塑性力学新进展

2011年全国塑性力学会议论文集

刘应华 刘凯欣 宁建国 编

清华大学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

塑性力学新进展

——2011 年全国塑性力学会议论文集

刘应华　刘凯欣　宁建国　编

清华大学出版社
北京

2011 年全国塑性力学会议组织机构

（按姓氏拼音顺序排列）

会议主席：刘凯欣　宁建国

学术委员会

主任： 宁建国

委员： 陈建康　陈少华　方岱宁　冯西桥　何陵辉　胡更开　胡　平
李振环　李玉龙　刘凯欣　刘应华　鹿晓阳　宁建国　潘一山
彭向和　树学峰　王立忠　王铁军　魏悦广　许金泉　杨嘉陵
杨　合　杨绿峰　张俊乾　张克实　仲　政　周　青

顾问： 白以龙　黄克智　黄筑平　梁乃刚　金泉林　阮雪榆　王礼立
王仲仁　王自强　徐秉业　余寿文　余同希　杨桂通　杨　卫

组织委员会

主　任： 刘凯欣

副主任： 刘应华　余振苏

委　员： 曹国鑫　陈永强　傅 缤　励 争　孙树立　周文灵　郑玉峰

前　言

经中国力学学会批准，由北京大学主办，清华大学、北京航空航天大学、北京理工大学协办，于 2011 年 10 月在北京召开全国塑性力学会议。本次会议旨在开展塑性力学理论、实验和应用方面的最新研究成果交流，研讨新的研究方向，特别是交叉领域的研究，以推动塑性力学理论、实验和数值方法研究的发展，促进塑性力学在各工程领域中的应用。会议还邀请了一批国内著名学者、专家前来报告塑性力学的最新进展。

塑性力学不仅是固体力学的一个重要分支，是断裂力学、损伤力学等许多研究领域的理论基础，而且它在金属压力加工、岩土工程、机械制造、结构分析等许多工程实际问题中有着重要而广泛的应用背景。近年来塑性力学一直是国内外十分活跃的研究领域之一。在塑性力学的理论、计算及实验研究方面，我国学者在跟踪国际前沿的同时，做出了一些有特色的创新性工作；在塑性力学的工程应用方面，我国学者所取得的一批令人瞩目的成果，正在我国的国民经济建设中发挥着巨大的作用。

自 2011 年初全国塑性力学会议征文通知发出以来，一直得到国内广大塑性力学工作者的积极响应和支持，大家踊跃投稿。我们从中精选出来一部分有代表性的论文，它们基本上反映了我国学者近年来在塑性力学领域的学术研究和工程应用方面的概况，现予正式出版，供同行们和有关科研人员参考。其中难免有不妥和错误之处，敬请读者提出批评指正。最后我们还要衷心感谢清华大学出版社对我们工作所给予的大力支持。

编者

2011 年 10 月

目　　录

一、材料与结构的塑性力学行为

准热力学公设和热弹塑性本构关系.....黄筑平　陈永强　3
屈服面演化与基于物理机制建立塑性本构理论方法的探讨.....梁乃刚　刘　芳　陈岑　14
有限变形条件下的本构理论与屈服面演化等效性质....刘　芳　陈　岑　梁乃刚　孔祥韶　25
民航客机拦阻系统的一种解决方案.....张志强　杨嘉陵　37
考虑表面效应的材料特征尺度参量研究.....刘建云　宋晶如　魏悦广　43
向列相液晶弹性体的指向矢偏转与其塑性行为的研究.....吴　振　仲　政　50
非晶合金多重剪切带协同演化行为.....陈　艳　戴兰宏　57
亚微米尺度晶体塑性新的本构关系研究.....庄　茁　65
Johnson-Cook 冲击动态本构模型研究.....朱志武　宁建国　71
计及重取向与塑性变形的 SMA 本构模型.....彭向和　陈　斌　王　军　王沪毅　77
应变循环下金属细观变形的不均匀演变与疲劳的关联.....张克实　石艳柯　85
金属材料应变率相关的塑性变形细观机制.....施惠基　蔡明春　牛莉莎　92
单轴拉伸下剪切带的应变梯度理论预测.....陈少华　冯　彪　99
基于微观机制的多机制循环本构模型.....刘宇杰　康国政　董亚伟　闫桂林　106
压力敏感性材料宏观屈服准则的构建.....于雪梅　程　伟　唐立强　吴　爽　112
拉丝失效的研究进展.....徐贵娥　李兆霞　方　峰　蒋建清　120
平面加载条件下材料失稳行为研究.....马　维　李相旺　129
树脂基复合材料的塑性力学行为.....贾普荣　王　玲　李　亮　矫桂琼　王文贵　136
单晶塑性理论对 Ni 微柱体的适用性研究.....潘　渤　张　旭　尚福林　143
宏微观耦合本构模型参数识别面临的困境.....曲　杰　150
捏拢效应和 *P*-Δ效应作用下非弹性地震动力响应分析的新型 Bouc-Wen 模型
.....余　波　杨绿峰　156

二、塑性力学中的数值方法和数值模拟

卵形弹正穿甲三层泡沫铝复合层靶.....包永刚　张年梅　杨桂通　167
大型锻件锻造与工艺数值模拟.....金泉林　174
考虑包氏效应的流体弹塑性模型在高速撞击问题中的应用.....陈千一　刘凯欣　189
超高速撞击立方体卫星数值模拟研究.....栗建桥　宋卫东　宁建国　195
动能弹侵彻问题的大规模高性能计算.....费广磊　马天宝　宁建国　203

