这以后，W. M. H. Greaves 等关于 Poincaré 天体力学中微分方程的研究是有成效的，同时 A. Liénard 等也有貢獻，但是真正惊人的发展則是在 1930 年研究中心轉移到苏联以后的十年。

苏联有两个完全独立的学派进行过研究。一个是以莫斯科振动研究所

为中心的学派,另一个是基輔的 Крылов, Боголюбов 等人。

1930 年,物理学家 Л. Мандельштам 在莫斯科創設了振动研究所。数学、物理、电工学等方面的許多专家在这里协力合作,对非綫性振动作深入的研究。其中特別著名的有 Л. С. Понтрягин, Н. Д. Папалекси, А. А. Андро́нов, С. Э. Хайкин, А. А. Витт 等人,他們除了采用 Poincaré 的方法以外,实际上还运用了 Ляпунов 的稳定性理論(1892 年在俄国发表,1907 年西欧才知道)。这个学派的許多成績的一部分就是 Андро́нов-Хайкин 的“振动理論”(1937 年在莫斯科出版,1949 年由 S. Lefschetz 譯成英文^①)。

另一方面,Крылов, Боголюбов 在 1930 年发表了許多关于拟調和振动的論文,1934 年和 1937 年在基輔发行了“非綫性力学”一书(1943 年, Lefschetz 节譯为英文出版)。

1930 年以来苏联的惊人发展,在第二次大战以前外国都不知道。在大战时期中, N. Minorsky 在自动控制問題中指出非綫性力学是有用的,同时介紹苏联的进展,出版了“非綫性力学引論”一书。以此为起点,美国和西欧的非綫性振动研究也开始了,許多学者开始关心这个問題。在数学方面进行研究的,以 S. Lefschetz 为首,有 M. L. Cartwright, N. Levinson, K. O. Friedrichs, W. Wasow, J. J. Stoker, J. Haag, N. W. McLachlan 等人。

苏联現在仍然保持很高的水平,И. Г. Малкин, Н. Н. Баутин 等发表了許多研究成果,在这方面的专著也很多,特別是 В. В. Немыцкий, В. В. Степанов 的“微分方程定性理論”^②(1947)和 Б. В. Бугаков 的“振动”(1954)是有名的。

下面叙述的方法,将大致分为几何的(或拓扑的)方法和解析的方法。这样的区分是便利的,大体上前者适合于定性的研究,而后者則显然对定量的研究很有效。

关于变量 t (或者 τ) 的微分方程,如果它不明显地含有 t ,叫做是自治的 (autonomous); 明显含有 t 的叫做非自治的 (non-

① 1959 年在莫斯科出版的“振动理論”补上了原作者之一 Витт 的名字,并且由 Андро́нов 的学生 Н. А. Железцов 作了补充和修訂。Lefschetz 的英譯本是按 1937 年版节譯的。——校者注

② 有汉譯本,王柔怀、童勤謨譯,科学出版社,1956, 1959。——校者注

autonomous)。本书中 $\dot{f}$ 代表 $\frac{df}{dt}$ 。在下面的第一章说明研究自治系统

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y)$$

的几何方法。第二章主要是关于

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) \quad (\text{其中 } 0 < \mu \ll 1)$$

的解析方法。第三章是关于非自治系统

$$\dot{x} = P(x, y, t), \quad \dot{y} = Q(x, y, t)$$

的几何方法。第四章主要是关于

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, t) \quad (\text{其中 } 0 < \mu \ll 1)$$

的解析方法。

目 录

出版說明

序

第1章 自治系統的几何方法	1
§ 1 相平面和相点	1
§ 2 平衡点	3
§ 3 Ляпунов 的第二方法	9
§ 4 閉軌道和极限环	11
§ 5 van der Pol 方程, Rayleigh 方程, Liénard 方程	14
§ 6 負阻尼和自激振动	23
§ 7 不連續系統	29
§ 8 結構稳定的系統	39
第2章 自治系統的解析方法	41
§ 9 摄动法	41
§ 10 平均法	45
§ 11 綫性化法	49
第3章 非自治系統的几何方法	51
§ 12 周期系数綫性方程	51
§ 13 变换 T	56
§ 14 不动点和周期解	59
§ 15 关于稳定性	62
§ 16 一致有界性	65
第4章 非自治系統的解析方法	69
§ 17 摄动法	69
§ 18 綫性化法	82
§ 19 間歇法	84
§ 20 一般情形	88
§ 21 一般的近似方法(一)	89
§ 22 一般的近似解法(二)	98
§ 23 关于拟調和振动	102
参考文献	111
校后記	113

第1章 自治系統的几何方法

本章对下列方程:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \quad (1)$$

解的状况作几何学的研究,并用来研究(1)式所表示的物理系統的运动情况。

§1 相平面和相点

設 t 为時間,則(1)式可以解釋为規定在 xy 平面上的一点 (x, y) 即相点的运动。这点的运动軌迹叫作軌道, xy 平面称为相平面。

相平面上使 $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ 的点,即使

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$$

的点 (x_0, y_0) 叫作(1)式的平衡点。此时

$$x(t) = x_0, \quad y(t) = y_0$$

是(1)的解。平衡点是仅由一点組成的軌道,可是以后所謂軌道将不包括所有平衡点。

設物理系統的运动方程为

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}),$$

它可以写成(1)的形式:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x, y).$$

这个系統的状态是由位置 x 和速度 $\dot{x}$ 所确定,所以采用相点和相平面的說法。当 $f(a, 0) = 0$ 时,則 $x = a$ 滿足 $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ 。在位置 a 的靜止状态对应于

