研究生教学用书

专 业 课 系 列

算子半群及应用

Semigroups of Operators and Applications

黄永忠 编著

BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

研究生教学用书

专业课系列

算子半群及应用

Semigroups of Operators and Applications

黄永忠　编著

华中科技大学出版社

中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

算子半群及应用/黄永忠　编著.—武汉：华中科技大学出版社，2011.9
ISBN 978-7-5609-7300-5

Ⅰ.算…　Ⅱ.黄…　Ⅲ.算子半群-研究生-教材　Ⅳ.O152.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 166791 号

算子半群及应用　　　　黄永忠　编著

策划编辑：王新华
责任编辑：王汉江
封面设计：刘　卉
责任校对：祝　菲
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国・武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)87557437
录　　排：武汉佳年华科技有限公司
印　　刷：武汉中远印务有限公司
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：19.75
字　　数：406 千字
版　　次：2011 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：32.00 元

华中出版

内容提要

本书系统地介绍强连续算子半群的基本内容和抽象 Cauchy 问题解的理论及其应用.这些应用包括在偏微分方程和控制理论中的经典应用、抽象 Cauchy 问题的 L^p 最大正则性和 Hölder 正则性、不适定抽象 Cauchy 问题的正则化等,其中在偏微分方程中的应用是主要的,分布在多个章节.此外,本书还给出了适当注记和适量习题.

本书内容主要包括:预备知识、半群的基本知识及简单应用、范数连续半群及其子类、逼近和扰动、谱映射定理和稳定性、非齐次 Cauchy 问题、半线性方程的 Cauchy 问题及应用、控制理论中的半群、抛物型方程反问题.

本书可以作为泛函分析、偏微分方程、动力系统、计算数学、控制论方向及理工科相关方向研究生的教材或教学参考书,也可作为相应领域的教师和科研人员的参考书.

前　言

当今，C_0 半群理论已经成为许多领域的重要工具．这些领域除了传统的偏微分方程和随机过程外，还包括量子力学、无穷维控制理论、积分-微分方程、泛函微分方程及无穷维动力系统，等等．

下面简要介绍 C_0 半群的发展过程和专业书籍．

要确切地说半群理论的起源是很困难的，可以从 J. Napier(1550—1617)处理函数方程 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 和 G. Peano(1858—1932)在 1887 年化一阶线性常微分方程组为简洁形式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=Au(t)$ 中找到踪迹．现在熟知的是 20 世纪 30 年代数学家就开始采用单参数半群理论了，鉴于它立即应用到偏微分方程、Markov 过程和遍历理论，那时起半群理论得到了很大的发展．特别是随着 Hille 和 Yosida 各自独立地在 1948 年给出压缩半群的生成定理后，半群理论呈现勃勃生机．到 20 世纪 50 年代，经典的 C_0 半群理论成形了，以 Hille-Phillips 的著作（见文献[59]）问世为其标志．其后，新的结论（如 Trotter-Kato 逼近定理、Chernoff 乘积半群、半群的新扰动等）、已知结论的新证明，以及在数学物理领域的广泛应用，等等，构成了半群理论发展的繁荣景象．到 20 世纪 80 年代，C_0 半群理论达到了一定的完善状态，期间出版的相应代表性书籍是 Yosida、Tanabe、Davies、Pazy、Goldstein 等人编写的（分别参见文献[131]、[116]、[36]、[97]、[51]），其中 Pazy 编写的书籍更是成为从那时起到如今的国内外半群理论学习的标准教材，备受推崇．

20 世纪 80 年代中后期至 90 年代的前半期，半群理论的发展主要集中于积分半群、正则半群及预解算子族（本书不涉及它们，见文献[82]），它们可视为 C_0 半群的推广，并在处理一些问题（如非椭圆算子的半群生成及相应初值问题、不适定问题）中得到了很好的应用．不过，半群理论界外的人们还是更熟悉成熟的 C_0 半群．基于理论和应用的需要，C_0 半群的一些难点问题仍引起了大家的持续关注，并取得了一些成果，比如范数连续半群的刻画、可微半群的扰动，等等．这期间出版的与 C_0 半群理论和应用发展有关的书籍也不少，比如笔者所关注过的文献有[6]、[12]、[13]、[46]、[53]、[79]、[87]、[92]等．