基于 Lagrange 和 ALE 算法的展开型定向战斗部数值模拟
.....耿 荻 马天宝 宁建国 王 星 209
轻质金属夹芯曲板的抗爆炸冲击响应研究.....秦庆华 艾伟龙 张建勋 王铁军 216
含缺陷压力容器和管道的塑性失效评定方法研究.....刘应华 陈 钢 徐秉业 223
岩土材料的破坏与极限分析方法的发展.....郑颖人 231
锚泊线与塑性海床的三维接触问题研究.....国 振 王立忠 袁 锋 241
不同围压下混凝土 SHPB 实验的数值模拟研究.....董海威 刘呈呈 陈江瑛 陈建康 251
基于 J-C 模型的受冲击钢梁的位移计算和两个应变率本构模型的比较分析
.....席 丰 张 云 259
Ni 单晶微柱体单轴压缩的晶体塑性有限元分析.....张 旭 潘 渤 尚福林 265
基于粘聚力模型的镍基合金的蠕变-疲劳裂纹扩展数值模拟.....张国滨 袁 荒 271
基于微焦点 CT 扫描的煤岩材料应变局部化数值模拟研究...赵毅鑫 汉京礼 姜耀东 277
动力弹塑性分析的无网格自然单元法.....陈苇苇 李庆华 刘应华 283
混凝土塑性损伤 ABAQUS 用户子程序开发.....冯金龙 沈新普 刘应华 289
考虑弹塑性变形约束的裂纹尖端塑性区分析.....林立志 李法新 298
韧性碎裂过程中的最快卸载现象.....郑宇轩 周风华 胡时胜 305
金属带板中绝热剪切带传播速度的数值模拟研究.....李桂花 周风华 312
金属凝固过程中应力及非均匀材料性质演化的相场模拟
.....冯 露 王世斌 亢一澜 刘美华 李林安 沈珉 320
汽车碰撞防护栏行为有限元分析.....曹 鹏 冯德成 沈新普 331

三、实验研究和工程应用

微焊点/Cu 盘界面共合物 IMC 层微观结构和力学性能的研究.....树学峰 341
煤矿冲击地压巷道吸能支护研究.....潘一山 吕祥锋 李忠华 348
RESPONSE OF SANDWICH STRUCTURES TO BLAST LOADING..... Guoxing Lu 353
1Cr18Ni9Ti 不锈钢单轴棘轮－疲劳交互作用实验研究.....罗海波 张 娟 康国政 360
45 号钢和 Glidcop 的低周疲劳裂纹扩展行为研究.....陈海波 殷 琰 肖维灵 366
高强结构钢 DH-36 的拉伸塑性流动特性及本构关系
.....孟卫华 郭伟国 孔德栓 朱 泽 374
含缺陷 PVC 板材弹性降温及热致磁效应实验研究
.....罗迎社 陈胜铭 张 亮 粟建新 张永忠 罗树凌 381
塑性海床上 J 型铺管中管土相互作用的解析分析
.....王立忠 袁 峰 国 振 李玲玲 谢永贵 388
沿空掘巷下护巷窄煤柱稳定性分析.....朱建明 王晓纯 张宏涛 394
塑性极限分析方法在重力坝深层抗滑稳定中的应用.....张宏涛 白玉星 陈祖煜 402
内压条件下薄壁压力容器的承载能力.....邓阳春 陈 钢 410
考虑应变影响的三维加工图方法及其应用.....刘 娟 崔振山 416
应变梯度晶体塑性在超精密切削中的应用.....陈贻平 李荣彬 423

一 材料与结构的塑性力学行为

准热力学公设和热弹塑性本构关系

黄筑平　陈永强

北京大学工学院力学与空天技术系, 北京, 100871

摘　要　经典的准热力学公设（如 Drucker 公设，伊柳辛公设和 Ziegler 公设）在弹塑性本构关系的构建中具有重要的作用。然而，经典的准热力学公设只能应用于等温条件下弹塑性变形的研究。1991 年，本文第一作者将以上的准热力学公设推广到计及温度效应的情形，并在此基础上，给出了有限变形热弹塑性本构关系的理论框架。在本文中，首先我们对本文作者所提出的准热力学公设与其他作者所提出的准热力学公设进行了比较和讨论，进一步说明了本文作者所提出的公设的合理性。其次，我们根据以上的有限变形热弹塑性本构关系的理论框架，具体构建了增量型的热弹塑性本构关系，并基于非平衡态热力学，给出了材料在变形过程中的升温率表达式。最后，我们将以上结果退化到小变形情形，通过具体实例，在温度-应变空间和温度-应力空间中，讨论了材料的定容比热、屈服面（和后继屈服面）的温度依赖关系以及热-力耦合效应等因素对热弹塑性本构关系的影响。

关键词　准热力学公设，热-力耦合效应，热弹塑性本构关系

0　引言

多晶金属的弹塑性变形主要有两种机制。其一是晶格的弹性畸变，其二是由于位错运动而产生的不可恢复的塑性变形。相应地，通常需要引进两个彼此独立的本构函数，即自由能函数和屈服函数。自由能函数用来描述材料的弹性变形，而屈服函数则用来区分材料在变形过程中是处于弹塑性加载状态，还是处于弹性卸载状态。对于率无关材料，塑性应变率（或塑性应变增量）是总应变率（或总应变增量）的一次齐次式。因此，如果能够确定塑性应变率的方向，便不难根据一致性条件得到相应的弹塑性本构方程。

在经典的弹塑性理论中，塑性应变率的方向通常是借助于某些准热力学公设（如 Drucker 公设，伊柳辛公设）来加以确定的，或者是借助于耗散率函数的 Ziegler 公设先在广义力空间中给出塑性应变率的方向，然后再将其转换到真实的应力空间中。然而，经典的准热力学公设（如 Drucker 公设，伊柳辛公设）只能用于等温条件下的弹塑性变形。为了能够考虑温度变化对弹塑性本构关系的影响，Huang[1]和 Lucchesi 及 Silhavy[2]于 1991 年分别提出了计及温度效应的新的准热力学公设。随后，Huang[3]又在他本人提出的准热力学公设的基础上，建立了有限变形热弹塑性本构关系的理论框架。在本文中，我们首先对文献[1]和文献[2]所提出的准热力学公设进行了比较，并讨论其合理性；其次，在文献[3]的基础上进一步给出了热弹塑性率型本构关系和升温率的具体表达式，定量地讨论了材料的定容比热和屈服函数的温度依赖关系，以及热力耦合效应等因素对弹塑性本构关系的影响。最

