高中数学补充教材

思路与方法

首都师范大学出版社

高中数学补充教材
思路与方法
北京教育科学研究院基础教育教学研究中心　编

责任编辑　刘晓峰
首都师范大学出版社出版发行
地　址　北京西三环北路105号
邮　编　100037
电　话　68418523(总编室)　68982468(发行部)
网　址　cnuph.com.cn
E-mail　master@cnuph.com.cn
北京嘉实印刷有限公司印刷
全国新华书店发行
版　次　2007年6月第1版
印　次　2007年6月第1次印刷
ISBN　978-7-81119-096-0
开　本　787mm×1092　1/16
印　张　15.75
字　数　168千
定　价　23.80元

MULU

目录

第一章 函数

高中数学中的函数问题，所涉及的知识点比较多，中学阶段分析、解决数学问题时所用到的重要的思想方法皆有所体现，因此，在学习中，应特别重视做好以下三点：

第一，准确、完整地理解函数中的数学概念，重视数学语言的规范表达.

第二，从问题出发，重视理解、把握解决问题的各种具体方法之间的联系与区别，随着学习过程的不断拓展、深入，不断将解决问题的不同方法梳理、整合成解决问题的方法体系.

第三，在解决问题的过程中，应特别注意提高应用各种数学思想方法的意识与能力，尤其是应用数形结合思想、方程思想、化归思想的意识与能力.

1.1　集合问题

在解决集合问题时，应特别重视完整、准确地理解集合的概念、集合的关系，集合运算等概念和表示方法，规范表达推理与运算过程.

例1　已知集合 $A=\{x \mid y=\sqrt{5-x}\}$，集合 $B=\{y \mid y=x^2-2,\ x\in \mathbf{R}\}$. 求：$A\cap B$.

分析　集合 A，B 中的元素都是实数，因此可先分别化简集合 A，B 所表示的实数集合，再求交集.

解　集合 A 表示函数 $y=\sqrt{5-x}$的定义域，即　$A=(-\infty,\ 5]$；

集合 B 表示函数 $y=x^2-2$ 的值域，

即　$B=[-2,\ +\infty)$；

所以　$A\cap B=[-2,\ 5]$.

例2　已知集合 $A=\{(x,\ y) \mid y=2x-2,\ x\in \mathbf{R}\}$，集合 $B=\{(x,\ y) \mid y=3x,\ x\in \mathbf{R}\}$. 求：$A\cap B$.

分析　集合 A，B 中的元素是有序二元数对，可以和直角坐标平面上的点的坐标建立对应关系，而 A，B 中的点分别在函数 $y=2x-2$ 和 $y=3x$ 的图象上，所以，可先求两个函数象的交点，再表示 $A\cap B$.

解　解方程

$$\begin{cases} y=2x-2, \\ y=3x, \end{cases} \text{得} \quad \begin{cases} x=-2, \\ y=-6. \end{cases}$$

所以　$A\cap B=\{(-2,\ -6)\}$.

由例1、例2可知，在判断元素和集合间关系、集合与集合间关系和进行集合运算时，应特别关注准确理解

集合中元素的类型（实数、点的坐标，等等），再根据集合中“描述法”对集合元素作出的具体限制，进行进一步的推理判断或计算，最后，应注意将集合间的求交、并、补运算的结果表示为集合的形式.（如例2的结果应表示为$\{(-2,-6)\}$，不可表示为$(-2,-6)$或$x=-2$，且$y=-6$，等等）.

例3 已知集合$A=\{x, x\in\mathbf{R} \mid x^2-3x+2=0\}$. 集合$B=\{x, x\in\mathbf{R} \mid x^2-(a+1)x+2a-1=0\}$，当$A\cap B=B$时，求实数$a$的取值范围.

分析 注意到集合$A=\{1,2\}$，所以，可以从集合A中的元素入手，也可以从集合B中的元素个数入手解决问题.

解法1 从集合A中的元素入手.

据已知，集合$A=\{1,2\}$. 集合B中关于x的方程

$$x^2-(a+1)x+2a-1=0 \qquad ①$$

的判别式：

$$\Delta=(a+1)^2-4(2a-1)=a^2-6a+5 \qquad ②$$

则可分四种情况求实数a.

(1)若$A\cap B=B=\varnothing$，则有

$$\Delta=a^2-6a+5<0,$$

即

$$1<a<5.$$

(2)若$A\cap B=B=\{1\}$，将$x=1$代入方程①，得

$$1-(a+1)\cdot 1+2a-1=0,$$

解得

$$a=1,$$

将$a=1$代入②验算可得$\Delta=0$，所以，$a=1$满足题目要求.