在国内出版的书籍方面，与 C_0 半群有关的内容有的出现在诸如文献[129]、[135]中．专门介绍 C_0 半群的文献有[85]、[126]、[136]、[137]．

自 2006 年起，笔者开始讲授研究生课程“半群与发展方程”，采用 Pazy 编写的书作为教材．讲授过程中感觉有三点不适：一是对不从事半群理论研究的人来说，直接

例子少了，初学者对抽象理论接受起来有障碍；二是一些新的结果没有反映出来；三是没有习题训练. 于是一开始就得补充材料，重新组织讲授内容. 这样一来，既浪费时间和精力，课程讲授效果又不一定很好，于是便有了编写本教材的想法.

本书作为研究生基础教材，介绍的都是基础知识，主要给出 C_0 半群的基本理论与应用介绍，辅以大量例子和习题，并考虑到学生的需要和作者的自身兴趣，选编了控制理论中的半群和不适定 Cauchy 问题的正则化等内容.

本书的第 1 章是预备知识. 算子的基本知识和 Sobolev 空间简介放在附录中. 第 2、3 章是 C_0 半群的核心内容，无须赘述，其中给出了较多的具体例子. 第 4 章的逼近和扰动介绍的是 Trotter-Kato 定理与应用，以及有界扰动、相对有界扰动，特别关注压缩半群与解析半群的扰动. 这些都是经典内容，但也包含范数连续半群扰动的较新结论. 第 5 章的谱映射定理和稳定性对 C_0 半群的定性理论至关重要，对分布参数系统的控制理论不可或缺. 第 6 章的非齐次 Cauchy 问题，首先介绍经典结论，然后介绍解析半群的 L^p 最大正则性与 Hölder 正则性，正则性问题是近些年来的重要论题. 第 7 章是半线性方程的 Cauchy 问题及应用，大部分也属于半群应用的经典内容，同时也介绍了与内插空间有关的一些结论. 第 8 章以受控热方程和受控波方程为线索介绍控制理论中的半群. 第 9 章是对不适定 Cauchy 问题的正则化的一个综述性介绍，几乎不包含证明. 在第 2～7 章的开始部分都给出“本章核心结论”，其目的是让初学者了解该章的大致轮廓. 所谓“核心结论”，也就是笔者认为应该掌握的基本结论，它们构成本课程的基本骨架. 如果对半群的要求不高或学时有限，可围绕“核心结论”安排教学内容.

Pazy、Engel-Nagel、Vrabie 及郑权和 Lunardi 等人的文献是本书的主要参考资料. 本书得到了华中科技大学研究生院教材出版基金的大力资助. 在编写和教学过程中，课程班上的学生曾提出许多宝贵的意见和建议，硕士研究生方厚章和陈小锋录入了部分文稿，在此一并致谢. 限于学识而导致的错误和不足之处在所难免，敬请读者批评指正.