后，本文将以上表达式退化到小变形情形，通过具体实例对本文的理论作了进一步的说明。本文工作对于金属热加工成型等工程实际问题具有理论指导意义。

1 计及温度效应的准热力学公设

材料的弹塑性变形伴随着能量耗散，是一个不可逆过程。其热力学状态可以通过内变量的适当引入而与一个虚设的处于约束平衡态的热力学状态相对应，这样的平衡态称为局部伴随状态，相应的状态变量除了外部状态变量外，还有内变量 ξ_m $(m=1,2,\cdots)$。例如，可取为 $(\eta,\boldsymbol{E},\xi_m)$ 或 $(\theta,\boldsymbol{E},\xi_m)$，其中 η 和 θ 分别为约束平衡态下的熵和绝对温度，$\boldsymbol{E}$ 为 Lagrange 型应变。在弹塑性变形过程中，由于应力不仅与应变有关，而且还与应变的历史有关，所以弹塑性本构关系通常总是以率型的形式给出的。而当采用准热力学公设后，这类本构关系的建立将会得到极大的简化。准热力学公设并不能直接根据热力学定律导出。它是由大量的实验观察中总结出来的一类“假设”（postulate）。在等温条件下，Drucker 公设和伊柳辛公设在构造弹塑性本构关系中起了相当重要的作用。如何将以上的“公设”推广到计及温度的情形，显然是一个值得研究的课题。然而，如文献[2]的作者所说的那样，这方面的研究并不多见（“to our knowledge, not much has been published on this topic so far, …”）。直到 1991 年，文献[1]和文献[2]才分别给出了非等温条件下各自的准热力学公设。下面将对此做简要的讨论。

文献[2]给出了两个准热力学公设。第一个是构造温度-应变空间中的闭循环。在此闭循环中，要求

$$\oint\left[\frac{\bar{\boldsymbol{T}}:\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\rho_0\theta}-\frac{u\mathrm{d}\theta}{\theta^2}\right]\geqslant 0 \tag{1}$$

上式中 ρ_0 为初始密度，u 为内能，$\bar{\boldsymbol{T}}$ 表示在温度-应变空间中与 $\boldsymbol{E}$ 功共轭的应力。

不等式(1)是基于以下考虑得到的：若引入 Massieu 函数（普朗克特性函数，可参见文献[4]）$\chi=-\dfrac{\psi}{\theta}$，其中 ψ 为 Helmholtz 自由能，则由文献[5]的式(3.112)，热力学第二定律可以写为

$$\rho_0(\dot{\psi}+\eta\dot{\theta})\leqslant\bar{\boldsymbol{T}}:\dot{\boldsymbol{E}}-\frac{1}{\theta}\boldsymbol{q}_0\cdot\nabla_0\theta \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{q}_0$ 为热流向量，$\nabla_0\theta$ 为温度梯度。上式也可以等价地写为

$$-\dot{\chi}\leqslant\frac{\bar{\boldsymbol{T}}:\dot{\boldsymbol{E}}}{\rho_0\theta}-\frac{u}{\theta^2}\dot{\theta}-\frac{1}{\rho_0\theta^2}\boldsymbol{q}_0\cdot\nabla_0\theta \tag{3}$$

如果再作以下两个很强的假设：(*a*)不考虑热传导的贡献，令 $\boldsymbol{q}_0=\boldsymbol{0}$；(*b*)在以上闭循环中，$\chi$ 回到初值，便可得到不等式(1)。然而，正如文献[2]作者本人所说的那样，不等式(1)并没有直接的物理意义（“does not have a direct physical significance”）。

文献[2]的第二个准热力学公设是在内能-应变空间的闭循环中要求

$$\oint\left[\frac{\mathrm{d}u}{\theta}-\frac{\tilde{\boldsymbol{T}}:\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\rho_0\theta}\right]\leqslant 0 \tag{4}$$

上式中的 $\tilde{\boldsymbol{T}}$ 表示在内能-应变空间中，与 $\boldsymbol{E}$ 相功共轭的应力。

不等式(4)是基于以下考虑导出的：热力学第一和第二定律可分别写为

$$\begin{aligned}&\rho_0 \mathrm{d}u - \tilde{\boldsymbol{T}} : \mathrm{d}\boldsymbol{E} = \delta Q \\ &\oint \mathrm{d}\eta \geqslant \oint \frac{\delta Q}{\rho_0 \theta}\end{aligned} \tag{5}$$

上式中，δQ 表示输入给体系的热量增量。如果假定在上式的闭循环中，η 能回到初值，便可得到不等式(4)。

显然，在弹塑性变形中，式(3)中的 χ 和式(5)中的 η 并不能保证一定能够回到初值。此外，文献[2]在给出不等式(1)和(4)时，还附加了一些其他的条件，例如在循环的塑性加载中温度 θ 始终不大于循环初始温度 θ_0 等。因此，文献[2]所给出的推理过程并没有充分的依据。

文献[1]所给出的准热力学公设可表述如下：在熵-应变空间的闭循环中，要求有

$$\oint (\rho_0 \theta \mathrm{d}\eta + \boldsymbol{T} : \mathrm{d}\boldsymbol{E}) \geqslant 0 \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 表示在熵-应变空间中与 $\boldsymbol{E}$ 相功共轭的应力。不等式(6)是出于以下考虑导出的：对应于广延量 $(\rho_0 \eta, \boldsymbol{E})$，$(\theta, \boldsymbol{T})$ 是与其相共轭的强度量，因此式(6)可以看作是伊柳辛公设的一种自然推广。根据文献[5]的式(3.124)，式(6)可以等价地写为

$$\oint (\rho_0 \dot{u} + A^{(m)} \dot{\xi}_m) \mathrm{d}t \geqslant 0 \text{,对 } m \text{ 求和}$$