(3)若$A\cap B=B=\{2\}$，与(2)同理，可将$x=2$代入①，此时a无解.

(4)据(3)知$2\notin B$，所以，$A\cap B=B=A$一定不

HAN SHU

成立.

综上可知，实数 a 的取值范围是 $[1，5)$.

解法2　从集合 B 的元素个数入手解决问题.

(1) $B=\varnothing$；据前可得 $1<a<5$.

(2) $\operatorname{card}(B)=1$；令 $\Delta=a^2-6a+5=0$，得 $a=1$ 或 5.

将 $a=1$ 代入方程①，解得　$x_{1,2}=1\in A$；

将 $a=5$ 代入方程②，解得　$x_{1,2}=3\notin A$；

所以　$a=1$ 符合题目要求，$a=5$ 舍去.

(3)若 $\operatorname{card}(B)=2$，则据 $A\cap B=B$，应有：

$$\begin{cases}\Delta=a^2-6a+5>0,\\ x_1+x_2=1+2=3=a+1,\\ x_1x_2=1\cdot 2=2=2a-1.\end{cases}$$

上述联立式无解.

综上，满足题目条件的实数 $a\in[1，5)$.

例4　已知集合 $A=\{1，1+d，1+2d\}$，集合 $B=\{1，r，r^2\}$，且 $A=B$，求实数 d，r 的取值和集合 A.

解　据题意，可分两种情况求解 d，r.

(1)令 $\begin{cases}1+d=r,\\ 1+2d=r^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}d=0,\\ r=1,\end{cases}$ 但此时 $1=1+d=1+2d$，与集合元素互异的要求不符，故舍去.

(2)令 $\begin{cases}1+d=r^2,\\ 1+2d=r,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}d=-\dfrac{3}{4},\\ r=-\dfrac{1}{2},\end{cases}$

可得　$A=\left\{1，-\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{4}\right\}$.

例 5 已知集合 $A=\{x \mid x<2$ 且 $x\geqslant 5\}$，集合 $B=\{x \mid (x-a)(x-2a+3)<0\}$. 求：当 $A\cup B=A$ 时，实数 a 的取值范围.

解 分两种情况求实数 a 的取值范围.

(1)当 $B=\varnothing$ 时，即 $a=2a-3$ 时，$a=3$，此时 $B=\{x \mid (x-a)^2<0\}=\varnothing$，则必有 $A\cup B=A$.

(2)当 $B\neq\varnothing$ 时，

$$\begin{cases} a\neq 3, \\ a\leqslant 2, \\ 2a-3\leqslant 2, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a\neq 3, \\ a\geqslant 5, \\ 2a-3\geqslant 5. \end{cases}$$

解得 $a\leqslant 2$ 或 $a\geqslant 5$.

综上，满足条件的实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]\cup\{3\}\cup[5, +\infty)$.

说明 例 3、例 4、例 5 的解题方法体现了在解决有关方程、不等式问题与集合关系或运算问题时常见思路与应注意的问题：(1) 要善于利用互异性解决问题，也要注意利用互异性来检验解得结果的合理性. (2) 由于 $A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$\varnothing\subseteq A$ 等性质，在解决不等式、方程问题时，应特别注意关注、讨论给定集合为空集时的情况，以免漏解、错解.

例 6 定义集合 A，B 的一种运算：$A\cdot B=\{x \mid x=x_1+x_2$，其中 $x_1\in A$，$x_2\in B\}$，若 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 2\}$，求 $A\cdot B$ 的真子集的个数.

分析 可先求出 $A\cdot B$ 所有元素，再求子集个数.

解 据运算 $A\cdot B$ 的定义，集合 $A\cdot B$ 中可能含有的元素为

$1+1=2$，$1+2=3$，$2+1=3$，$2+2=4$，$3+1=4$，$3+2=5$；

HAN SHU

据集合中元素的互异性可知

$$A \cdot B=\{2, 3, 4, 5\}.$$

所以 $A \cdot B$ 真子集的个数为 $2^4-1=15$.

例 7 集合 $S=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，A 是 S 的一个子集，当 $x\in A$ 时，若有 $x-1\notin A$，且 $x+1\notin A$，则称 x 为 A 的一个"孤立元素"，试写出 S 中无"孤立元素"的所有四元子集.

