现代数学及其应用

李新洲　徐建军　著

上 海 科 学 技 术 出 版 社

内 容 提 要

本书是一部以应用为目的的现代数学著作，介绍了集合、拓扑、群、微分几何、非线性方程等现代数学的基础理论，并讨论了它们在现代物理学与天体物理学中的应用，特别是群在规范理论、同伦论在宇宙拓扑缺陷、非线性方程在宇宙学中的应用。其中含有作者在拓扑缺陷、宇宙动力学方面的工作。

本书首先介绍了集合、拓扑及分形的基础内容，以及这些数学概念的一些应用；其次讲述了有限群和李群在规范理论与相对论中的应用；再次介绍了微分流形、微分同胚、霍奇（Hodge）算子、同调群和同伦群，及它们在电磁场理论和天体物理中的应用；最后讨论了物理学、力学、地球科学、生命科学及各类工程技术领域中会遇到的各种各样的非线性方程，并讨论了在宇宙动力学中的应用。

本书主要适合数学、物理、天文和力学方面的研究生和科研人员阅读。

目　　录

（带 * 号的章节初学者可以略过，而不影响后面章节的阅读。）

第 1 章　集 合 与 拓 扑

集合与拓扑在近代数学的发展中起着极为重要的作用，也是学习现代数学的基础。可以说，数学在本质上就是研究集合上的各种结构以及关系的学科。本章将简要介绍集合论和拓扑空间的一些基本概念和基本性质。作为应用的例子，讨论了局中人集合，并在这些基础上叙述了阿罗(Arrow)不可能性定理。

§1.1　集合的基本概念

集合是一个古老的数学概念，但集合论真正成为一门严格的数学学科是从德国著名数学家康托尔(G. Cantor，1845—1918)开始的。他曾这样来描述集合："所谓集合，是我们直觉中或理智中的、确定的、互不相同的事物的一个汇集，被设想为一个整体(单体)。"人们一度认为集合的概念是不需定义的，只要描述性地说明就可以了，但很快就发现这会引起一些悖论。

理发师悖论　小岛上唯一的理发师宣称：我为岛上所有不给自己理发的人理发，而不给那些为自己理发的人理发。那么，这位理发师该不该为自己理发呢？他实际上把岛上居民分成了两类，A 类是为自己理发的那部分居民，B 类是由不属于 A 类的人组成。在他的理发规则下，他不能为自己理发，也不能不为自己理发。即他不能属于 A 类，也不能不属于 A 类。

这个悖论是英国著名哲学家罗素(B. Russell，1872—1970)在 1903 年提出的，曾经引发了数学史上的第三次危机(前两次危机是无理数的发现和无穷小量的定义)。理发师悖论告诉我们，集合的概念并没有想象中那么简单。集合论必须建立在一套公

理体系之上。

1. 集合的定义

定义 满足一定条件的若干个(有限或无限,离散或连续)对象的全体称为一个集合(set)。组成集合的对象称为集合的元素(element)。通常用大写字母 A, B, …表示集合,用小写字母 a, b, …表示集合的元素。用 $a \in A$ 来表示 a 是集合 A 的元素,而 $a \notin A$ 表示 a 不是集合 A 的元素。没有元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$。元素数目有限的集合称为有限集,有无限个元素的集合称为无限集。无限集又可分为可数集和不可数集。可以这样来表示一个集合,如由 ± 1, $\pm \mathrm{i}$ 构成的集合可记为

$$A = \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}, \tag{1.1}$$

或者

$$A = \{x \mid x^4 - 1 = 0, x \in \mathbf{C}\}。 \tag{1.2}$$

集合的类型可以是非常广泛的。比如"年龄在 20—25 岁之间的学生"可以组成一个集合;"银河系中的恒星"也可以组成一个集合。几个常用的数集见下例。

例 自然数集 $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 可数集。

整数集 $\mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, 可数集。

有理数集 $\mathbf{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$, 可数集。

实数集 $\mathbf{R}$,不可数集。

复数集 $\mathbf{C} = \{x + \mathrm{i}y : x, y \in \mathbf{R}\}$, 不可数集。

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即 $x \in A \Rightarrow x \in B$, 则称 A 为 B 的子集,记作 $A \subseteq B$。显然有 $A \subseteq A$。空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集。如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 即集合 A 的元素都是集合 B 的元素,但集合 B 中至少有一个元素不属于 A,则称 A 为 B 的真子集,记作 $A \subset B$。如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称集合 A 与集合 B 相等,$A = B$。