注意到 $A^{(m)} \dot{\xi}_m$ 表示能量耗散率，始终是非负的，因此式(6)相当于要求在以上的闭循环中，内能 u 的减少不超过总的耗散能。例如，对于理想气体，在以上的闭循环中，内能 u 不变，从而由 $A^{(m)} \dot{\xi}_m \geqslant 0$,可知式(6)是成立的。事实上，理想气体的状态方程可以写为

$$pV = nR\theta \tag{7}$$

式中 p 和 V 分别是压强和体积，n 是摩尔数，R (R = 8.314 J/(mol·K))为摩尔气体常数。体系的内能为

$$u = u_0 + \alpha n R \left(\theta - \theta_0\right)$$

其中 θ_0 为参考温度，对于单原子气体，$\alpha = 3/2$，（αNR 相当于定容热容量）。热力学第一定律为

$$\mathrm{d}u = \delta Q - p\mathrm{d}V$$

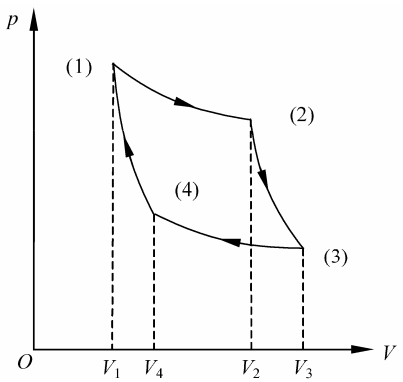


图 1　理想气体的卡诺循环

现考虑理想气体的卡诺(Carnot)循环，它是由以下 4 个过程构成的闭循环：

(1)→(2) 等温膨胀：温度θ_1不变（故内能u_1也不变），而熵的改变为$\eta_2-\eta_1=nR\ln\frac{V_2}{V_1}$。体系对外做的功为$\theta_1(\eta_2-\eta_1)$。

(2)→(3) 绝热膨胀：熵η_2不变，而温度的改变满足$\theta_2=\theta_1\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{2/3}$,体系对外做的功为$\Delta u=\alpha nR(\theta_2-\theta_1)$。

(3)→(4) 等温压缩：温度θ_2不变（故内能也不变），而熵的改变为$\eta_4-\eta_3=\eta_1-\eta_2=-nR\ln\frac{V_3}{V_4}$，对体系做的功为$\theta_2(\eta_2-\eta_1)$。

(4)→(1) 绝热压缩：熵η_1不变，而温度改变满足$\theta_1=\theta_2\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{2/3}$。对体系做的功为$\Delta u=\alpha nR(\theta_2-\theta_1)$。以上循环要求$\frac{V_2}{V_1}=\frac{V_3}{V_4}$，因此卡诺循环实现了熵-应变空间中的闭循环，且有

$$\oint(\theta\mathrm{d}\eta-p\mathrm{d}V)=0 \tag{8}$$

如果将以上(1)→(2)的等温膨胀改为自由膨胀，则是一个不可逆过程，其中温度θ_1（故内能u_1）是不变的。虽然体系并没有对外做功，但熵却有了增加。这时，式(8)中的等号应改为“大于号”，表明不等式(6)是成立的。

以上所建议的几种准热力学公设的比较可列于表 1。

表 1 几种考虑温度变化的准热力学公设的比较

	不等式(1)	不等式(4)	不等式(6)
等温时，能否退化到伊柳辛公设	能	不能	能
有无明确的物理意义	无	有	有
有无过强的假设	有	有	无
有无具体的证明实例	无	无	有

从上表不难看出，文献[1]所提出的准热力学公设是更为合理的。

2 热弹塑性本构关系

基于准热力学公设的不等式(6)，文献[3]在“熵-应变”空间和“温度-应力”空间这两个对偶的空间中建立了相应的热-弹塑性本构关系。在熵-应变空间中，独立变量为$(\rho_0\eta,\boldsymbol{E},\xi_m)$，与其对偶的变量为温度$\theta=\theta(\rho_0\eta,\boldsymbol{E},\xi_m)$和应力$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\rho_0\eta,\boldsymbol{E},\xi_m)$。屈服函数为$g=g(\rho_0\eta,\boldsymbol{E},\xi_m)=0$。

对于率无关材料，内变量的演化方程可以形式地写为

$$\dot{\xi}_m=\lambda\Xi_m(\rho_0\eta,\boldsymbol{E},\xi_m)\langle\hat{g}\rangle \tag{9}$$

其中，

$$\hat{g}=\frac{\partial g}{\partial \eta}\dot{\eta}+\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{E}}:\dot{\boldsymbol{E}} \tag{10}$$

式(9)中的符号$\langle\cdot\rangle$表示了“加-卸载准则”，即

$$\langle\hat{g}\rangle=\begin{cases}0, & g<0\\ 0, & g=0,\hat{g}<0\\ 0, & g=0,\hat{g}=0\\ \hat{g}, & g=0,\hat{g}>0\end{cases} \tag{11}$$

式(9)中的参数λ可由如下的一致性条件来加以确定：

$$1+\lambda\frac{\partial g}{\partial \xi_m}\Xi_m=0\text{，(对 } m \text{ 求和)}$$

相应的率型本构关系可表示为

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\rho_0 L_0\dot{\eta}+\boldsymbol{L}_1:\dot{\boldsymbol{E}}+\dfrac{\partial\theta}{\partial\xi_m}\dot{\xi}_m,\\ \dot{\boldsymbol{T}}=\rho_0\boldsymbol{L}_1\dot{\eta}+\boldsymbol{L}:\dot{\boldsymbol{E}}+\dfrac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\xi_m}\dot{\xi}_m,\end{cases}\quad\text{（对 } m \text{ 求和）} \tag{12}$$

其中$\rho_0 L_0=\dfrac{\partial\theta}{\partial\eta}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$，$\boldsymbol{L}_1=\dfrac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{E}}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\boldsymbol{E}}$，$\boldsymbol{L}=\rho_0\dfrac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{E}\partial\boldsymbol{E}}$为绝热条件下的切线模量；$u$为内能。式(12)的逆关系可以写为

$$\begin{cases}\rho_0\dot{\eta}=M_0\dot{\theta}+\boldsymbol{M}_1:\dot{\boldsymbol{T}}+\rho_0\dfrac{\partial\eta}{\partial\xi_m}\dot{\xi}_m,\\ \dot{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{M}_1\dot{\eta}+\boldsymbol{M}:\dot{\boldsymbol{T}}+\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial\xi_m}\dot{\xi}_m,\end{cases}\quad\text{（对 } m \text{ 求和）} \tag{13}$$