分析 根据"孤立元素"的定义可知，若 $x\in S$ 不是孤立元素，则有 $x-1\in A$ 或 $x+1\in A$，所以，只需保证集合中每个元素都至少有一个"相邻"元素即可.

解 用穷举法写出 S 中无"孤立元素"的所有真子集：

$\{0, 1, 2, 3\}$，$\{0, 1, 3, 4\}$，$\{0, 1, 4, 5\}$，$\{1, 2, 3, 4\}$，$\{1, 2, 4, 5\}$，$\{2, 3, 4, 5\}$.

说明 例 6、例 7 都是基于集合的基本知识，给出了新的概念或运算. 解决这类问题，可以先将这些概念、运算具体运用到给定集合的元素上去，用列举法将满足条件的(某些)"新"元素或将运算结果表示出来，再寻找、确定解决问题的完备过程.

1.2 函数概念问题

在函数的定义域、对应法则、值域三要素中，定义域和对应法则是决定性的两个要素. 探索、选择解决函数概念问题的思路与方法时，要特别注意：结合定义域，准确理解函数解析式；根据已知条件，选择适当的方法确定函数解析式或求函数值.

例 1 已知 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$，则 $f(x)$ 的解析式可取为（　　）.

A. $\frac{x}{1+x^2}$　　B. $-\frac{2x}{1+x^2}$

C. $\frac{2x}{1+x^2}$　　D. $-\frac{x}{1+x^2}$

分析 可以用换元法求出 $f(x)$ 的解析式，也可以充分利用各选项提供的信息，用试数法与排除法结合选出正确结果.

解法1 利用换元法求 $f(x)$ 的解析式.

令 $t=\frac{1-x}{1+x}$，则 $x=\frac{1-t}{1+t}$，代入已知条件中有

$$f(t)=\frac{1-\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}=\frac{2t}{1+t^2},$$

即
$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2},$$

所以选 C.

解法2 在 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 中，令 $x=0$，得 $f(1)=1$，而 A，B，C，D 选择项中，$f(1)$ 的值分别为 $\frac{1}{2}$，-1，1，$-\frac{1}{2}$，故选 C.

例 2 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5，其导函数 $f'(x)$ 的图象经过点 $(1,0)$，$(2,0)$，如图 1-1 所示，求：

(1) x_0 的值；

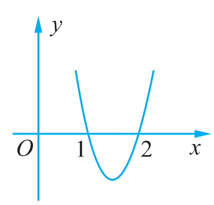

图 1-1

(2)a，b，c 的值.

分析　根据导函数的取值很容易求得 x_0，再利用极值、$f'(1)=f'(2)=0$ 布列三个关于 a，b，c 的方程，则第(2)问也可以顺利求出结果.

解法1　(1)由 $f'(x)$ 的图象可知，当 $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)<0$，因此 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单增，在区间 $(1,2)$ 上单减，因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，即 $x_0=1$.

(2)　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，则有

$$\begin{cases} f'(1)=3a+2b+c=0, \\ f'(2)=12a+4b+c=0, \\ f(1)=a+b+c=5, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a=2, \\ b=-9, \\ c=12. \end{cases}$$

解法2　(1)同解法 1.

(2)设 $f'(x)=m(x-1)(x-2)=mx^2-3mx+2m$.

又　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，

据对应项系数相等和 $f(1)=5$ 的条件有

$$\begin{cases} m=3a, \\ -3m=2b, \\ 2m=c, \\ f(1)=a+b+c=5, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a=2, \\ b=-9, \\ c=12. \end{cases}$$

说明　在求函数解析式问题中，换元法和待定系数法是两种最基本的方法. 换元法的一般步骤为：已知 $f(g(x))$ 的具体表达式，可令 $t=g(x)$，反解 $x=g^{-1}(t)$；再将 $x=g^{-1}(t)$ 代入 $f(t)$ 的具体表达式中，整理得 $f(t)$ 的表达式；将 $f(t)$ 表达式中的字母 t 皆代换为字母 x，即可求得 $f(x)$ 的解析表达式. 待定系数法的主要入手点为根据已知的数、形条件，布列方程组，注意，n 个未知数

应布列 n 个独立的方程，解之，即可得待求解析式.

例 3 设函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x} & (x\geqslant 4),\\ f(x+3) & (x<4).\end{cases}$

求：$f(\log_2 3)$的值.