一个集合的所有子集也构成一个集合,称为集合 A 的幂集,

记作 2^A。例如设

$$A=\{a,b\},\tag{1.3}$$

则其所有的子集构成的集合为

$$2^A=\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\varnothing\}。\tag{1.4}$$

可以证明，对于有限集，如果集合 A 有 n 个元素，则集合 2^A 具有 2^n 个元素。对于无限集，情况比较复杂，此处不予讨论。我们只指出一点，实数集 $\mathbf{R}$ 的元素数目要比整数集 $\mathbf{Z}$ 的元素数目“多”，幂集 2^A 的元素数目要比集合 A 的元素数目“多”，而有理数集 $\mathbf{Q}$ 的元素数目和整数集 $\mathbf{Z}$ 的元素数目“一样多”。一段实轴上的点的数目和平面上的点的数目也是“一样多”。

2. 集合的运算

我们把

$$A\bigcup B=\{x\in A\ \text{或者}\ x\in B\}\tag{1.5}$$

称为集合 A 与集合 B 的并。这是集合的加法。并集是由两个集合的所有元素组成的集合。若 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{c,d,e,f\}$，则

$$A\bigcup B=\{a,b,c,d,e,f\}。\tag{1.6}$$

而把

$$A\bigcap B=\{x\in A\ \text{且}\ x\in B\}\tag{1.7}$$

称为集合 A 与集合 B 的交。这是集合的乘法。交集是由两个集合的共同元素组成的集合。如果 $A\bigcap B=\varnothing$，则称集合 A 与集合 B 互不相交。在上例中，

$$A\bigcap B=\{c\}。\tag{1.8}$$

我们把

$$A-B=\{x\in A\ \text{且}\ x\notin B\}\tag{1.9}$$

称为集合 A 与集合 B 的差。这是集合的减法。差集是由集合 A

中不属于集合 B 的元素组成的集合。对于上例，

$$A-B=\{a, b\}。\tag{1.10}$$

这三种运算可用下列图形表示：

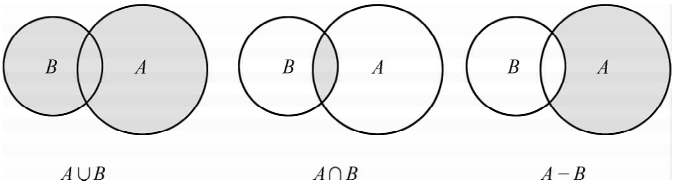

图 1.1

不难证明下列性质：

交换律

$$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A。\tag{1.11}$$

结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\tag{1.12}$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)。\tag{1.13}$$

分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),\tag{1.14}$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)。\tag{1.15}$$

吸收律

$$(A\cup B)\cap A=A, (A\cap B)\cup A=A。\tag{1.16}$$

对于差集运算，如果 A 是 X 的子集，则称差集 $X-A=A^c$ 为 A 关于 X 的补集。对于补集运算，有如下的德摩根(de Morgan)公式：

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\tag{1.17}$$

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c,\tag{1.18}$$

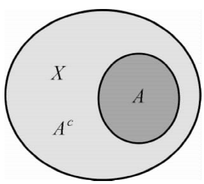

图 1.2

$$(A^c)^c = A,\tag{1.19}$$

$$A \cup A^c = X,\tag{1.20}$$

$$A \cap A^c = \varnothing。\tag{1.21}$$

最后，定义集合的直积运算，若 $a \in A$, $b \in B$, 则集合

$$C = A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\},\tag{1.22}$$

称为 A, B 的有序对集合，也称为集合 A, B 的直积。平面点的集合

$$\mathbf{R}^2 = \{(x_1, x_2), x_i \in \mathbf{R}\}\tag{1.23}$$

为实数集合 $\mathbf{R}$ 的二重直积 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$。一般地，有

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}\tag{1.24}$$

是实数集合 $\mathbf{R}$ 的 n 重积。

§1.2　映　射

设 A 和 B 是集合，如果存在一个对应关系或法则，使得对于 A 的任一元素 a，均有 B 中一个唯一的元素 b 与之相对应，则称这是一个从 A 到 B 的映射(map) f，记作

$$f: A \to B, a \to b = f(a)。\tag{1.25}$$

把 A 称为映射 f 的定义域，而把 $f(A) = \{f(a): \forall a \in A\} \subseteq B$ 称为映射 f 的值域。同时，把 $b = f(a) \in B$ 称为 a 的象。

