



Mathematical
culture

》》》



数学文化

罗长青 李仁杰/编著 》》》



重庆大学出版社

<http://www.cqup.com.cn>

数学文化

罗长青 李仁杰 编著

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书由“什么是数学文化”引出,作者融趣味性 with 知识性于一体,向读者介绍了数学与文学、哲学、经济学的关系,数学中的美学,数学问题、数学猜想与数学证明,数学学派,数学的思想、精神与方法,以及数学文化发展的源流。

通过本书可以让大中专学生、中学生了解隐藏在数学教材背后的知识发展的真实脉络和大量鲜为人知的故事,从中受到数学文化的熏陶,让他们不仅学到数学的一些演算规则和变换技巧,还能学到使之终身受益的数学精神、思想和方法。

本书对于大中专学生、中学生都是一部素质训练的适宜教材,也可以供大学、中学数学教师以及广大数学爱好者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学文化/罗长青,李仁杰编著. —重庆:重庆
大学出版社,2010.6
ISBN 978-7-5624-5374-1

I. ①数… II. ①罗…②李… III. ①数学—文化—
高等学校—教材 IV. ①01-05

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 067945 号

数 学 文 化

罗长青 李仁杰 编著

责任编辑:刘茂林 版式设计:黄俊棚
责任校对:任卓惠 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A区)内

邮编:400030

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:<http://www.cqup.com.cn>

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:15.5 字数:208 千

2010 年 6 月第 1 版 2010 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5624-5374-1 定价:28.00 元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有,请勿擅自翻印和用本书

制作各类出版物及配套用书,违者必究



从人类早期文明开始,数学作为文化的重要组成部分,一直随社会整体文化的发展而发展。但进入 20 世纪以后,情况出现了令人不安的变化。由于数学发展过分形式化和愈来愈专业化,数学家一味埋头进行数学研究,使数学渐渐与大众人群和其他文化领域隔离,出现脱离一般社会文化的孤立主义倾向。根据【美】M·克莱因在他《数学:确定性的丧失》一书中所说,它“几乎成了一个自我封闭的体系。它根据自己评判现实意义的标准和完美性的标准来决定自己的前进方向,它甚至满足于自己与外界的问题、动力、灵感相隔绝的状况。”这使人误认为数学只是少数天才脑子里的“自由造物”,其真理性无须实践检验,它的发展和进步也无须社会的推动和人类文化的哺育。因此,在全社会对数学依赖与需求日益增大的现象背后隐藏着一个可怕的事实:99%的数学掌握在远不到 1% 的精英手中,越来越多的人被拒之于数学殿堂大门之外,绝大部分人对数学与一般人类文化的关系一无所知。正像美国著名数学家柯朗尖锐指出的那样:

“在我们这个教育普及的时代,数学已不再被人们认为是文化的一个必要的组成部分了。科学家们与世隔绝的研究,教师们少得可怜的热情,大量枯燥乏味、商业气十足的教科书,以及缺乏智力训练的教学风气,已经在教育界掀起了一股反数学的浪潮。最令人沮丧的是,人们对数学的兴趣几乎荡然无存。”

针对这些情况,从 20 世纪四五十年代开始,西方学术界的有识之士便率先提出加强数学与人类文化发展关系研究的主张。在希尔



伯特、罗素、冯·诺依曼等大师的带动和影响下,国际数学界开始从文化视角关注数学。20世纪六七十年代在西方教育界开展的“新数运动”就是由此带来的直接结果。

稍后,怀特的《数学文化论》和M·克莱因的《古今数学思想》等著作问世,说明学者们已经开始将数学回归到文化层面,注意营造数学的人文氛围。随着研究的深入,人们愈来愈深刻地感受到“数学向我们展示的不仅是一门知识体系、一种科学语言和一种技术工具,而且是一种思想方法,一种理性化的思维范式和认识模式,一种具有新的美学维度的精神空间,一种充满人类创造力和想象力的文化境界。其中有一个共同的东西可以让每一个人都能够终身受益,那就是数学的文化内涵。”(M·克莱因)