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x, y)$$

的平衡点 $(a, 0)$ 。

以下除非预先特殊声明, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 取作为 x 和 y 的实解析函数; 即 P 与 Q 是实函数, 且在任意点 (a, b) 的邻近能展成收敛的幂级数。在这情况下, 对于任意的 a, b , (1) 式总有唯一的解存在, 当 $t=t_0$ 时, $x=a, y=b$ 。(参照本丛中《常微分方程》第 33 页。) 其中平衡点假定是孤立的 (即在平衡点充分邻近处没有其他平衡点), 于是在相平面的有限范围内, 平衡点只能是有限个。

设通过平衡点 (x_0, y_0) 轨道上有一活动相点 $(x, y) (\neq (x_0, y_0))$, 它实际上需要无限的时间^① 才能到达平衡点。这是因为, 假如它在有限时间^② 到达平衡点, 则在解 (x_0, y_0) 以外还有解, 此与解的唯一性矛盾 (设 $t=t_0$ 时 $x=x_0, y=y_0$, (1) 式唯一的解是 $x(t) \equiv x_0, y(t) \equiv y_0$)。

其次, 设有正数 T , 对于任意的 t , 若 (1) 式的解满足

$$x(t+T) = x(t), \quad y(t+T) = y(t),$$

则该解称为周期解, T 称为周期。平衡点所表示的解

$$x(t) = a, \quad y(t) = b$$

也是周期解。不过以后为了方便, 所谓周期解将专指平衡点所表示的解以外的情况。不通过平衡点的单一闭曲线组成的轨道称为闭轨道。在相平面上周期解表示为闭轨道。

在 (1) 的解里, 相平面上平衡点或闭轨道所表示的那些解是重要的, 因为下列定理成立 (证略)。

设相平面上 (1) 式的解当 $t \rightarrow +\infty$ (或 $t \rightarrow -\infty$) 时在有限范围内逗留, 则总有下列情况之一: (a) 解自身是平衡点或闭轨道; (b) $t \rightarrow +\infty$ (或 $t \rightarrow -\infty$) 时, 解趋近于平衡点或闭轨道; (c) 当 $t \rightarrow +\infty$ (或 $t \rightarrow -\infty$) 时, 解无限接近于由有限个平衡点和有限个轨道所组成的图形, 图形中每一个轨道当 $t \rightarrow +\infty$ 和 $t \rightarrow -\infty$ 时, 趋向于这些平衡点之一。

下面在 § 2, § 3 中说明平衡点, 在 § 4 中说明闭轨道。

① 即 $t \rightarrow +\infty$ 或 $t \rightarrow -\infty$ 。——校者注

② 设它在 $t=t_0$ 时到达 (x_0, y_0) , 就取 $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ 为起始条件。——校者注

設(1)式的右边是 x 的周期函数(周期为 L)，为了观察軌道的形状，可以不用 xy 平面，而将二直綫

$$x = x_0, \quad x = x_0 + L$$

当作同一直綫，并在正圓柱面上考虑；这种方法是方便的。如果右边对于 x 和 y 都是周期的，則采用在圓环面考虑的方法是方便的。

§2 平衡点

在相平面上 (1) 式平衡点 (x_0, y_0) 附近的相点随着時間的增加，可能是从平衡点离开，也可能不是这种情形。在前一种情形 (x_0, y_0) 叫作不稳定的平衡点，在后者則叫作稳定的平衡点。这就是說，如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，能够适当地确定 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ，使得在 $t = t_0$ 时，通过以 (x_0, y_0) 为中心、 δ 为半径的圓內的点的(1)式的解 $(x(t), y(t))$ ，在 $t > t_0$ 时就逗留在以 (x_0, y_0) 为中心、 ε 为半径的圓內，則(1)式的平衡点 (x_0, y_0) 是稳定的。不是稳定的平衡点叫作不稳定的。