解 $\because$ $1=\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4=2<4$,

$\therefore$ $f(\log_2 3)=f(\log_2 3+3)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 3+3}=\dfrac{3}{8}$.

例 4 已知函数 $f(x)$满足对任意 x，$y\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，$f(1)=3$.

求：$\dfrac{f^2(1)+f(2)}{f(1)}+\dfrac{f^2(2)+f(4)}{f(3)}+\dfrac{f^2(3)+f(6)}{f(5)}+\dfrac{f^2(4)+f(8)}{f(7)}$.

分析 注意到 $f^2(n)=f(n)\cdot f(n)=f(2n)$，$\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=\dfrac{f(n)\cdot f(1)}{f(n)}=f(1)$，所以，可以利用函数的已知性质，先化简求值式，再求具体数值.

解 原式$=\dfrac{f(2)+f(2)}{f(1)}+\dfrac{f(4)+f(4)}{f(3)}+\dfrac{f(6)+f(6)}{f(5)}+\dfrac{f(8)+f(8)}{f(7)}$

$=2\left(\dfrac{f(1+1)}{f(1)}+\dfrac{f(3+1)}{f(3)}+\dfrac{f(5+1)}{f(5)}+\dfrac{f(7+1)}{f(7)}\right)=24.$

说明 例 3、例 4 是“求函数值”问题中比较常见的两类问题：求分段函数的函数值和求比较复杂的函数值运算式的值. 解决这些问题的入手点都是：(1) 准确理解题目中抽象函数的条件(如例 3 中的 $f(x+3)$，例 4 中的 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$)；(2) 认真分析自变量和各自变量间的关系，再决定解决问题的具体方法.

例 5 已知函数 $y=\log_2(x^2-ax+3-a)$，求分别满足下列条件的实数 a 的取值范围：(1)函数的定义域为 R；(2)函数的值域为 R.

分析 注意到函数 $y=\log_2 x$ 是定义域为 $\mathbf{R}^+$、值域为 R 的单值对应函数（对任意值域内的一个象 y_0 有且只有定义域内的一个原象 x_0 与之对应），所以，欲使 $y=\log_2(x^2-ax+3-a)$ 的定义域为 R，则必须使 $g(x)=x^2-ax+3-a$ 的值域为 $\mathbf{R}^+$ 的子集；而欲使 $y=\log_2 g(x)$ 的值域为 R，则必须使 $\mathbf{R}^+$ 为 $g(x)$ 的值域的子集. 据此，可分别列出实数 a 应满足的条件.

解 设 $g(x)=x^2-ax+3-a$.

(1)欲使 $y=\log_2 g(x)$ 的定义域为 R，则可令

$$\Delta=(-a)^2-4(3-a)<0,$$

解得 $$a\in(-\infty,\ -6)\cup(2,\ +\infty).$$

(2)欲使 $y=\log_2 g(x)$ 的值域为 R，则可令

$$\Delta=a^2+4a-12\geqslant 0,$$

解得 $$a\in[-6,\ 2].$$

例 6 设函数 $f(x)=-\dfrac{x}{1+|x|}(x\in\mathbf{R})$，区间 $\mathbf{M}=[a,\ b]$，$a<b$，集合 $\mathbf{N}=\{y\mid y=f(x),\ x\in\mathbf{M}\}$，则使 $\mathbf{M}=\mathbf{N}$ 成立的实数对 $(a,\ b)$ 有（　　）.

A. 0 个　　　　B. 1 个

C. 2 个　　　　D. 无数多个

分析 欲使 M＝N，可先考虑 $y=f(x)$ 的单调性，利用 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上取到最值点的信息布列关于 a，b 的方程.

解 因为 $f(x)=-\dfrac{x}{1+|x|}$ 为奇函数，且 $x\geqslant 0$ 时，

$f(x)=-\dfrac{x}{1+|x|}=-\dfrac{x}{1+x}=-1+\dfrac{1}{1+x}$是单减函数．

所以 $f(x)$在定义域$[a,b]$上亦为单减函数.

于是有 $\mathbf{N}=[f(b),f(a)]=[a,b]=\mathbf{M}$，

即
$$\begin{cases} a=\dfrac{-b}{1+|b|}, & ① \\ b=\dfrac{-a}{1+|a|}. & ② \end{cases}$$

①×②得

$$ab=\frac{ab}{(1+|b|)(1+|a|)},$$

即
$$ab\left(1-\frac{1}{(1+|b|)(1+|a|)}\right)=0.$$

由于 $a<b$，所以$|a|$，$|b|$中至少有一个应大于 0，即必有 $1-\dfrac{1}{(1+|b|)(1+|a|)}\neq 0$，由此必有 $a=0$ 或 $b=0$，代入①，均有 $a=b=0$，又因 $a<b$，所以，这样的实数对(a,b)不存在，应选 A.