黄永忠

2011 年 8 月

符　号　表

$:=$	定义为或记为
$\mathbf{C},\mathbf{N},\mathbf{N}_+$	分别是复数集、自然数集、正整数集
$\mathbf{R}^n$	n 维实欧氏空间，$\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$
$\mathbf{R}_+$	非负实数集
$D(A)$，$\mathrm{rg}(A)$	分别是算子 A 的定义域、值域
$[D(A)]$	空间$(D(A),\Vert\cdot\Vert_A)$，其中$\Vert x\Vert_A:=\Vert x\Vert+\Vert Ax\Vert$为 x 的图像范数
$\rho(A)$，$\sigma(A)$	分别是算子 A 的正则集、谱集
$\sigma_{\mathrm{p}}(A)$，$\sigma_{\mathrm{c}}(A)$，$\sigma_{\mathrm{r}}(A)$	分别是算子 A 的点谱、连续谱、剩余谱
$\sigma_{\mathrm{a}}(A)$，$\sigma_{\mathrm{e}}(A)$	分别是算子 A 的近似谱、本质谱
$R(\lambda,A)$	算子 A 在 λ 处的预解式，即$(\lambda I-A)^{-1}$
$B(X,Y)$	从 X 到 Y 的有界算子空间，$B(X)=B(X,X)$
Σ_θ	$\{\lambda\in\mathbf{C}\backslash\{0\}\,\big\vert\,\lvert\arg\lambda\rvert<\theta,\theta\in(0,\pi)\}$
$t\downarrow 0$，$t\uparrow 0$	分别为 $t\to 0^+$，$t\to 0^-$
$\mathrm{supp}\varphi$	函数 φ 的支集$\overline{\{x\in\Omega\mid\varphi(x)\neq 0\}}$
$(A,T(t))\in G(M,\omega)$	算子 A 生成 C_0 半群 $T(t)$，且存在常数 $M\geqslant 1,\omega\in\mathbf{R}$，使得 $\Vert T(t)\Vert\leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}$
$(A,T(t))\in G$	算子 A 生成 C_0 半群 $T(t)$
$(A,T(t))\in G(1,0)$	算子 A 生成压缩 C_0 半群 $T(t)$
$(A,T(t))\in H(\alpha,\omega)$	算子 A 生成角 α 的解析半群 $T(t)$，且 $\forall\beta\in(0,\alpha)$，存在常数 $M_\beta\geqslant 1,\omega\in\mathbf{R}$，使得 $\Vert T(t)\Vert\leqslant M_\beta\mathrm{e}^{\omega t}(t\in\Sigma_\beta)$
$(A,T(t))\in H(\alpha)$	算子 A 生成角 α 的解析半群 $T(t)$
$s(A)$	算子 A 的谱界
$\omega_0(A)$	算子 A 所生成半群的增长界
$D_A(\theta,p)$	X 与 $D(A)$间的内插空间，参数为 θ,p

目　录

第 1 章　预备知识

泛函分析，特别是算子理论，是阅读本书的必备知识，将这一些基本内容放在附录中，其中还包含了 Sobolev 空间的简单介绍. 抽象函数(也称向量值函数)是本书的基本对象函数，其值域不再是 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}$，而是一般的 Banach 空间. 由于 Banach 空间中有几种不同的拓扑结构，即有几种不同的极限，因而产生了几种不同的连续性、可导性等概念. 为方便讨论，1.1 节简单介绍抽象函数微积分，但不给出结论的证明. 本书中经常要验证 Hilbert 空间算子的自伴性，1.2 节给出了自伴算子的一些刻画.

抽象函数的 Laplace 变换与算子半群和发展方程理论是密切相关的，在算子半群发展伊始即有采用 Laplace 变换. 特别是 20 世纪 80 年代中后期,基于新的算子半群和相关抽象 Cauchy 问题理论的蓬勃发展，更激起对抽象函数 Laplace 变换的深入研究. 1.3 节介绍了抽象函数的 Laplace 变换，考虑到初学者对此内容相对不熟悉，给出了结论的证明. 本章的目的是让初学者对抽象函数的 Laplace 变换有一个基本的了解，同时在后面会看到正因为有了它，才可以更加简洁地处理强连续半群的某些问题.

若不特别说明，全书中的空间 X 是 Banach 空间，涉及的算子都是线性的.

1.1　抽象函数

设区间 $I\subset\mathbf{R}$,$(X,\|\cdot\|)$是 Banach 空间,X'是其对偶空间,函数 $f:I\to X$.

1. 抽象函数的连续性

定义 1.1.1　设 $t_0\in I$.