显然，A 的每一个元素都具有唯一的象，但反之则不一定。A 的所有元素的象的集合就是映射 f 的值域。映射是通常的函数(数集到数集的映射，如实数集 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射)概念的推广。映射比函数要宽泛得多，函数、变换、各种运算、泛函和算符等等均可视为映射。

设有映射

$$f: A \to B,$$

如果 $f(A)=B$，即 A 的所有的象的集合就等于 B，则称 f 为 A 到 B 上的映射，也称为满射。

如果 $f(a)=f(a')\Rightarrow a=a'$，则称 f 为单映射或 1-1 映射。如果 $A=B$，且对所有的 $a\in A$，有 $f(a)=a$，则称 f 为 A 的恒等映射。

如果 f 为 A 到 B 上的 1-1 映射，则称其为双射。如果 f 为 A 到 B 上的 1-1 映射，则对于 $b=f(a)$，可以确定 $a=f^{-1}(b)$，由此可以确定映射 $f^{-1}: B\to A$。称 f^{-1} 为 f 的逆映射。逆映射是反函数的推广。

两个相继的映射可以复合为一个映射：如果

$$f: A \to B,\ g: B \to C, \tag{1.26}$$

则

$$h = g \circ f: A \to C \tag{1.27}$$

称为 f 和 g 的一个复合映射。复合映射是复合函数的推广。显然，

$$f^{-1} \circ f = I_A: A \to A \tag{1.28}$$

或

$$f \circ f^{-1} = I_B: B \to B \tag{1.29}$$

为恒等映射。映射的结合满足结合律。

如果有映射

$$f: A \to B;\ g: B \to C;\ h: C \to D, \tag{1.30}$$

则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f: A \to D。 \tag{1.31}$$

有不少数学问题需要比较两个集合所含元素的多少。通常把一个集合 A 所含的元素数目称为该集合的基数或集合的势，记为 $|A|$。对于有限集，问题比较容易解决，无限集就比较复杂。不

过,也可以这样来考虑,将两个集合的元素作 1-1 对应,如果正好完全 1-1 对应,那么就说这两个集合所含的元素数一样多。更准确地说,设有 A, B 两个集合,若存在 1-1 到上的映射 f:$A\to B$,则说 A, B 两个集合有相同的基数。如果是 1-1 映射,则约定 $|A|\leqslant|B|$。如果 $|A|\leqslant|B|\neq|A|$,则说 A 的基数小于 B 的基数。记作 $|A|<|B|$。和自然数集 $\mathbf{Z}$ 具有相同基数的集合称为可数集。自然数集 $\mathbf{N}$ 的基数用 $\aleph_0$ 表示,即 $|\mathbf{N}|=|\mathbf{Z}|=|\mathbf{Q}|=\aleph_0$。可以证明,可数个可数集的并及有限个可数集的交是可数集。实数集 $\mathbf{R}$ 的基数用 $\aleph_1$ 表示,即 $|\mathbf{R}|=\aleph_1$, $\aleph_1>\aleph_0$。可以证明,自然数集的幂集 2^N 和实数集 $\mathbf{R}$ 具有相同的基数,即 $|2^N|=|\mathbf{R}|=\aleph_1$。一般地可以证明, $|2^A|>|A|$。

§1.3　拓扑空间

1. 几个著名的拓扑学问题

(1) 哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题

流经哥尼斯堡的普雷格河的河湾处有两个小岛,七座桥连接了两岸和小岛。当地流传着一个游戏,要求在一次散步中通过每座桥一次,但很长时间里没人能做到。后来大数学家欧拉(L. Euler)研究了这个游戏,他把这个游戏简化为一笔画问题:点代表陆地,线代表桥。能否完成游戏就变成左边的图形能否一笔画出的问题了。欧拉在 1736 年证明,这个图形是不能一笔画出来的。正是七桥问题和其他类似性质的问题,使欧拉和其他数学家开始认识到,存在着某种新的几何性质,与以往研究的几何性质完全不同。这种认识是拓扑学产生的背景。这种新的性质是一种整体结构的性质,它们与图形的大小、形状以及所含线