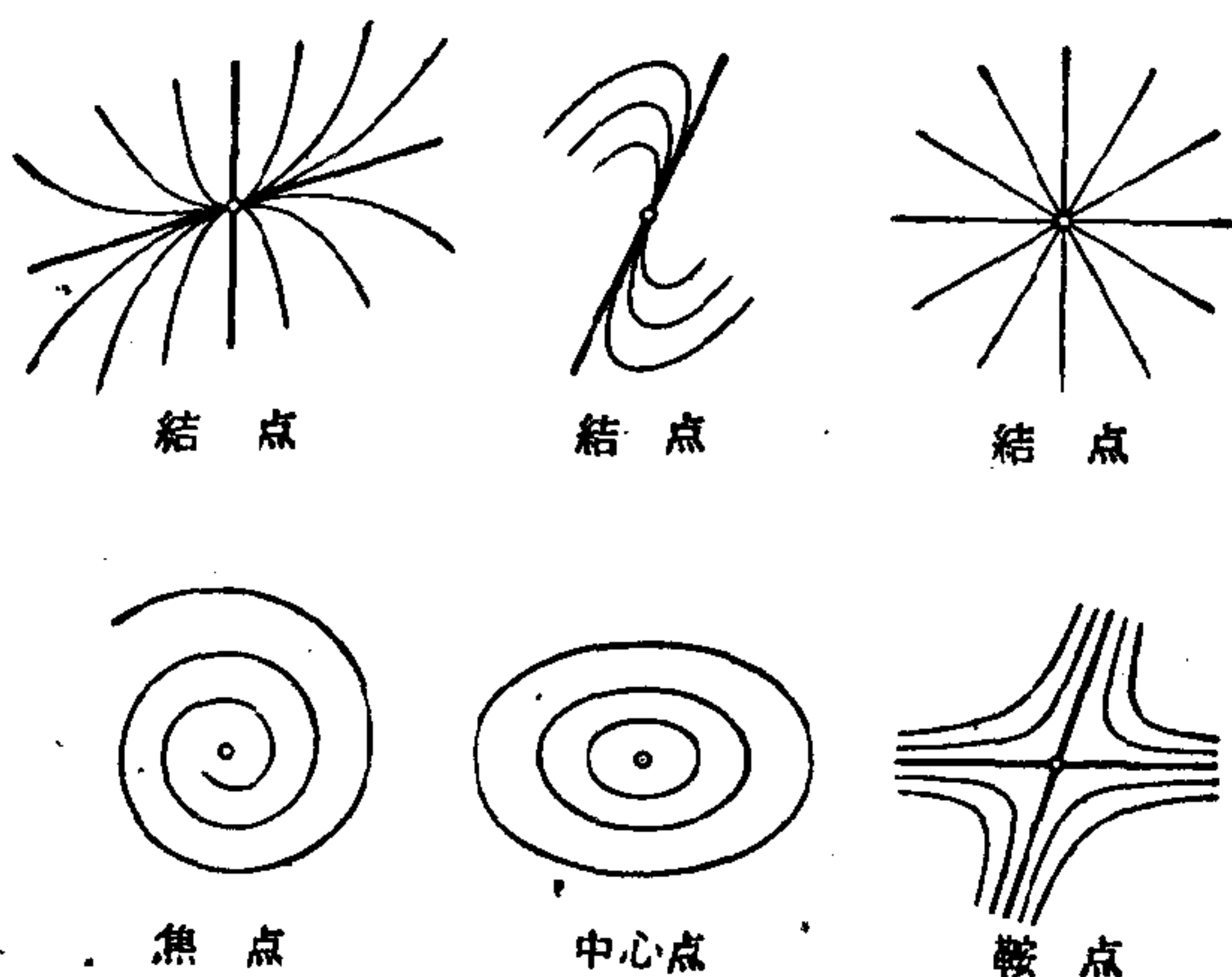


图 2.1

在平衡点邻近軌道的形状如图 2.1 所示，一般可区分为結点 (node)，焦点 (focus)，中心点 (centre) 和鞍点 (saddle) (以后所述

特殊情形除外)。中心点是稳定的,鞍点是不稳定的;而结点和焦点则可能是稳定的,也可能是不稳定的。设当 t 增加时相点趋于轨道上的平衡点,则结点或焦点是稳定的,由平衡点离开则是不稳定的。

下面分别说明。在平衡点 (x_0, y_0) 处,令

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0), & b &= \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0), \\ c &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0), & d &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

则(1)式变为下列形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) - P(x_0, y_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + \dots, \\ \dot{y} &= Q(x, y) - Q(x_0, y_0) = c(x - x_0) + d(y - y_0) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

其中设 $ad - bc \neq 0$, 若无此假定,将出现图 2.1 以外的类型。

此处取

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0,$$

并取(2.2)右边的一次项,考虑下列方程:

$$\dot{\xi} = a\xi + b\eta, \quad \dot{\eta} = c\xi + d\eta. \quad (2.3)$$

这里在(2.2) (亦即(1))的平衡点 (x_0, y_0) 邻近解的形状就是(2.3)的平衡点 $(0, 0)$ 邻近解的形状,几乎没有变化。这是根据(2.2)右边二次以上的项远比一次项小的情况而设想的。实际上,(2.3)的平衡点 $\xi = 0, \eta = 0$ 的类型与(1)式的平衡点 $x = x_0, y = y_0$ 的类型是一致的,除去例外的情况(证略)。所谓例外,是指当 $\xi = 0, \eta = 0$ 是中心点时, $x = x_0, y = y_0$ 可能是中心点,也可能是焦点。

(2.3)是容易积分的。由(2.3)消去 η , 则有

$$\ddot{\xi} + p\dot{\xi} + q\xi = 0, \quad p = -(a+d), \quad q = ad - bc \neq 0.$$

从而求得 $\rho^2 + p\rho + q = 0$ 的两根 ρ_1, ρ_2 . 当 $\rho_1 \neq \rho_2$ 时,

$$\xi = A \exp(\rho_1 t) + B \exp(\rho_2 t),$$

而当 $\rho_1 = \rho_2$ 时,

$$\xi = (A + Bt) \exp(\rho_1 t) \quad (A, B \text{ 为任意常数}).$$

随后当 $b \neq 0$ 时 η 由 (2.3) 的第一式确定, $b = 0$ 时由第二式所确定。

于是, 从 (2.1) 作出 $p = -(a + d)$, $q = ad - bc \neq 0$, 根据二次方程 $\rho^2 + p\rho + q = 0$ 根的性质, 可将 (1) 式的平衡点分类如下:

$p > 0, p^2 \geq 4q > 0$ (两根均为负) $\rightarrow$ 稳定的结点 (1)。

$p > 0, 4q > p^2$ (实部为负的复数) $\rightarrow$ 稳定的焦点 (2)。

$p = 0, q > 0$ (纯虚数) $\rightarrow$ 中心点 (3) 或焦点 (2) (4)。

$p < 0, 4q > p^2$ (实部为正的复数) $\rightarrow$ 不稳定的焦点 (4)。

$p < 0, p^2 \geq 4q > 0$ (两根均为正) $\rightarrow$ 不稳定的结点 (5)。

$q < 0$ (两根异号) $\rightarrow$ 鞍点 (6)。

图 2.2 就表示这些关系。如前所述, $q = 0$ 的情况从开始就被除去了。

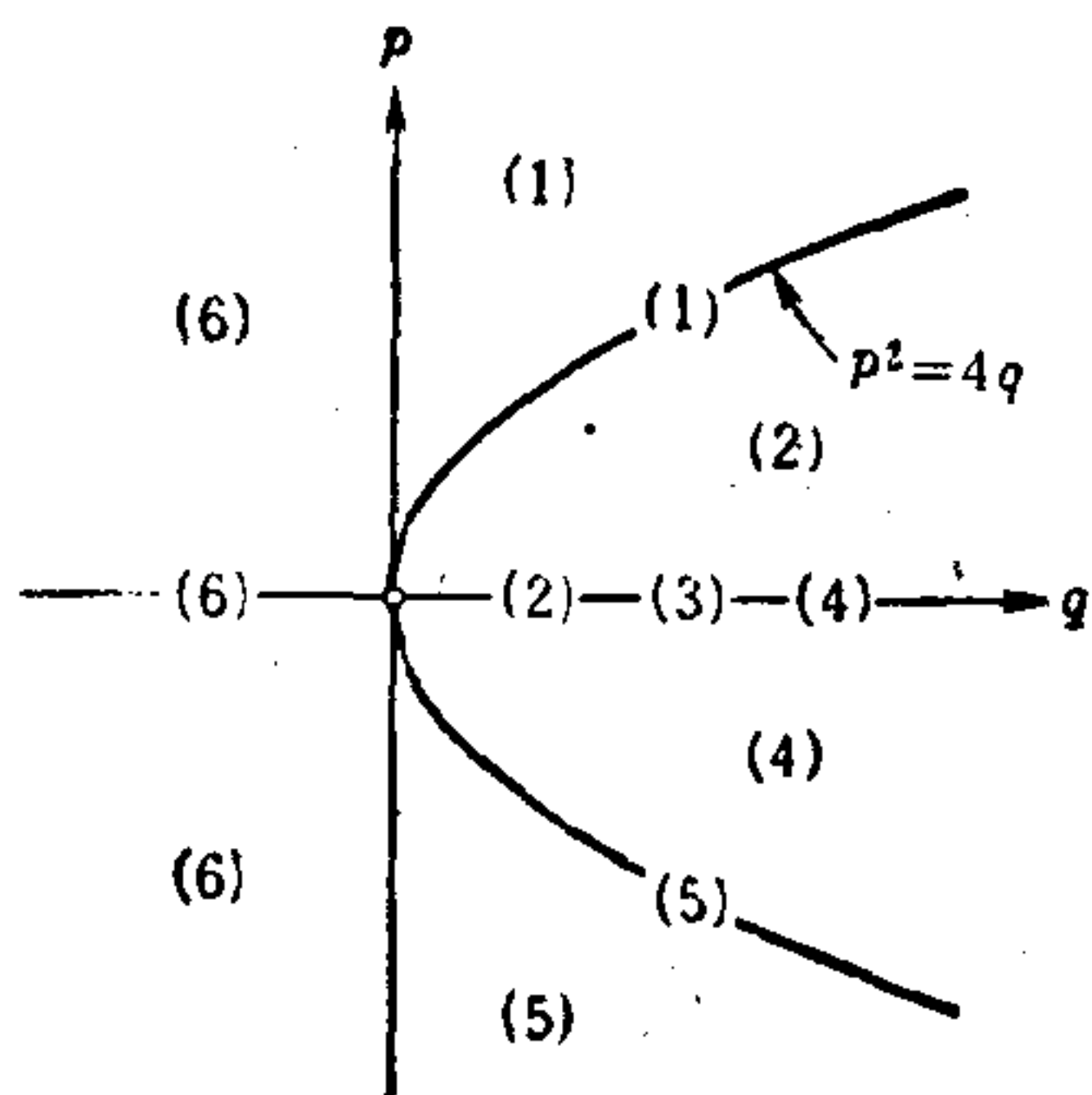


图 2.2

(1) 式在一般情况 (P, Q 是解析函数, 平衡点是孤立的) 中出现的平衡点, 除上述焦点、中心点、结点和鞍点以外, 还有下列的类型。如将平衡点的邻近, 分成为有限个以平衡点为中心的扇形部分, 则分别出现抛物型 (对应于一次近似中的结点, 可以是稳定的或不稳定的), 双曲型 (对应于一次近似中的鞍点, 不稳定的), 以及椭圆型 (一次近似中不出现, 一般为不稳定) 等类型 (参阅图 2.3)。