(i) 若 $\forall x'\in X'$,都有

$$\lim_{t\to t_0}x'(f(t))=x'(f(t_0)),$$

则称 f 在 t_0 处**弱连续**;

(ii) 若$\lim\limits_{t\to t_0}\|f(t)-f(t_0)\|=0$,则称 f 在 t_0 处**强连续**.

定义 1.1.2　设 $t_0\in I$,$T:I\to B(X)$.

(i) 若 $\forall x\in X$, $\forall x'\in X'$,都有

$$\lim_{t\to t_0}x'((T(t)-T(t_0))x)=0,$$

则称 T 在 t_0 处**按弱算子拓扑连续**,简称**弱连续**;

(ii) 若 $\forall x\in X$,都有

$$\lim_{t\to t_0}\|(T(t)-T(t_0))x\|=0,$$

则称 T 在 t_0 处**按强算子拓扑连续**,简称**强连续**;

(iii) 若$\lim\limits_{t\to t_0}\|T(t)-T(t_0)\|=0$,则称 T 在 t_0 处**按一致算子拓扑连续**,或称 T 在 t_0 处**按范数连续**.

在整个区间 I 上的连续性是显然的,而算子值函数或向量值函数在一点处或在一个区间上按范数的连续性、强连续性、弱连续性依次减弱,一般说来不可逆转.与数值函数类似,有下述定理.

定理 1.1.1 设 I 紧.

(a) 若 $f:I\to X$ 弱连续,则$\{\|f(t)\|\,|\,t\in I\}$是有界集;

(b) 若 $T:I\to B(X)$按弱算子拓扑连续,则$\{\|T(t)\|\,|\,t\in I\}$是有界集;

(c) 若 $f:I\to X$ 强连续,则它在区间 I 上必是均匀强连续的(也称一致强连续),即 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $t_1,t_2\in I$ 且$|t_1-t_2|<\delta$ 时,有$\|f(t_1)-f(t_2)\|<\varepsilon$.

记 $C(I,X)$为区间 I 上强连续的 X 值函数的全体,赋予上确界范数,是一个Banach空间.

2. 抽象函数的可导性

定义 1.1.3 设 I 为开区间,$t_0\in I$.

(i) 若存在 $f_0\in X$,使得

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}-f_0\right\|=0,$$

则称 f 在 t_0 处**强可导**(或**强可微**),简称**可导**或**可微**;称 f_0 为 $f(t)$在 t_0 处的**强导数**,记为 $f_0=f'(t_0)$.

(ii) 若存在 $f_0\in X$,使得

$$\lim_{h\to 0}x'\left(\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}\right)=x'(f_0),\quad \forall x'\in X',$$

则称 f 在 t_0 处**弱可导**(或**弱可微**),称 f_0 为 $f(t)$在 t_0 处的**弱导数**.

若 $f'\in C(I,X)$,则称 f 在区间 I 上(强)**连续可微**,记号 $C^1(I,X)$表示区间 I 上连续可微 X 值函数的全体.类似地,可理解 X 上的高阶连续可微性和高阶导数 $f^{(k)}$.

显然,若 f 在 t_0 处强可导,则其必定是弱可导的,并且其强导数即为其弱导数.

定理 1.1.2 $f(t)\equiv f_0(t\in I)\Leftrightarrow f$ 弱可导,且 $f'(t)\equiv 0(t\in I)$.

容易得到:在某点弱(强)可导的抽象函数必在该点弱(强)连续.

定理 1.1.3 若 f 在 $t_0\in I$ 处弱可导,则 f 必在 t_0 处强连续.

可更一般地,考虑定义域与值域都在 Banach 空间的函数的连续性与可微性.