上式中的$\begin{pmatrix}M_0 & \boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{M}\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}L_0 & \boldsymbol{L}_1\\ \boldsymbol{L}_1 & \boldsymbol{L}\end{pmatrix}$是互逆的，而且它们都是对称正定的。

温度-应力空间中的屈服面可写为

$$f(\theta,\boldsymbol{T},\xi_m)=g(\rho_0\eta(\theta,\boldsymbol{T},\xi_m),\boldsymbol{E}(\theta,\boldsymbol{T},\xi_m),\xi_m)=0 \tag{14}$$

其法向与屈服面$g=0$的法向之间有如下关系

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\rho_0\partial\eta}\\ \dfrac{\partial g}{\partial\boldsymbol{E}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_0 & \boldsymbol{L}_1\\ \boldsymbol{L}_1 & \boldsymbol{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{T}}\end{pmatrix} \tag{15}$$

要确定式(9)中的函数$\Xi\left(\rho_0\eta,\boldsymbol{E},\xi_m\right)$是相当困难的。但是根据文献[1]所提出的准热力学公设，便可证明正交流动法则是成立的，故有

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi_m}\dot{\xi}_m=-\nu^*\frac{\partial g}{\rho_0\partial\eta}\langle\hat{g}\rangle,\quad\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\xi_m}\dot{\xi}_m=-\nu^*\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{E}}\langle\hat{g}\rangle \tag{16}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial \xi_m}\dot{\xi}_m = \nu^* \frac{\partial f}{\partial \theta}\langle \hat{g} \rangle ,\quad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \xi_m}\dot{\xi}_m = \nu^* \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{T}}\langle \hat{g} \rangle \tag{17}$$

式中，

$$\nu^* = \frac{1}{h+H} > 0 \tag{18}$$

$$H = \frac{\partial g}{\rho_0 \partial \eta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{E}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{T}} > 0 \tag{19}$$

h 为硬化指数。

然而，人们通常习惯于在“温度-应变”空间中来讨论热弹塑性本构关系。为此，下面重点讨论如何将以上的方程转换到温度-应变空间中。现引进 Helmholtz 自由能 $\psi=\psi(\theta, \boldsymbol{E}, \xi_m)$，这时的熵和应力可分别表示为

$$\begin{cases} \overline{\eta}=\overline{\eta}(\theta, \boldsymbol{E}, \xi_m) = -\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \overline{\boldsymbol{T}} = \overline{\boldsymbol{T}}(\theta, \boldsymbol{E}, \xi_m)=\rho_0 \dfrac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}} \end{cases} \tag{20}$$

相应的率型本构关系可写为

$$\begin{cases} \rho_0 \dot{\overline{\eta}} = \rho_0 \overline{L}_0 \dot{\theta} + \overline{\boldsymbol{L}}_1 : \dot{\boldsymbol{E}} + \rho_0 \dfrac{\partial \overline{\eta}}{\partial \xi_m}\dot{\xi}_m \\ \dot{\overline{\boldsymbol{T}}} = -\overline{\boldsymbol{L}}_1 \dot{\theta} + \overline{\boldsymbol{L}} : \dot{\boldsymbol{E}} + \dfrac{\partial \overline{\boldsymbol{T}}}{\partial \xi_m}\dot{\xi}_m \end{cases} \tag{21}$$

其中，$\overline{L}_0 = \dfrac{\partial \overline{\eta}}{\partial \theta}$，$\overline{\boldsymbol{L}}_1 = -\rho_0 \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \boldsymbol{E}}$，$\overline{\boldsymbol{L}} = \dfrac{\partial \overline{\boldsymbol{T}}}{\partial \boldsymbol{E}} = \rho_0 \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{E} \partial \boldsymbol{E}}$。式(21)右端的最后一项对应于 $\dot{\overline{\eta}}$ 和 $\dot{\overline{\boldsymbol{T}}}$ 的非弹性部分。问题的关键就是要给出它们的具体表达式。

注意到恒等式

$$\begin{aligned} \eta &= \overline{\eta}\left(\theta\left(\rho_0 \eta, \boldsymbol{E}, \xi_m\right), \boldsymbol{E}, \xi_m\right) \\ \boldsymbol{T} &= \overline{\boldsymbol{T}}\left(\theta, \boldsymbol{E}\left(\theta, \boldsymbol{T}, \xi_m\right), \xi_m\right) \end{aligned} \tag{22}$$

有 $\dfrac{\partial \eta}{\partial \xi_m} = \dfrac{\partial \overline{\eta}}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial \xi_m} + \dfrac{\partial \overline{\eta}}{\partial \xi_m} = 0$ 和 $\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi_m} = \dfrac{\partial \overline{\boldsymbol{T}}}{\partial \boldsymbol{E}}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \xi_m} + \dfrac{\partial \overline{\boldsymbol{T}}}{\partial \xi_m} = \boldsymbol{0}$，因此，

$$\frac{\partial \overline{\eta}}{\partial \xi_m} = -\overline{L}_0 \frac{\partial \theta}{\partial \xi_m},\quad \frac{\partial \overline{\boldsymbol{T}}}{\partial \xi_m} = -\overline{\boldsymbol{L}} : \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \xi_m} \tag{23}$$

由文献[3]的式(5.4)和式(5.7)，上式中的 $\overline{L}_0$ 和 $\overline{\boldsymbol{L}}$ 还可写为

$$\overline{L}_0 = \frac{1}{\rho_0 L_0} = \frac{C_E}{\theta},\quad \overline{\boldsymbol{L}} = \mathbf{M}^{-1} \tag{24}$$

其中 C_E 为定容比热容。

温度-应变空间中的屈服面为

$$\overline{g} = \overline{g}(\theta, \boldsymbol{E}, \xi_m) = 0 \tag{25}$$

利用等式 $\bar{g}(\theta(\rho_0\eta,\boldsymbol{E},\xi_m),\boldsymbol{E},\xi_m)=g(\rho_0\eta,\boldsymbol{E},\xi_m)$，可知

$$\frac{\partial g}{\partial \eta}=\frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \eta},\quad \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{E}}=\frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{E}}+\frac{\partial \bar{g}}{\partial \boldsymbol{E}}$$