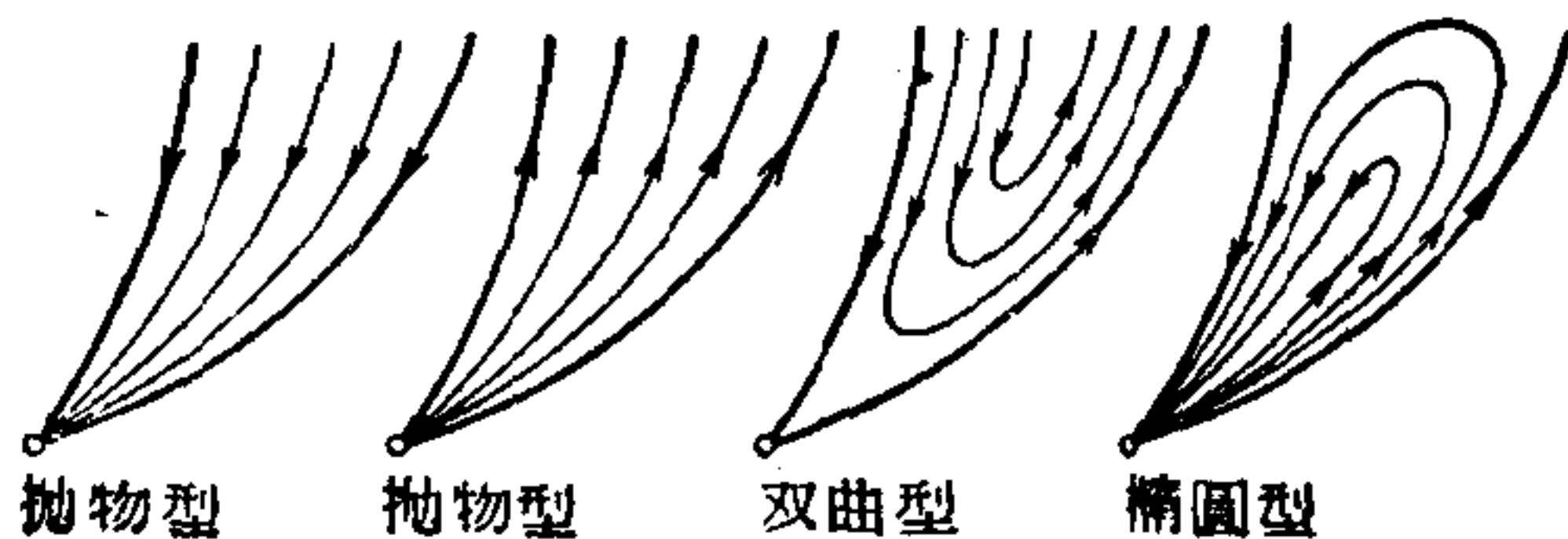


图 2.3

在运动方程为 $\ddot{x}=f(x, \dot{x})$ 的情形中, 则 $\dot{x}=y, \dot{y}=f(x, y)$, 在平衡点 $(a, 0)$ 处 ($f(a, 0)=0$) 有

$$p = -f_{\dot{x}}(a, 0), \quad q = -f_x(a, 0).$$

因此, 若 $f_x > 0$, 则得鞍点 (不稳定); 若 $f_x < 0$, 则在 $f_{\dot{x}} > 0$ 的情况中平衡点为不稳定, 在 $f_{\dot{x}} < 0$ 的情况中为稳定。若 $f_x < 0$ 而且 $(f_{\dot{x}})^2 > -4f_x$, 则得结点; 若 $(f_{\dot{x}})^2 < -4f_x$, 则得焦点。趋近 (或离开) 焦点平衡点时, x 的动作是振动性的, 趋近 (或远离) 结点平衡点时, x 的动作是非振动性的。

(1) 式的更简单的方程是: $\dot{x}=P(x)$, 这里平衡点是使 $P(a)=0$ 的点 $x=a$ 。若 $P'(a) < 0$, 则在 a 点邻近的相点随 $t \rightarrow +\infty$ 而趋近于 a (稳定)。若 $P'(a) > 0$, 则从 a 点离开 (不稳定)。一般说来, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, x 或者趋近一个平衡点, 或者 $x \rightarrow \pm\infty$ 。

这里还应注意, 所谓不稳定的平衡点, 对应于物理上不能实现的平衡状态。在一般物理现象中, 由于系统中经常有微小的干扰作用, 所以我们说系统不可能停留在不稳定的平衡状态。

例 如图 2.4 所示, 考虑两台串激式直流发电机 (D_1, D_2) 的并联运转, 其共同负荷为 R 。为了简单起见, 设两台发电机具有同一特性: $E=f(i)$ (图 2.5, 其中 f 是奇函数)。由 Kirchhoff 法则 (以后简称为 Kh 法则),