下面简单介绍一下算子值解析函数.设 X 为复赋范空间,点集 $D\subset\mathbf{C}$ 且其内部

$D^{\circ}\neq\varnothing$，$f:D\to B(X)$，$z_0\in D^{\circ}$. 若 f 在点 z_0 的一个邻域内可展为 $z-z_0$ 的幂级数，即存在正常数 δ，满足 $\{z\in\mathbf{C}\,\big|\,|z-z_0|<\delta\}\subset D$，使得

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k,\quad |z-z_0|<\delta,\tag{1.1.1}$$

其中，系数 $c_k=f^{(k)}(z_0)/k!$，则称 f 在点 z_0 处**解析**（显然，f 在点 z_0 处解析意味着 f 在点 z_0 的某邻域内解析）. 确切地说，依据展开式(1.1.1)中级数按算子拓扑收敛、强收敛或弱收敛，分别称 f 在点 z_0 处按范数解析、强解析或弱解析. 算子值函数的三种不同的解析概念本质上是相同的，即三种解析是等价的，这让我们不再区分它们. 此外，正因为这种特性，数值解析函数的大部分性质可推广到算子值函数的情形.

3. 抽象函数的可测性

记 $C_c(I,X)=\{f\in C(I,X)\,|\,f$ 有紧支集$\}$. 以下涉及的测度空间一般指完全的全 σ-有限的，为方便讨论，将涉及的测度理解为较简单的 Lebesgue 测度也是可以的.

定义 1.1.4　对于函数 $f:I\to X$，若存在零测度集 $E\subset I$ 和序列 $\{f_n\}\subset C_c(I,X)$，使得 $f_n(t)\to f(t)$ 在区间 $I\backslash E$ 上成立，则称 f 是可测的.

显然，若 $f:I\to X$ 可测，则 $\|f\|:I\to\mathbf{R}$ 也可测.

命题 1.1.1　(a) 若 $f:I\to X$ 和 $g:I\to D(f)$ 都可测，则 $f\circ g:I\to X$ 可测.

(b) 设 $\{f_n:I\to X\}$ 是可测函数列，若 $f:I\to X$，且 $f_n(t)\to f(t)$ (a. e. $t\in I$)，则 f 是可测的.

(c) 设序列 $\{x_k\}\subset X$，$\{I_k\}$ 是区间 I 上的一列可测子集，若 $\forall\, m\neq n$，有 $I_m\cap I_n=\varnothing$，则 $\sum_k x_k\chi_{I_k}$ 可测，其中 χ_I 为区间 I 上的特征函数.

定理 1.1.4(Pettis 定理)　$f:I\to X$ 可测的充分必要条件是

(a) f 是弱可测的，即 $\forall\, x'\in X'$，函数 $t\mapsto x'(f(t))$ 可测；

(b) f 是几乎可分值的，即存在零测度集 $E\subset I$，使得 $f(I\backslash E)$ 是可分的.

推论 1.1.1　(a) 若 f 弱连续，则 f 可测.

(b) 设 $\{f_n:I\to X\}$ 是可测函数列，且对于 a. e. $t\in I$，$f_n(t)$ 弱收敛到 $f(t)$，则 f 可测.

4. Bochner **积分**

我们自然可以像数值函数一样定义抽象函数的 Riemann 积分. 将抽象函数的 Riemann 积分以强的方式推广到更一般的 Lebesgue 积分便形成 Bochner 积分. Bochner 积分具有与通常的 Lebesgue 积分类似的若干基本性质.

设 $I=\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i$，每个 Ω_i 可测，$\Omega_i\cap\Omega_j=\varnothing\,(i\neq j)$. 对于一个简单函数 $g:I\to X$，$g=$

$\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{\Omega_i}$，定义

$$\int_I g(t)\mathrm{d}t := \sum_{i=1}^{n} x_i m(\Omega_i),$$

其中，$m(\Omega)$是 Ω 的 Lebesgue 测度.