说明　在复合函数求定义域、值域的问题时，应认真考察每层函数的定义域、值域和性质，选择适当的方式布列方程(如例 6)或不等式(如例 5)解决问题，而“定义域”对“值域”的决定性作用，常常是解决问题的关键.

例 7　设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果对于任意的 $x_1\in D$，存在唯一的 $x_2(-1)$，使$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=C$ (C 为常数)成立，则称函数 $y=f(x)$在 D 上的均值为 C. 给出下列四个函数：

①$y=x^3$；②$y=4\sin x$；③$y=\lg x$；④$y=2^x$，则满足在其定义域上均值为 2 的函数是(　　).

A. ①②　　　　B. ③④

C. ①③④　　　　　　D. ①③

分析　设已经取值 $x_1\in D$，就可将条件变形为 $f(x_2)=2C-f(x_1)$，则原题目条件可理解为方程 $f(x)=4-C_0$（C_0 为 $f(x)$ 值域中某个值）有且仅有唯一的解．据此，可以一一判断题目所给的四个函数是否满足“均值为 2”的条件．

解　①方程 $y=f(x)=x^3=4-C_0$ 中，因为 $C_0\in\mathbf{R}$，所以 $C'=4-C_0\in\mathbf{R}$，而 $f(x)=x^3$ 是值域为 R 的单增函数，所以 $x^3=C'(C'\in\mathbf{R})$ 有且仅有一个解，函数①符合“均值为 2”的条件．

②方程 $y=f(x)=4\sin x=4-C_0(C_0\in[-4,4])$ 中 $C'=4-C_0\in[0,8]$，且 $f(x)=4\sin x$ 是周期函数，所以，当 $C_0=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-4$ 时，$4\sin x=8$ 无解；当 $C_0=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$ 时，$4\sin x=0$ 有无数解．由此可知 $y=f(x)=4\sin x$ 不合定义．

③ 同①，$y=\lg x$ 亦为值域为 R 的单增函数，所以，方程 $f(x)=\lg x=4-C_0$ $(4-C_0\in\mathbf{R})$必有且只有一个解．

④ 方程 $y=f(x)=2^x=4-C_0(C_0\in\mathbf{R}^+)$中 $C'=4-C_0\in(-\infty,4)$，显然 $2^x=C'$不一定有解，如：令 $x_1=3$，则方程 $2^x=4-2^3=-4$，无解．所以，④亦不符合定义．

综上，应选 D.

说明　在遇到新概念时，应仔细分析新概念中已知量、可以事先赋值的量（如题中的 x_1，$f(x_1)$）、待求量，可以通过将“可事先赋值量”具体化$\Big($如令 $x_1=1$，$\frac{\pi}{2}$，3 等具体的值$\Big)$，来理解“待求量”所对应的数学问题（如本

题中将确定待求量 x_2 的问题转化为"方程 $f(x)=C'$ 有且只有一个解"的问题).

1.3 函数性质问题

探索、选择解决函数性质问题的思路与方法时，应特别关注：准确理解、严谨表述单调性、奇偶性、周期性及反函数的概念；注意从多种角度理解、分析已知条件和待解决的问题；注意根据已知条件，选择最适于解决该具体问题的方法来解决问题.

1. 单调性、奇偶性、周期性、反函数

在理解和选择解决单调性、奇偶性、周期性和反函数问题的思路与方法时，应注意观察与识别这些常见性质的等价表达形式，关注具有这些性质的函数的图象特点，梳理、整合解决具体问题的方法体系.

例 1 已知 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a-1 & (x<1),\\ \log_a x & (x\geqslant 1),\end{cases}$ 是 R 上的减函数，那么实数 a 的取值范围是( ).

A. $(0,1)$　　B. $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$

C. $\left[\dfrac{2}{7},\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $\left[\dfrac{2}{7},1\right)$

分析 分段函数在 R 上为减函数，需要两个条件：(1)在每一"段"上皆为减函数；(2)分界点"两边"的函数值应保证"左"大"右"小，可据此列出关于参数 a 应满足的条件. 另外，注意到本题为选择题，也可以用排除法来解决问题.

HAN SHU