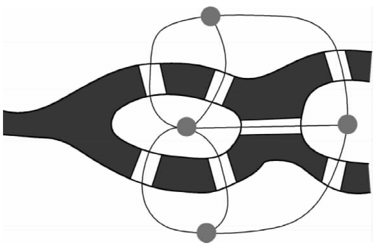

图　1.3

段的曲直等等都无关，我们称之为拓扑性质。将图形挤压、拉伸、扭曲等变形时，它的拓扑性质不变。研究图形拓扑性质的学科，就是拓扑学（topology）。

（2）正多面体的欧拉示性数

对于正四面体、正六面体、正八面体等正多面体来说，如果用 V 标记它们的顶点数，E 标记棱数，F 标记面数，则有关系

$$V-E+F=2, \tag{1.32}$$

这个公式称为欧拉公式。等式右边的数字 2 称为正多面体的欧拉示性数。这是一个拓扑性质。

（3）四色定理

对地图着色时，要求相邻区域必须用不同颜色来标记，那么一共需要多少种颜色呢？数学家很早就证明有五种颜色就够用了。而低于四种颜色是不可能标记一幅地图的。这个问题自从 1852 年格思里（F. Guthrie）提出后，一直到 20 世纪 70 年代借助计算机才得到了肯定的答案，即四色定理：给地图着色，四种颜色就够用了。地图着色问题也是一个和拓扑性质有关的问题，它与区域的面积、边界线的形状和长度等都没有关系，关键是区域的个数和彼此的连接关系。

2. 拓扑空间

设 X 是一个非空集合，记 2^X 为 X 的幂集，即由 X 的所有子集（包括空集 $\varnothing$ 和 X 自身）组成的集合，把 2^X 的子集（即以 X 的一部分子集组成的集合）称为 X 的一个子集族。

定义 设 X 是一个非空集合，X 的一个子集族 τ 称为 X 的一个拓扑，如果它满足：

（1）X 和 $\varnothing$ 都包含在 τ 中；

（2）τ 中任意多个成员的并集仍在 τ 中；

（3）τ 中有限多个成员的交集仍在 τ 中；

则集合 X 和它的一个拓扑 τ 一起称为一个拓扑空间（topological space)，记作(X,τ)，有时候也简称为拓扑空间 X。称 τ 中的成员为这个拓扑空间的开集。定义中的三个条件称为拓扑公理。

从定义可以看到，给出集合的一个拓扑就是规定它的哪些子集是开集。这种规定不是任意的，必须满足三条拓扑公理。一般来说，一个集合上可以有许多不同的拓扑。因此在说到一个拓扑空间时，要同时指明集合及所规定的拓扑。

设 X 是一个非空集合，显然 $\tau=2^X$ 构成 X 上的一个拓扑，称为 X 上的离散拓扑。离散拓扑的开集最多。而 $\tau=\{X,\varnothing\}$ 也是 X 上的拓扑，称为 X 上的平凡拓扑。平凡拓扑的开集最少。当 X 中包含多于一个元素时，这两个拓扑是不同的。X 还可以有许多别的拓扑。如果设 $X=\{a,b,c\}$，则$\{X,\varnothing,\{a\}\}$，$\{X,\varnothing,\{a,b\}\}$，$\{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$等等都是 X 上的拓扑。总共可以有 29 种不同的拓扑结构。但$\{X,\varnothing,\{a\},\{b\}\}$不是 X 上的拓扑，因为公理(2)不满足。

设 τ_1，τ_2 是集合 X 上的两个拓扑，如果 $\tau_1\subset\tau_2$，则说 τ_2 是比 τ_1 精细的拓扑。因此平凡拓扑是最粗的拓扑，离散拓扑则是最细的拓扑。

例 设 $\mathbf{R}$ 是全体实数的集合，规定

$$\tau_e=\{U\mid U\text{ 是若干个开区间的并集}\},\tag{1.33}$$

这里“若干”可以是有限个、无限多个，也可以是零，因此 $\varnothing\in\tau_e$。所以 τ_e 是 $\mathbf{R}$ 上的拓扑，称为 $\mathbf{R}$ 上的欧氏拓扑，记为 $\boldsymbol{E}^1=\{\mathbf{R},\tau_e\}$。