定义 1.1.5　设 $f: I \to X$，如果存在简单函数列 g_n 使得 $g_n \to f$ 对于 a. e. $t \in I$ 成立，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \| f(t) - g_n(t) \| \mathrm{d}t = 0,$$

则称 f 是 Bochner **可积**的. 此时，f 在区间 I 上的 Bochner **积分**是

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty}\int_I g_n(t)\mathrm{d}t.$$

当 $X=\mathbf{C}$ 时，Bochner 可积性和积分的定义与 Lebesgue 积分论中的相同. 当 I 为 $\mathbf{R}^2$ 中的矩形区域时，可记 Bochner 积分为 $\int_I f(s,t)\mathrm{d}(s,t)$.

定理 1.1.5　(i) 函数 $f: I \to X$ 是 Bochner 可积的$\Leftrightarrow f$ 可测且 $\| f \|$ 可积.

(ii) 若 f 是 Bochner 可积的，则

$$\left\| \int_I f(t)\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_I \| f(t) \| \mathrm{d}t.$$

命题 1.1.2　设算子 $T \in B(X,Y)$，如果 $f: I \to X$ 是 Bochner 可积的，则 $T\circ f: t \mapsto T(f(t))$ 也是 Bochner 可积的，且

$$T\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_I T(f(t))\mathrm{d}t.$$

命题 1.1.3　设 A 是 X 上的闭线性算子，并设 $f: I \to X$ 是 Bochner 可积的，如果对所有 $t \in I$，有 $f(t) \in D(A)$，且 $A\circ f: t \mapsto A(f(t))$是 Bochner 可积的，则

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t \in D(A)，且\ A\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_I A(f(t))\mathrm{d}t.$$

定理 1.1.6(控制收敛定理)　设 $f_n: I \to X(n \in \mathbf{N}_+)$是 Bochner 可积函数列，且极限 $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$几乎处处存在. 如果存在可积函数 $g: I \to \mathbf{R}$ 使得 $\forall n \in \mathbf{N}_+$，有

$$\| f_n(t) \| \leqslant \| g(t) \|, \quad \text{a. e. } t \in I,$$

则 f 是 Bochner 可积的，且

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t.$$

此外，$\int_I \| f(t) - f_n(t) \| \mathrm{d}t \to 0\ (n \to \infty)$.

定理 1.1.7(Fubini 定理)　设矩形 $I = I_1 \times I_2 \subset \mathbf{R}^2$，$f: I \to X$ 可测. 如果

$$\int_{I_1}\int_{I_2} \| f(s,t) \| \mathrm{d}t\mathrm{d}s < \infty,$$

则 f 是 Bochner 可积的，且逐次积分

$$\int_{I_1}\int_{I_2} f(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s,\quad \int_{I_2}\int_{I_1} f(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

存在且相等，等于重积分 $\int_I f(s,t)\mathrm{d}(s,t)$.

5. $L^p(I,X)$ 空间

如同实变量数值函数，视仅可能在零测度集上取值相异的函数为同一函数.

$$L^1(I,X) := \{f: I\to X \mid f\text{Bochner 可积}\},$$

其范数 $\|f\|_1 := \int_I \|f(t)\|\mathrm{d}t$.

特别地，如果 $f\in L^1(\mathbf{R}_+,X)$，控制收敛定理 1.1.6 表明

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to+\infty}\int_0^{\tau} f(t)\mathrm{d}t. \tag{1.1.2}$$

值得注意的是，当 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+,X)$，即对于每个 $\tau\in\mathbf{R}_+$，f 在区间 $[0,\tau]$ 上 Bochner 可积时，式(1.1.2)中的极限可能存在，但 f 并不在区间 $\mathbf{R}_+$ 上 Bochner 可积.

对于 $1<p<+\infty$，$L^p(I,X) := \{f: I\to X \mid f \text{ 可测，且 } \|f\|_p<+\infty\}$，其中范数

$$\|f\|_p := \left(\int_I \|f(t)\|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

$L^\infty(I,X) := \{f: I\to X \mid f \text{ 可测且 } \|f\|_\infty<+\infty\}$，其中范数

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}\{\|f(t)\| \mid t\in I\}.$$

注记 1.1.1　(1) $L^p(I,X)$ 是 Banach 空间；$L^p(I,C)(1\leqslant p\leqslant+\infty)$ 是通常熟知的 Lebesgue 空间，简记为 $L^p(I)$.