故得

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}=\frac{1}{\rho_0 L_0}\frac{\partial g}{\partial \eta},\quad \frac{\partial \bar{g}}{\partial \boldsymbol{E}}=\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{E}}-\boldsymbol{L}_1\frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}=\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{E}}-\left(\frac{1}{\rho_0 L_0}\right)\boldsymbol{L}_1\frac{\partial g}{\partial \eta} \tag{26}$$

再由等式 $\bar{g}(\theta,\boldsymbol{E}(\theta,\boldsymbol{T},\xi_m),\xi_m)=f(\theta,\boldsymbol{T},\xi_m)$，还可以得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}=\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}+\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \boldsymbol{E}}:\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \theta}=\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}+\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \boldsymbol{E}}:\boldsymbol{M}_1\\ \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{T}}=\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \boldsymbol{E}}:\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{T}}=\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \boldsymbol{E}}:\boldsymbol{M}=(\bar{\boldsymbol{L}})^{-1}:\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \boldsymbol{E}}\end{cases} \tag{27}$$

其中已用到了式(24)以及四阶张量 $\bar{\boldsymbol{L}}$ 的对称性。

于是，由式(16)和式(17)，并注意到式(23)、式(24)以及式(26)、式(27)，式(21)右端的最后一项可分别写为

$$\begin{cases}\rho_0\dfrac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi_m}\dot{\xi}_m=-\dfrac{1}{L_0}\dfrac{\partial \theta}{\partial \xi_m}\dot{\xi}_m=\dfrac{1}{\rho_0 L_0}\nu^*\dfrac{\partial g}{\partial \eta}\langle\hat{g}\rangle=\nu^*\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}\langle\hat{g}\rangle\\ \dfrac{\partial \bar{\boldsymbol{T}}}{\partial \xi_m}\dot{\xi}_m=-\bar{\boldsymbol{L}}:\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \xi_m}\dot{\xi}_m=-\nu^*\bar{\boldsymbol{L}}:\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{T}}\langle\hat{g}\rangle=-\nu^*\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \boldsymbol{E}}\langle\hat{g}\rangle\end{cases} \tag{28}$$

由式(25)，可定义

$$\hat{\dot{\bar{g}}}=\frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}\dot{\theta}+\frac{\partial \bar{g}}{\partial \boldsymbol{E}}:\dot{\boldsymbol{E}}$$

利用式(26)以及式(12)和式(16)，可知在弹塑性加载时，上式可写为

$$\begin{aligned}\hat{\dot{\bar{g}}}&=\left(\frac{1}{\rho_0 L_0}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial \eta}\right)\left(\rho_0 L_0\dot{\eta}+\boldsymbol{L}_1:\dot{\boldsymbol{E}}+\frac{\partial \theta}{\partial \xi_m}\dot{\xi}_m\right)+\left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{E}}-\frac{\boldsymbol{L}_1}{\rho_0 L_0}\frac{\partial g}{\partial \eta}\right):\dot{\boldsymbol{E}}\\ &=\frac{\partial g}{\partial \eta}\dot{\eta}+\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{E}}:\dot{\boldsymbol{E}}-\nu^*\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial g}{\rho_0\partial \eta}\right)\hat{g}\\ &=\left(1-\nu^* L_0\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}\right)^2\right)\hat{g}\end{aligned}$$

因此有

$$\langle\hat{g}\rangle=\left\langle\frac{\hat{\dot{\bar{g}}}}{1-\nu^*\left(\dfrac{\theta}{\rho_0 C_E}\right)\left(\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}\right)^2}\right\rangle \tag{29}$$

上式中，L_0 已经根据式(24)由定容比热容 C_E 来表示。

最后，利用式(26)和式(27)，可将式(19)中的 H 写为

$$H=\left(L_0\frac{\partial\overline{g}}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial\overline{g}}{\partial\theta}+\frac{\partial\overline{g}}{\partial\boldsymbol{E}}:\boldsymbol{M}_1\right)+\left(\frac{\partial\overline{g}}{\partial\boldsymbol{E}}+L_1\frac{\partial\overline{g}}{\partial\theta}\right):\boldsymbol{M}:\frac{\partial\overline{g}}{\partial\boldsymbol{E}}$$
$$=L_0\left(\frac{\partial\overline{g}}{\partial\theta}\right)^2+\frac{\partial\overline{g}}{\partial\boldsymbol{E}}:\boldsymbol{M}:\frac{\partial\overline{g}}{\partial\boldsymbol{E}}+\frac{\partial\overline{g}}{\partial\theta}\left(L_0\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{L}_1:\boldsymbol{M}\right):\frac{\partial\overline{g}}{\partial\boldsymbol{E}}$$

再由文献[3]的式(2.18)和式(5.7)，上式右端最后一项为零，故 H 可最终写为

$$H=\left(\frac{\theta}{\rho_0 C_E}\right)\left(\frac{\partial\overline{g}}{\partial\theta}\right)^2+\frac{\partial\overline{g}}{\partial\boldsymbol{E}}:\left(\overline{\boldsymbol{L}}\right)^{-1}:\frac{\partial\overline{g}}{\partial\boldsymbol{E}} \tag{30}$$

于是，由式(28)和(29)，在温度-应变空间中的率型本构方程式(21)可具体表示为

$$\begin{cases}\rho_0\dot{\overline{\eta}}=\rho_0\dfrac{C_E}{\theta}\dot{\theta}+\overline{\boldsymbol{L}}_1:\dot{\boldsymbol{E}}+\nu^*\dfrac{\partial\overline{g}}{\partial\theta}\left\langle\dfrac{\hat{\overline{g}}}{\chi_{(\mathrm{th})}}\right\rangle\\ \dot{\overline{\boldsymbol{T}}}=-\overline{\boldsymbol{L}}_1\dot{\theta}+\overline{\boldsymbol{L}}:\dot{\boldsymbol{E}}-\nu^*\dfrac{\partial\overline{g}}{\partial\boldsymbol{E}}\left\langle\dfrac{\hat{\overline{g}}}{\chi_{(\mathrm{th})}}\right\rangle\end{cases} \tag{31}$$