$$L\dot{i}_1 + ri_1 + R(i_1 + i_2) = f(i_1),$$

$$L\dot{i}_2 + ri_2 + R(i_1 + i_2) = f(i_2).$$

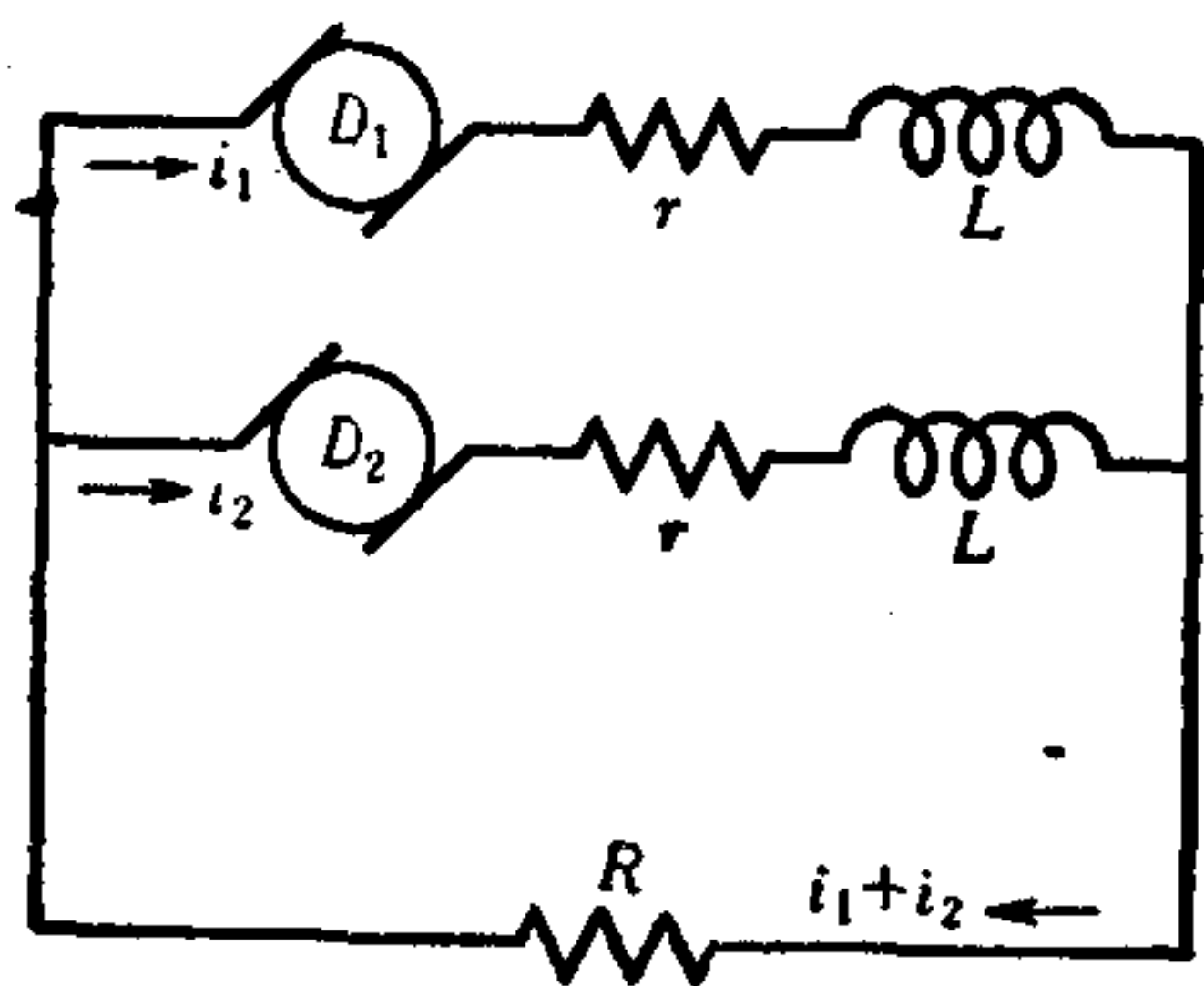


图 2.4

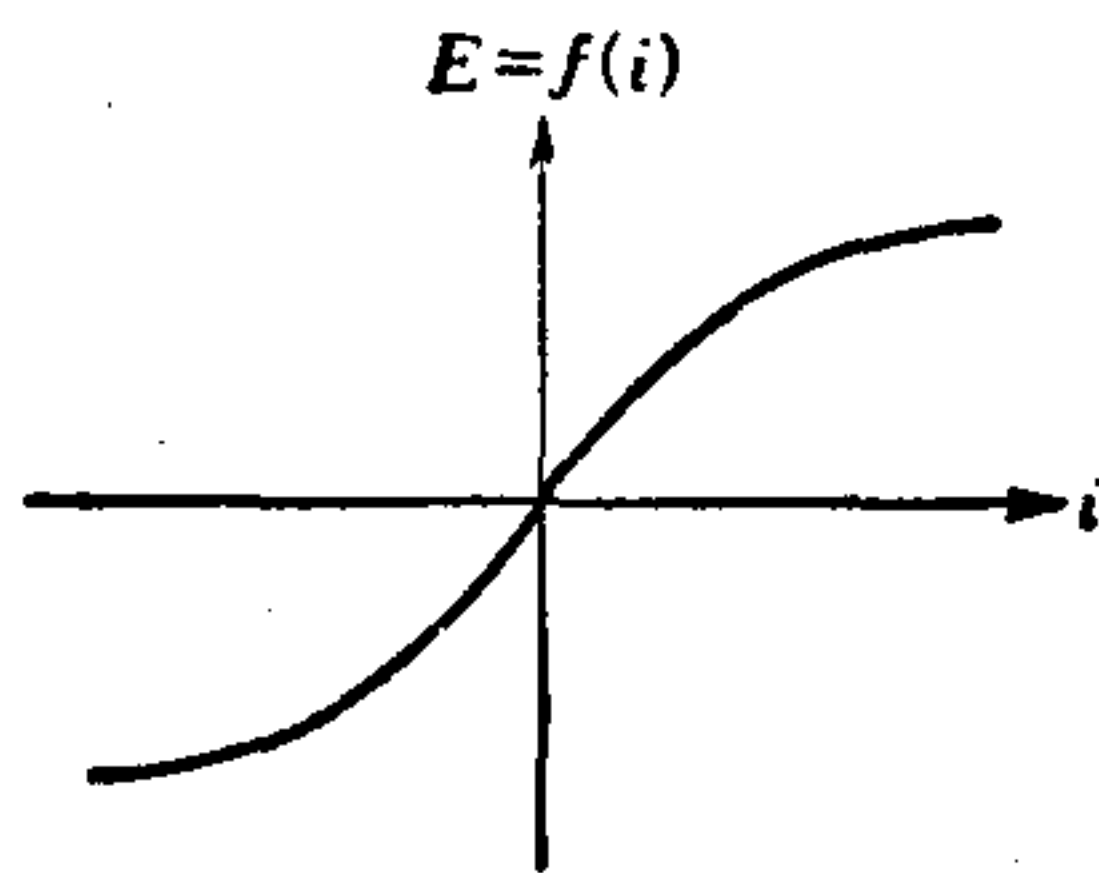


图 2.5

这里的平衡点是 (i_1, i_2) 平面上两根曲线:

$$ri_1 + R(i_1 + i_2) = f(i_1), \quad ri_2 + R(i_1 + i_2) = f(i_2)$$

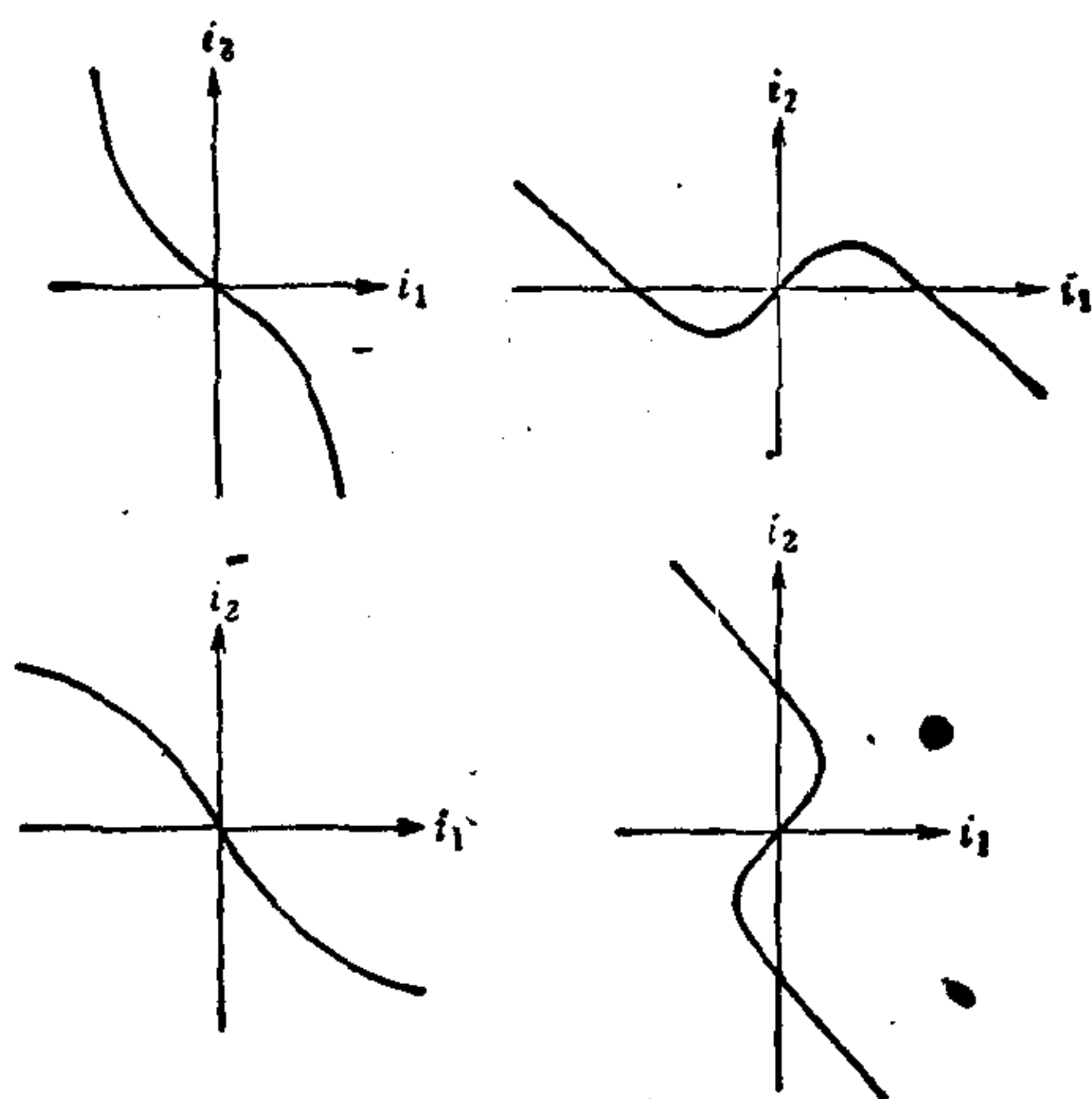


图 2.6

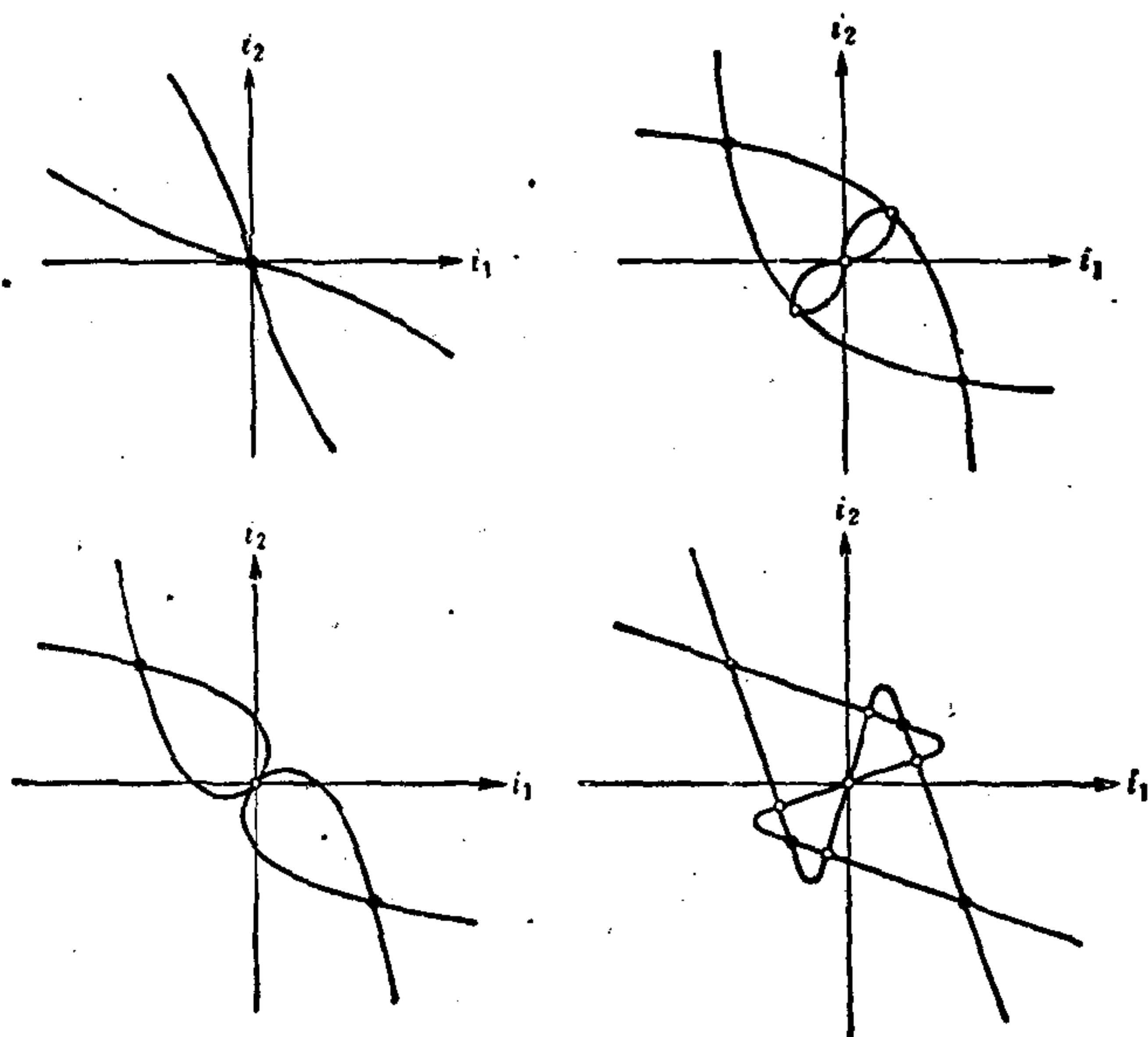


图 2.7

的交点。这两根曲线可能如图 2.6 所示①。从而平衡点可能如图 2.7 所示，共有一个、三个、五个或九个。假如 $r > f'(0)$ 原点为稳定的。假如 $r < f'(0)$ 原点为不稳定的。更当 $f'(0) - 2R < r < f'(0)$ 时，为鞍点（不稳定）。 $r < f'(0) - 2R$ 时为不稳定的结点（图 2.7）。各种情况的相平面的大体模样如图 2.8 所示②。值得注意的是，直线 $i_1 + i_2 = 0$ 上的平衡点（原点除外）全部是稳定的。