(2) 上面是就 I 为区间(有限或无限)而展开的(Fubini 定理时是矩形). 当 I 为 $\mathbf{R}^n$(或 Fubini 定理时，$\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$)的可测集时，整个理论也是正确的.

(3) 若 $1\leqslant p<+\infty$，则 $C_c^\infty(I,X)$ 稠密于 $L^p(I,X)$，但 $C(\bar{I})$ 并不在 L^∞ 中稠密，其中 $C_c^\infty(I,X)$ 是具紧支集的无穷可微函数空间. 具体地，

$$C_c^\infty(I,X) := C_c(I,X)\cap C^\infty(I,X),$$

其中，$C^\infty(I,X) := \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(I,X)$，$C^k(I,X)$ 是所有 k 阶连续导数的函数空间. 顺便提及如下两个空间：$\mathrm{BUC}(I,X)$ 是所有有界且一致连续的函数 $f: I\to X$ 所形成的空间；$C_0(I,X)$ 是所有满足 $\lim\limits_{|t|\to\infty}\|f(t)\|=0$ 的连续函数 $f: I\to X$ 所形成的空间，其中 $I=\mathbf{R}_+$ 或 $I=\mathbf{R}$. 赋予上确界范数，这两个空间都是 Banach 空间，且

$$C_0(I,X)\subset \mathrm{BUC}(I,X)\subset L^\infty(I,X).$$

可以看到，这些与相应数值函数空间类似.

6. Radon-Nikodym 性质

Radon-Nikodym 定理是微积分基本定理在测度论中的推广. 对什么样的空间有

Radon-Nikodym 定理成立，是一个有趣的问题，也是必要时加强空间条件以期得到较好结果的重要思维. 比如，在 Hilbert 空间中成立的结论，在一般 Banach 空间中可能并不成立，这就可以在 Radon-Nikodym 定理成立的 Banach 空间中去考虑. 对 Radon-Nikodym 性质的研究推动了 Banach 空间几何理论和向量值鞅理论的发展.

定义 1.1.6　若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使对区间 $[a,b]$ 上的任意有限个互不重叠的子区间 $\{(a_i,b_i)\}$，只要 $\sum\limits_i (b_i-a_i)<\delta$，就有

$$\sum_i \|F(b_i)-F(a_i)\|<\varepsilon,$$

则称 F 在区间 $[a,b]$ 上是**绝对连续**的.

若对区间 $[a,b]$ 上的所有有限划分而取的上确界

$$\bigvee_a^b(f):=\sup\sum_k \|f(t_k)-f(t_{k-1})\|<\infty,$$

则称 f 在区间 $[a,b]$ 上是**有界变差**的.

命题 1.1.4　(a) Lipschitz 连续函数是绝对连续的.

(b) 绝对连续函数 F 是有界变差的. 进而，若 $G(t):=\bigvee\limits_a^t(F)$，则 G 在区间 $[a,b]$ 上是绝对连续的.

若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_t^{t+h}\|f(s)-f(t)\|\,\mathrm{d}s=0$，则称点 $t\in[a,b]$ 为函数 $f\in L^1(a,b;X)$ 的 Lebesgue **点**.

连续点必是 Lebesgue 点. 下面结论表明几乎所有点是 Bochner 可积函数的 Lebesgue 点.

命题 1.1.5　设 $f:[a,b]\to X$ 是 Bochner 可积的，且

$$F(t):=\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s\quad(t\in[a,b]),$$

则

(a) F 几乎处处可微，且 $F'=f$，a. e. t；

(b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_t^{t+h}\|f(s)-f(t)\|\,\mathrm{d}s=0$，a. e. t；

(c) F 绝对连续；

(d) $\bigvee\limits_a^b(F)=\displaystyle\int_a^b\|f(s)\|\,\mathrm{d}s$.