其中 $\chi_{(\mathrm{th})}=1-\nu^*\left(\dfrac{\theta}{\rho_0 C_E}\right)\left(\dfrac{\partial\overline{g}}{\partial\theta}\right)^2$，式中的 ν^* 由式(18)和式(30)给出。

3 弹塑性变形过程中的升温率

由热力学第一定律，在约束平衡态下熵的变化率可根据文献[5]的式(3.73)和式(3.124)写为

$$\rho_0\theta\dot{\eta}=\rho_0\dot{u}-\boldsymbol{T}^a:\dot{\boldsymbol{E}}+A^{(m)}\dot{\xi}_m$$
$$=\left(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^a\right):\dot{\boldsymbol{E}}+A^{(m)}\dot{\xi}_m+\rho_0 h-\nabla_0\cdot\boldsymbol{q}_0,\quad \text{对 } m \text{ 求和} \tag{32}$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{T}^a$ 分别为与 $\boldsymbol{E}$ 相共轭的真实应力和约束平衡态下的应力。在本文中，我们假定 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^a$，$A^{(m)}$ 是与 ξ_m 相共轭的广义力；$\rho_0 h$ 和 $\boldsymbol{q}_0$ 分别为分布热源和热流向量；$\nabla_0\cdot\boldsymbol{q}_0$ 为热流向量的散度。

注意到 $\eta=-\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}$，上式左端可写为

$$\rho_0\theta\dot{\eta}=\rho_0\theta\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\dot{\theta}-\theta\frac{\partial\overline{\boldsymbol{T}}}{\partial\theta}:\dot{\boldsymbol{E}}+\theta\frac{\partial A^{(m)}}{\partial\theta}\dot{\xi}_m,\quad \text{对 } m \text{ 求和}$$

其中 $A^{(m)}=-\rho_0\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi_m}$，而 $\theta\dfrac{\partial\eta}{\partial\theta}\bigg|_{(\boldsymbol{E},\xi_m)}$ 恰好就是材料的定容比热容 C_E，因此式(32)可具体写为

$$\rho_0 C_E\dot{\theta}=\theta\frac{\partial\overline{\boldsymbol{T}}}{\partial\theta}:\dot{\boldsymbol{E}}-\theta\frac{\partial A^{(m)}}{\partial\theta}\dot{\xi}_m+A^{(m)}\dot{\xi}_m+\rho_0 h-\nabla_0\cdot\boldsymbol{q}_0 \tag{33}$$

上式中的 $A^{(m)}\dot{\xi}_m\geqslant 0$ 为耗散率，热流向量 $\boldsymbol{q}_0$ 需要通过关于热传导的本构关系来加以确定。特别地，对于没有分布热源的绝热过程，上式退化为

$$\rho_0 C_E\dot{\theta}=\theta\frac{\partial\overline{\boldsymbol{T}}}{\partial\theta}:\dot{\boldsymbol{E}}-\theta\frac{\partial A^{(m)}}{\partial\theta}\dot{\xi}_m+A^{(m)}\dot{\xi}_m \tag{34}$$

4 小变形条件下热弹性本构关系的简单实例

现将以上结果退化到小变形情形。考虑一个 Voigt 元件与线性弹簧(1)的串联模型。Voigt 元件由塑性滑块与另一个线性弹簧(2)的并联组成。滑块的应变用内变量 $\boldsymbol{\xi}$ 表示，$\boldsymbol{\xi}$ 是一个二阶对称张量。显然，滑块的应变也是弹簧(2)的应变。如果总应变为 $\boldsymbol{E}$，则弹簧(1)的应变为 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}$。

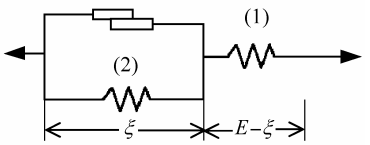


图 2 Voigt 元件与线性弹簧(1)的串联

简单起见，假定定容比热容 C_E 在参考温度 θ_0 附近为常数，由文献[5]，这时的 Helmholtz 自由能可写为

$$\psi=\psi_0+\left(C_E-\eta_0\right)\left(\theta-\theta_0\right)-C_E\theta\ln\frac{\theta}{\theta_0}+\hat{W} \tag{35}$$

其中 η_0 为参考温度下的熵，$\hat{W}=\hat{W}\left(\theta,\boldsymbol{E},\boldsymbol{\xi}\right)=\hat{u}\left(\boldsymbol{E},\boldsymbol{\xi}\right)-\theta\hat{\eta}\left(\boldsymbol{E},\boldsymbol{\xi}\right)$ 是温度的线性函数。$\hat{W}$ 在参考温度附近展开后，可写为

$$\begin{aligned}\rho_0\hat{W}=&\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}):\boldsymbol{L}^{(1)}:(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi})-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}):\boldsymbol{L}^{(1)}:\boldsymbol{\alpha}^{(1)}(\theta-\theta_0)\\&+\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}:\boldsymbol{L}^{(2)}:\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}:\boldsymbol{L}^{(2)}:\boldsymbol{\alpha}^{(2)}(\theta-\theta_0)\end{aligned} \tag{36}$$

其中 $\boldsymbol{L}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{L}^{(2)}$ 分别是弹簧(1)和弹簧(2)的弹性模量张量，$\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}^{(2)}$ 分别为弹簧(1)和弹簧(2)的热膨胀系数张量。如果假定 $\boldsymbol{L}^{(1)}=2\mu^{(1)}\overset{(1)}{\boldsymbol{I}}+\lambda^{(1)}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{L}^{(2)}=2\mu^{(2)}\overset{(1)}{\boldsymbol{I}}+\lambda^{(2)}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}$ 为四阶各向同性张量，$\boldsymbol{\alpha}^{(1)}=\alpha^{(1)}\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}^{(2)}=\alpha^{(2)}\boldsymbol{I}$ 为二阶各向同性张量，其中 $\overset{(1)}{\boldsymbol{I}}$ 和 $\boldsymbol{I}$ 分别为四阶和二阶单位张量，那么式(36)还可具体写为

$$\begin{aligned}\rho_0\hat{W}=&\mu^{(1)}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}):(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi})+\frac{\lambda^{(1)}}{2}\left[\operatorname{tr}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi})\right]^2-3K^{(1)}\alpha^{(1)}\operatorname{tr}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi})(\theta-\theta_0)\\&+\mu^{(2)}\boldsymbol{\xi}:\boldsymbol{\xi}+\frac{\lambda^{(2)}}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\xi})^2-3K^{(2)}\alpha^{(2)}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\xi})(\theta-\theta_0)\end{aligned} \tag{37}$$