罗素1920年来中国讲学,他的《算理哲学》一书在1922年由商务印书馆翻译出版,由此引起我国数学界对数学哲学问题的关注,并拓展了他们看问题的视野。我国最早关注并研究数学文化的便是后来北大数学系和哲学系从事数学哲学研究的一些学者。他们从1976年初着手翻译并在1979年出版了M·克莱因的《古今数学思想》,1988年孙小礼出版了她的《数学·科学·哲学》一书,1990年5月又由邓东皋、孙小礼和张祖贵共同出版了《数学与文化》。从1989年至21世纪初相继还有齐民友的《数学与文化》、方延民的《数学文化导论》、黄秦安的《数学哲学与数学文化》、张楚廷的《数学文化》、张顺燕的《数学的源与流》、郑毓信的《数学文化学》、游安军的《数学发展的文化视角》等出版物问世。在《数学教育学报》等高层次核心期刊上也有不少相关的文章刊载。我国从20世纪80年代以来开展的中小学数学课程改革实验对数学文化的需求成为有力推动,使该项研究得以深入持久地开展下去。

时至今日,“数学文化”已成为数学界和教育界学术交流中出现频率很高的术语。一个全新的、充满生机与活力的研究领域展现在我们面前,她那光艳照人的魅力常常在人们心灵深处引起强烈震撼。特别是当今的大学生,学了十多年数学,一直把她看作是难以掌握的一种“算法”或“工具”,觉得她不过是“冷冰冰的逻辑”和“烦琐的符

号游戏”，但当他们系统了解了数学文化之后，有人竟深有感触地说：“从来没有想到，在教科书里或课堂上见到的数学，原来只是一个充满生命活力的‘数学美女’在一张 X 光照片上留下的令人望而生畏的骨架。”

这位数学美女当然不只是“数学共同体”成员欣赏和品说的对象，她还能以妩媚动人的身姿和绚丽的光彩去征服所有学习数学、关心数学及运用数学的人。

不过，数学、尤其是纯数学，活像一位紧裹面纱的伊斯兰少女，人们很难看清她的真正面目。特别是在学校教育中，教材经过知识浓缩和逻辑加工之后，以“数学专著加习题”的方式板着脸孔呈现在学生面前。他们很难从中发现数学真实的历史面貌和发展轨迹，也看不出它丰富的人文精神、文化内涵和它与其他文化间的联系与整合。这不仅妨碍学生对数学的理解，也有损于他们学习数学的兴趣。

如果把数学回归到文化层面，它就会从关注自己文化属性和人文经历的过程中使自己变得鲜活起来。学生数学活动中所需的灵感、直觉和想象力，也会从文学、艺术、人文科学和自然科学乃至周围环境中得到启示和借鉴。学生在这样的学习过程中不仅可以学到知识，而且还会得到关于数学美的体验和感受，领会数学的精神，逐步获得学习数学的趣味与快乐。可见，只有将数学教育由知识层面提升到文化层面，才能使学生通过学习有效地获得数学能力与素养。

齐民友教授说：“数学是现代文化的核心和基石，始终处于中心的位置，而且影响到人类知识的一切部门。”* 通过对数学文化的深入研究，它在改进学生对数学学科的学习，深化人们对数学的认识，提高全民的文化品位，推进全社会快步走向数学化等方面的重要作用已愈来愈清楚地显现出来。毫无疑问，数学作为一种重要的文化形态，其独特功能是其他学科或用其他方式所无法取代的。

目前中小学正深入进行课程改革，并已经初见成效，数学文化已作为重要内容纳入其中。

* 齐民友. 数学与文化[M]. 长沙:湖南教育出版社,1989.