这种平衡点对应的状态就是供给负荷的电流 $i_1 + i_2 = 0$ ，意思是由一个发电机所产生的电流全为另一发电机消耗掉。第二个发电机实际上起了电动

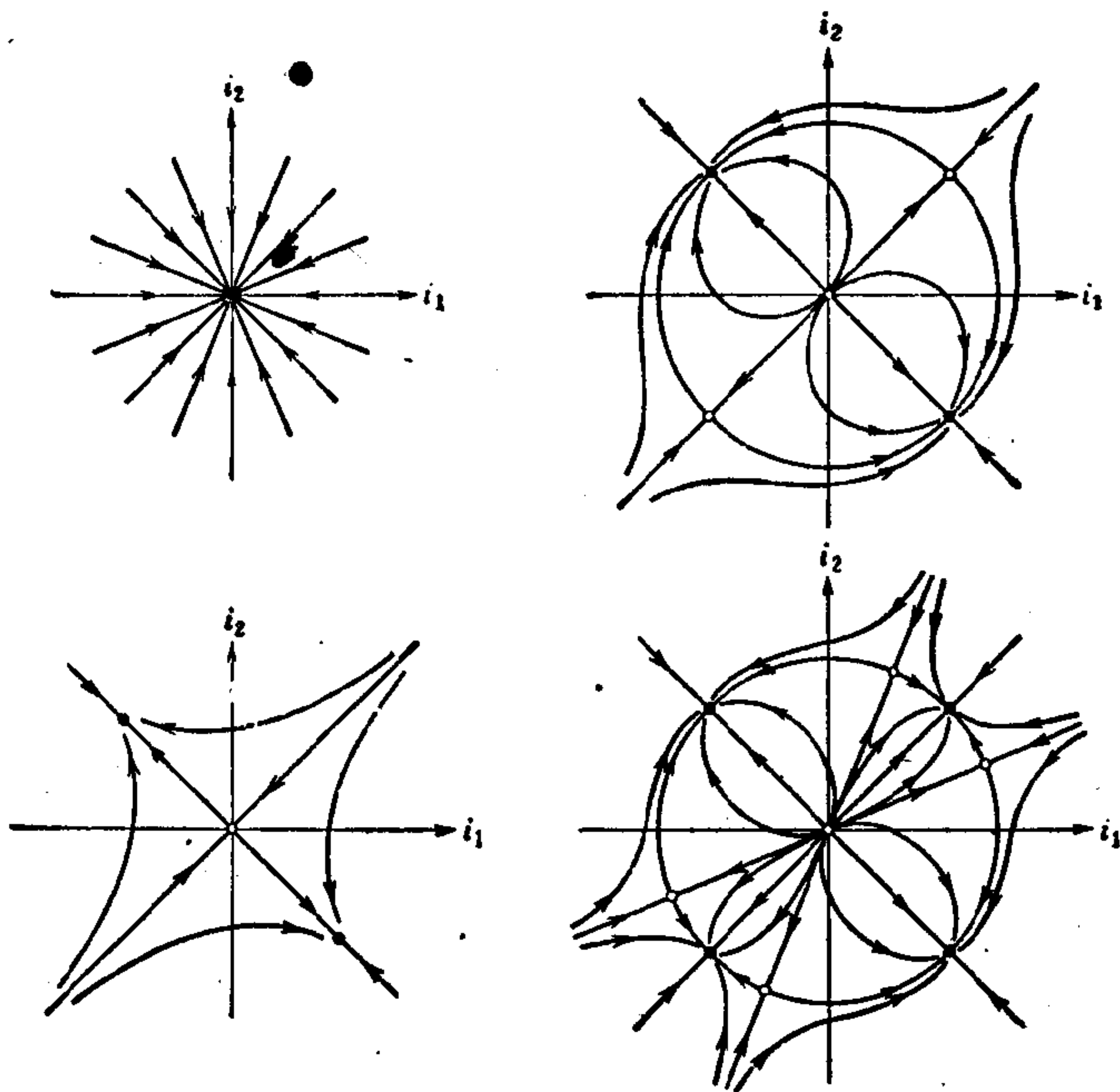


图 2.8

① 当 $f'(0) < r + R$ 时，这两根曲线分别如图 2.6 中左上、左下所示。当 $f'(0) > r + R$ 时，这两根曲线分别如图 2.6 中右上、右下所示。——校者注

② 图 2.7 和图 2.8 中四种情形分别为：左上， $r > f'(0)$ ，一个平衡点；左下， $f'(0) - 2R < r < f'(0)$ ，三个平衡点；右上， $r < f'(0) - 2R$ 且 $r < f'(a)$ ，五个平衡点；右下， $r < f'(0) - 2R$ ，且 $r > f'(a)$ ，九个平衡点；这里 $a \neq 0$ 且 (a, a) 是平衡点。——校者注