3. 度量空间

集合 X 上的一个度量 d 是一个映射 $d:X\times X\rightarrow\mathbf{R}$，满足

(1) 正定性，$d(x,x)=0$，$\forall x\in X$，$d(x,y)>0$，当 $x\neq y$；

(2) 对称性，$d(x,y)=d(y,x)$，$\forall x,y\in X$；

(3) 三角不等式，$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$，$\forall x,y,z\in X$。

当集合 X 上规定了一个度量 d 后，就称为度量空间，记作(X,d)。

记

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \cdots, n\}, \tag{1.34}$$

规定 $\mathbf{R}^n$ 上的度量 d 为

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}。 \tag{1.35}$$

不难证明 d 满足度量空间的三个条件。因此 $\boldsymbol{E}^n = \{\mathbf{R}^n, d\}$ 是度量空间,称为 n 维欧氏空间。

设(X, d)是一个度量空间, $x_0 \in X$, ε 是一个正数。称 X 的子集

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < \varepsilon\} \tag{1.36}$$

为以 x_0 为中心、以 ε 为半径的球形邻域。因此

$$\tau_d = \{U \mid U\ \text{是若干个球形邻域的并集}\} \tag{1.37}$$

是 X 上的一个拓扑,称为 X 上由度量 d 决定的度量拓扑。每个度量空间都可以看成是具有度量拓扑的拓扑空间。因此 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{E}^n$ 也是拓扑空间(其度量拓扑称为欧氏拓扑)。从这个意义上讲,拓扑空间是度量空间和欧氏空间的推广。

4. 连续映射和同胚

现在来考虑拓扑空间$(X, \tau(X))$和$(Y, \tau(Y))$之间的映射。正如映射是函数的推广一样,连续映射也是连续函数的一种推广。这里用开集来定义拓扑空间中的连续映射。

定义　设$(X, \tau(X))$和$(Y, \tau(Y))$为两个拓扑空间, $f: X \to Y$ 为一个映射,如果它满足:

$$f^{-1}(\tau(Y)) \subset \tau(X), \tag{1.38}$$

即 Y 的任一开集 $O \in \tau(Y)$ 的逆象 $f^{-1}(O)$是 X 的开集, $f^{-1}(O)$

$\in \tau(X)$，则称 f 是连续映射。这是通常连续函数定义的推广。恒等映射是连续映射，连续映射的复合映射也是连续映射。如果 X 是离散拓扑空间，或者 Y 是平凡拓扑空间，则 $f: X \to Y$ 一定是连续映射。对于普通函数 $f(x)$ 在一点 x_0 的连续，我们可以用 $\varepsilon - \delta$ 语言来描述：

对任意正数 $\varepsilon > 0$，总可以找到 $\delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon。 \tag{1.39}$$

我们也可以用开集的语言来描述函数在一点的连续：

若 V 是包含 $f(x_0)$ 的开集，则存在包含 x_0 的开集 U，使得

$$f(U) \subset V。 \tag{1.40}$$

定义 如果存在一个 1-1 的映射（双射）$f: X \to Y$，使得 f 和 f^{-1} 都是连续的，则称这两个拓扑空间 $(X, \tau(X))$ 和 $(Y, \tau(Y))$ 是（拓扑）同胚的（homeomorphic），此时称 f 为同胚映射。如果 X 与 Y 同胚，则记为 $X \cong Y$。

两个同胚的拓扑空间是拓扑等价的，具有相同的拓扑性质。同胚意味着可以通过连续的形变从一个拓扑空间到另一个拓扑空间。

同胚是拓扑学中最重要的概念之一。拓扑空间之间的同胚是一种等价关系。拓扑不变量就是在同胚变换下保持不变的一些量或性质。任意开区间 (a, b) 同胚于 $\mathbf{R}$，去掉北极的球面与平面同胚。这就是复变函数中球极投影的原理。但环面与球面不同胚，环形带与墨比乌斯（Möbius）带也不同胚。

5. 拓扑空间的几个基本概念

邻域 给定 X 上的一个拓扑 τ，如果 $A \subset X$ 是 X 的一个子集，且 A 包含一些开集 X_α，$x \in X_\alpha$，则称 A 为 $x \in X$ 的一个邻域。显然，包含 x 的开集 X_α 是 x 的邻域。