全面提高大学生的综合素质特别是文化素质,是当前形势和社会发展向我国高等教育提出的一项重要而紧迫的任务,是大学教育改革和实现教育现代化必须落实的重要目标。但现行大学数学教材仍然只重视数学知识讲授及应用,对数学文化的相关内容涉及甚少。在文科数学教学中,更是普遍采用“重知识、轻思想,重结论、轻过程,重科学、忽视文化和教育”的教材呈现方式和讲授方式,使学生难于看清数学的精神、思想和理解它的人文价值,因此,缺乏数学的悟性和自觉、灵活地运用数学的意识。结果虽通过学习强记了一些概念、公式和法则,却丢弃了可以让他们终生受益的数学的精髓。数学教学改革已势在必行。

我们认为,数学教育应当有利于帮助学生在社会文化大背景中去审视和分析数学。从数学曲折发展的历程中去领会数学的精神,感悟数学的本质,提高学习数学的主动性和自觉性,增强学习中克服困难的信心和勇气。让大家通过反复强化的情感体验去认识数学、品味数学、热爱数学,并在轻松愉快的学习情景中感受学习数学的乐趣,以期培养的学生能在全社会的信息化、数字化进程中自觉成为学习和运用数学工具、方法与技术的排头兵。

该书的雏形是在五年前为本科生开设《数学文化》选修课时形成的。后经修改编成讲义,为的是让学生听课时有所遵循。

“选修”和“文化”的特点决定了我们在该书的取材和行文中,倾向于让它具有知识性、趣味性和科普性,希望能深入浅出,使读者在愉悦轻松的氛围中受到启迪和熏陶。

由于对数学文化的研究在国内起步较晚,大家认可的理论框架或许尚未形成,这里尝试做出的构架是否可行,有待于时间的检验。

该书出版前曾在大学生和中学教师中通过座谈会等形式征求意见,并进行过修改,但因专业水平受限,缺点和错误必定仍然较多。真诚希望各位专家、学者和广大读者不吝赐教,提出宝贵的意见、建议和批评。

因最初只是讲稿,故未能对书中取材一一准确地标明出处,现在改已较难,借此机会对我们在写作该书时,拜读并从中受益的所有文

献资料的原作者致以诚挚的谢意。是你们和你们的著作鼓舞和帮助我们克服困难,并最终完成该书的编写。

感谢各位同事、朋友在该书成稿和出版过程中为我们所做的一切。感谢重庆大学出版社刘茂林副社长出任责任编辑,由于他的辛勤工作使该书增色不少。

建议各位数学爱好者、文化人,特别是战斗在教学第一线的老师们和在校的大学生们能读读这本书,了解一些隐藏在数学教科书背后的故事。也许它会因此改变你对数学的看法,并让你在今后的工作、生活和学习中得到益处。

编著者

2010年2月



第 1 章 什么是数学文化 / 1

- 1.1 何谓数学 / 1
- 1.2 数学的特点及应用 / 6
- 1.3 何谓数学文化 / 14
- 1.4 数学的文化价值 / 17
- 1.5 研究和学习数学文化的意义 / 23

第 2 章 数学发展的源流 / 26

- 2.1 古希腊时期的数学 / 27
- 2.2 中国古代数学 / 35
- 2.3 文艺复兴时期的欧洲数学 / 48
- 2.4 17 世纪至 19 世纪的西方数学 / 51
- 2.5 数学的现代发展 / 57

第 3 章 数学文化面面观 / 60

- 3.1 数海拾趣 / 60
- 3.2 数学与哲学 / 72
- 3.3 数学与文学 / 76
- 3.4 数学与经济 / 86



第4章 数学语言与数学美 / 95

- 4.1 数学语言与数学思维 / 95
- 4.2 数学的塑造性 / 103
- 4.3 数学美 / 105
- 4.4 数学中的美学方法 / 114

第5章 数学家的数学发现与创造 / 118

- 5.1 知名数学家简介 / 118
- 5.2 数学典故与数学家轶事 / 131
- 5.3 数学家其人 / 141
- 5.4 数学家的数学活动 / 147
- 5.5 历史上一些重要的数学发现 / 157