其中，$\mu^{(1)}$和$K^{(1)}=\lambda^{(1)}+\frac{2}{3}\mu^{(1)}$分别为弹簧(1)的剪切模量和体积模量，$\mu^{(2)}$和$K^{(2)}=\lambda^{(2)}+\frac{2}{3}\mu^{(2)}$分别为弹簧(2)的剪切模量和体积模量。由上式，可得

$$\begin{cases}\rho_0\overline{\eta}=-\rho_0\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}=\rho_0\eta_0+\rho_0C_E\ln\dfrac{\theta}{\theta_0}+3K^{(1)}\alpha^{(1)}\operatorname{tr}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi})\\\qquad\qquad+3K^{(2)}\alpha^{(2)}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\xi})\\\overline{\boldsymbol{T}}=\rho_0\dfrac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{E}}=2\mu^{(1)}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi})+\lambda^{(1)}\left[\operatorname{tr}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi})\right]\boldsymbol{I}-3K^{(1)}\alpha^{(1)}(\theta-\theta_0)\boldsymbol{I}\end{cases} \tag{38}$$

根据上式，即可计算式(21)中的各系数：

$$\bar{L}_0 = \frac{C_E}{\theta},\quad \bar{\boldsymbol{L}}_1 = 3K^{(1)}\alpha^{(1)}\boldsymbol{I},\quad \bar{\boldsymbol{L}} = 2\mu^{(1)}\overset{(1)}{\boldsymbol{I}} + \lambda^{(1)}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} \tag{39}$$

与内变量（即滑块应变）$\boldsymbol{\xi}$ 相共轭的广义力为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} = -\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\xi}} &= 2\mu^{(1)}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}) + \lambda^{(1)}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{I} - 3K^{(1)}\alpha^{(1)}(\theta-\theta_0)\boldsymbol{I}\\ &\quad - 2\mu^{(2)}\boldsymbol{\xi} - \lambda^{(2)}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{I} + 3K^{(2)}\alpha^{(2)}(\theta-\theta_0)\boldsymbol{I}\end{aligned} \tag{40}$$

它是滑块产生塑性变形的驱动力。如果假定 $\boldsymbol{\xi}$ 没有体积塑性变形，即 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\xi})=0$，则耗散率非负的条件为

$$\boldsymbol{A}:\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{A}':\dot{\boldsymbol{\xi}}' \geqslant 0 \tag{41}$$

其中

$$\boldsymbol{A}' = 2\mu^{(1)}\left(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{\xi}'\right) - 2\mu^{(2)}\boldsymbol{\xi}' \tag{42}$$

上标“'”表示相应张量的偏量。考虑到仅当 $A_{\mathrm{eff}} = \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{A}':\boldsymbol{A}'\right)^{1/2}$ 达到某临界值时，才可能产生滑块的塑性变形，故可假定屈服面具有如下的形式

$$\bar{g}(\theta,\boldsymbol{E},\boldsymbol{\xi}) = A_{\mathrm{eff}} - \left[1-\beta\left(\frac{\theta-\theta_0}{\theta_0}\right)\right]\varphi(\xi_{\mathrm{eff}}) = 0 \tag{43}$$

其中 $\xi_{\mathrm{eff}} = \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\xi}':\boldsymbol{\xi}'\right)^{1/2}$，$\varphi$ 是 ξ_{eff} 的函数，具有应力的量纲，用来刻划在参考温度 θ_0 下，屈服面的“大小”。它需要由实验来确定，$\beta(\beta\geqslant 0)$ 为材料参数，用来刻划屈服面对温度的依赖关系。

由式(43)，可得

$$\frac{\partial\bar{g}}{\partial\theta} = \frac{\beta}{\theta_0}\varphi(\xi_{\mathrm{eff}}),\quad \frac{\partial\bar{g}}{\partial\boldsymbol{E}} = \frac{4\mu^{(1)}}{3A_{\mathrm{eff}}}\boldsymbol{A}' \tag{44}$$

当应力-应变状态在屈服面上时，进一步的塑性变形要求塑性应变率 $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ 与 A' 的方向一致，因为只有这样才能使不等式(41)自动满足，因此可以设 $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\lambda}\boldsymbol{A}'(\dot{\lambda}\geqslant 0)$。

由式(44)，有 $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\boldsymbol{\lambda}}\left(\frac{3A_{\mathrm{eff}}}{4\mu^{(1)}}\right)\frac{\partial\bar{g}}{\partial\boldsymbol{E}}$，再由式(38)，得 $\frac{\partial\bar{\boldsymbol{T}}}{\partial\boldsymbol{\xi}} = -2\mu^{(1)}\overset{(1)}{\boldsymbol{I}} - \lambda^{(1)}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}$，注意到 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\xi})=0$，式(28)左端可写为

$$\frac{\partial\bar{\boldsymbol{T}}}{\partial\boldsymbol{\xi}}:\dot{\boldsymbol{\xi}} = -\dot{\boldsymbol{\lambda}}\left(\frac{3A_{\mathrm{eff}}}{2}\right)\frac{\partial\bar{g}}{\partial\boldsymbol{E}}$$

根据本文的理论，它与式(28)右端相等，于是有

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{2\nu^*}{3A_{\mathrm{eff}}}\left\langle\frac{\hat{\bar{g}}}{\chi_{(\mathrm{th})}}\right\rangle \tag{45}$$

可见耗散率为