在数值情形，微积分基本定理表明绝对连续函数 $F:[a,b]\to C$ 是几乎处处可微的，$f:=F'$ 是 Lebesgue 可积的，且对于 $t\in[a,b]$，有

$$F(t)-F(a)=\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

然而，对取值在一般 Banach 空间的 Lipschitz 连续函数而言，基本定理并不成立. 不过对于一般 Banach 空间有下面较弱的结论.

命题 1.1.6　设 $F:[a,b]\to X$ 是绝对连续函数，并设 $f(t):=F'(t)$ 几乎处处存在，则 f 是 Bochner 可积的，且 $\forall t\in[a,b]$，有

$$F(t)=F(a)+\int_a^t f(s)\mathrm{d}s.$$

设 I 为 $\mathbf{R}$ 中的区间. 对于函数 $F:I\to X$，若 F 在区间 I 的每个紧区间上是绝对连续的，则称 F 在区间 I 上绝对连续. 下列结论是 Banach 空间独有的性质.

命题 1.1.7　对于任意 Banach 空间 X，下列结论等价：

(a) 每个绝对连续函数 $F:\mathbf{R}_+\to X$ 是几乎处处可微的；

(b) 每个 Lipschitz 连续函数 $F:\mathbf{R}_+\to X$ 是几乎处处可微的.

定义 1.1.7　对于 Banach 空间 X，若命题 1.1.7 的等价条件之一满足，则称 X 有 Radon-Nikodym 性质. 此时简称 X 有 RNP.

命题 1.1.8　(a) 空间 X 有 RNP$\Leftrightarrow$每个 Lipschitz 连续函数 $F:[0,1]\to X$ 几乎处处可微.

(b) 自反 Banach 空间有 RNP.

(c) $L^1(0,1)$，$L^\infty(0,1)$ 和 $C[0,1]$，c_0 不具有 RNP，但 l^1 有 RNP，其中 c_0 是熟知的收敛到 0 的数列空间.

7. 卷积

定义 1.1.8　设两函数 $k,f:\mathbf{R}\to X$ 都可测，若 Bochner 积分 $\int_{\mathbf{R}}k(t-s)f(s)\mathrm{d}s$ 存在，定义卷积

$$(k*f)(t)=\int_{\mathbf{R}}k(t-s)f(s)\mathrm{d}s.$$

数值函数卷积的许多事实都可移植到向量值的情形，下面列举一些结论.

命题 1.1.9　(a) 设两函数 $k,h\in L^1(\mathbf{R})$ 和 $f\in L^1(\mathbf{R},X)$，则

(i) $(k*f)(t)$ 对于几乎所有 $t\in\mathbf{R}$ 存在，且 $k*f\in L^1(\mathbf{R},X)$ 和 $k*f=f*k$；

(ii) $h*(k*f)=(h*k)*f$, a. e. t.

(b)（Young 不等式）　设 $1\leqslant p,q,r<+\infty$ 满足 $1/p+1/q=1+1/r$，若 $k\in L^p(\mathbf{R})$ 和 $f\in L^q(\mathbf{R},X)$，则

$$k*f\in L^r(\mathbf{R},X),$$

且

$$\|k*f\|_r\leqslant\|k\|_p\|f\|_q.$$

(c) 设 $1<p,p'<+\infty$ 满足 $1/p+1/p'=1$，若 $k\in L^p(\mathbf{R})$ 和 $f\in L^{p'}(\mathbf{R},X)$，则

$$k*f\in C_0(\mathbf{R},X).$$

(d) 若 $k\in L^1(\mathbf{R})$ 和 $f\in L^\infty(\mathbf{R},X)$，或若 $k\in L^\infty(\mathbf{R})$ 和 $f\in L^1(\mathbf{R},X)$，则

$$k*f\in \mathrm{BUC}(\mathbf{R},X).$$