闭集 拓扑空间 X 的一个子集 A 称为闭集，如果 A 的余集

是开集。也就是说,开集的余集是闭集,闭集的余集是开集。在离散拓扑空间中,由于任何子集都是开集,因此任何子集也都是闭集。显然,在任何拓扑空间,X 本身和空集$\varnothing$一定是闭集。容易证明,任意多个闭集的交集是闭集,有限个闭集的并也是闭集。

内点和边界点　设 $A \subset X$ 是 X 的一个子集,$x \in A$,如果存在开集U 使得$x \in U \subset A$,则称 x 是A 的一个内点。A 的所有内点的集合称为 A 的内部或内域。如果点 x 的每个邻域都既包含 A 的点,也包含 A 的余集的点,则称 x 为 A 的边界点。A 的所有边界点的集合成为 A 的边界。若 A 的边界不包含在 A 内,则 A 为开集。若 A 的边界包含在 A 内,则 A 为闭集。

豪斯多夫(Hausdorff)空间　如果一个拓扑空间中,两个任意不同的点有彼此不相交的邻域,则称此拓扑空间为豪斯多夫空间。**R** 上的普通拓扑是豪斯多夫空间。离散拓扑也是豪斯多夫空间。

紧致性　紧致性是拓扑学中的一个重要概念。首先引入覆盖的概念。给定一族集合 $\{F_\alpha\} = F$,如果 $\bigcup F_\alpha \supset X$,就称 F 是 X 的一个覆盖。如果所有的 F_α 都是开集,就称为是开覆盖。一个集合 X 可以有很多种覆盖。如果对每一个开覆盖 $\{F_\alpha\} = F$ 都存在有限的子覆盖$\{F_1, \cdots, F_n\}$,使得 $F_1 \cup \cdots \cup F_n \supset X$,则称集合 X 是紧致的。紧致的直观解释就是有限。一个拓扑空间如果只含有限个点,或它的拓扑是有限的(只包含有限个开集),则它是紧致的。有界闭区间是紧致的,球面 S^n 也是紧致的。

连通性　连通性是一个很直观的概念。如果拓扑空间 X 可以分解成两个不相交的开子集 A_1, A_2 的交,$A_1 \cup A_2 = X$,则称 X 是不连通的。因为 A_1, A_2 在 X 中互为余集,故它们既是开集,又是闭集。因此,如果一个拓扑空间中仅有的既开又闭的子集是空集$\varnothing$和 X 本身,则它是连通的。显然离散点集是不连通的。有理数集 **Q** 不是连通的。可以有单连通和多连通(复连通)。R^n 和 S^n 是单连通的,T^n则是多连通的。直观上可以看到,球面和环面(轮胎)是不同的。

§1.4 分　形

1. 分形的基本概念

在很长的时间内，数学只研究比较光滑和比较规则的集合和函数。而那些不够光滑和不够规则的集合和函数则被认为是病态的，不值得去研究。著名物理学家狄拉克(P. A. M. Dirac)提出的 δ 函数也曾被数学家认为是不严格的东西，但以后却由此发展出了广义函数理论。从 20 世纪 60 年代开始，人们逐渐认识到，对这些不光滑集可以而且必须进行详细的数学描述。不规则集比经典的几何图形能更好地反映自然现象。分形目前已经在包括数学、物理、化学、生物、天文和计算机等众多学科领域内得到了广泛的应用。在湍流、混沌等现象中都有分形的存在。

分形(fractal)这个词是它的创始人、美国数学家芒德布罗(B. Mandelbrot)教授于 1975 年夏天一个寂静的夜晚，在冥思苦想之余翻看儿子的拉丁文字典时想到的，其拉丁文的原意是“产生无规则的碎片”。分形的一个重要性质叫作自相似性。从它的任何一个局部经过放大，都可以得到一个和整体全等的图形。三分康托尔集 F 是一种最简单、最容易构造的分形，但它显示了许多最典型的分形特征。三分康托尔集是从单位区间出发，通过一系列不断去掉部分子区间的过程构造出来的。设 E_0 是闭区间$[0,1]$，E_1 是表示由 E_0 除去中间 1/3 后得到的集合，即 $E_1=\{[0,1/3]\cup[2/3,1]\}$，再分别去掉这两个区间的中间 1/3 就得到 E_2。按此方法继续下去，得到由 2^k 个长度各为 3^{-k} 的区间组成的集合 E_k。三分康托尔集 F 可以看成是集序列 E_k 当 k 趋于无穷时的极限。

图　1.4