第6章 数学问题、数学证明与数学危机 / 169

- 6.1 数学问题 / 169
- 6.2 数学猜想 / 173
- 6.3 数学证明 / 179
- 6.4 数学悖论 / 188
- 6.5 数学危机 / 193
- 6.6 潜无限与实无限 / 198

第7章 数学中有代表性的主义与流派 / 203

- 7.1 逻辑主义学派 / 203
- 7.2 直觉主义学派 / 205
- 7.3 形式主义学派 / 207
- 7.4 集合论公理化学派 / 210
- 7.5 哥德尔不完备性定理 / 214

第 8 章 数学的精神、思想和方法 / 220

- 8.1 数学精神 / 220
- 8.2 数学思想 / 225
- 8.3 数学方法 / 227
- 8.4 计算机给数学带来的革命 / 230

主要参考书目 / 236

我没有什么特别的才能,不过是喜欢寻根刨底地追究问题罢了。

——爱因斯坦

第 1 章 什么是数学文化

1.1 何谓数学

一位美国数学家曾作过一个不完全的统计:自古以来关于数学有 200 多种不同的定义。

也许是因为数学的发展永远不满足人们事先给它设定的框架,所以“何谓数学?”是一个至今还无法做出定论的问题。

1.1.1 从研究对象看

毕达哥拉斯认为数学是对“数”的研究;亚里士多德认为数学是对“量”的研究;笛卡儿认为数学是研究顺序和度量的科学……恩格斯在《反杜林论》中指出:“纯数学是以现实世界的空间形式和数量关系为对象的。”这一提法曾被数学界和哲学界的同仁们广为接受,它在很长的时间里成为人们对“什么是数学?”的最为精辟和权威的回答。因为空间形式可以看作一种特殊的量,而量又离不开数,并能将其转化为数量关系。所以我国数学家关肇直曾在 1957 年建议把数学定义为“研究现实世界中量的关系的科学。”但数学研究的量不一定是现实的量,所以有人又建议在“量”字前面冠以“一切可能的”几个字。不过,数学不是研究直接的、可见的量,而是研究抽象的量的种种模式。所以,人们从数学哲学的角度愈来愈倾向于把数学看作是关于量化模式的科学,认为数学是对客观世界的量化模式的建构





与研究(【英】怀特海)。如果把存在某些数学关系的对象的集合称为关系结构,那么还可把数学说成是研究关系结构模式的科学。

布尔代数的出现,表明可以把代数规律扩展到逻辑学的领域中去,预示数学对象已不仅限于数量关系与空间形式。近二三十年来,随着科学技术、尤其是信息技术的迅猛发展,促使模糊数学、混沌、分形几何、小波变换等全新数学分支的产生,这也表明数学研究的对象已经超出一般意义下的量的范畴。“既非数亦非量的,或较数与量有着更广泛意义的内容已经进入了数学领域。”(【日】米山国藏)

1.1.2 从研究内容看

数学科学就其内容可分为基础数学、应用数学、计算数学、运筹与控制 and 概率论与数理统计五大学科。如果把它比作一棵大树,这五大学科便是它的五大主支,从这些主支延伸出去,还有大大小小一百多个分支。它真可谓是一棵根深叶茂、枝多花繁的参天大树。

需要强调的是,数学虽然分支众多,但它又有着高度的统一性。正如希尔伯特指出的那样:“数学科学是一个不可分割的有机体,它的生命力正是在于各个部分之间的联系。数学理论越是向前发展,它的结构就会变得越加协调一致,并且这门科学一向相互隔绝的分支之间也会显露出原先意想不到的关系。”

1.1.3 从研究方法看

我国现代数学哲学家郑毓信先生从文化观念的角度提出不能把数学只看成是一种静止的对象,而应看作是一种活动过程。他说:“数学不应被等同于知识的简单汇集,而应主要地被看成人的一种活动,一种以‘数学共同体’为主体、并在一定文化环境中所从事的创造性活动。”

既是一种活动,那么以什么方法、按照什么规则、为着什么目的进行这一活动就显得格外重要。数学追求的是一种理性精神,用的是逻辑手段,并脱离具体对象,展开纯形式的研究,致力于构建数学模型并最终建立公理化的知识体系。所以,它向我们展示的不仅是

作为这一活动结果的知识,更是这一活动过程本身。从这个意义上讲,它是一种思想方法,一种理性化的思维范式。

说数学是人的“自由想象的产物”,是人的“心灵的最为独特的创造”,不是没有根据的。数学也许是最能发挥一个人聪明才智和创造才能的学科。这与它的独特思维方法和高超思维技巧有关。如果我们从古到今在全世界挑选 30 位最负盛名的数学家,他们所做出的数学成果,保守一点估计,也要占迄今为止世界上全部重要数学成果的一半以上(当然,他们的成果是在前人已有成就基础上做出的),这一点值得我们深思。

1.1.4 从在科学中的地位看

在近代,数学跻身于自然科学,并列于“数、理、化、天、地、生”这六大基础学科之首。但随着它的深入发展,它逐渐显露出不同于其他自然科学的重要特点和性质,并成为它们不可缺少的共同工具。从 20 世纪中期开始,人们愈来愈觉得应该把它放在社会科学与自然科学之间的位置上,并称它为“数学科学”。持这种观点的人的理由是,数学是各种科学的共同语言,作为语言的数学是不能分属自然科学中某一类的。当然不仅是因为这一原因,1978 年秋,著名科学家钱学森在中国数学会召开的一次会议上明确提出:“数学科学是与自然科学、社会科学并列的现代科学技术体系中一大部门。”按照目前数学发展的趋势,我们有理由相信,在不久的将来,它也许会成为与哲学和科学并列的现代文明的三大支柱之一。

1.1.5 从所发挥的作用看

数学不仅是一门知识体系,还是一种语言、技术、工具和方法。被誉为“数学王子”的德国数学家高斯说:“数学是科学之王”,我国数学家华罗庚说:“数学是科学中的皇后和仆人。”17 世纪英国大哲学家培根也曾说:“数学是打开科学大门的钥匙。如果我们忽视数学必将伤害所有的知识,因为忽视数学的人是无法了解任何其他科学乃至世界上任何其他事物的。”为了印证上述说法,请看下面两个



例子：

20 世纪上半叶，在自然科学中领衔的物理学发展至一个关键时刻，物理学家们希望把能量守恒定律、动量守恒定律、自旋守恒定律和电荷守恒定律都通通统一起来，但一直苦于找不到合适的工具。正当他们一筹莫展时，意外地发现了法国数学家伽罗瓦一百多年前发明的群论。事实证明它正是他们梦寐以求的“最为合适”的工具。

据说，爱因斯坦曾花了数年时间想弄清引力与空间曲率之间的关系，当他把牛顿的引力理论看作曲率很小很小的时空的极限情形时，最终发现了这一关系。但他不能用数学方法将它们精确地描述出来，最后不得不求助于搞数学研究的一位朋友格洛斯曼。他还不无感慨地说：“格洛斯曼，您必须帮助我，否则我会发疯的”。格洛斯曼把黎曼早在 60 多年前的研究成果——黎曼几何介绍给他。他利用这一成果，成功地发明了“广义相对论”。

哲学家康德曾说过：“任何一门自然科学，只有当它能应用数学工具进行研究时，才能算是一门发展渐趋完美的真实科学。”后来马克思把它由“自然科学”扩展到“任何一门科学”，并作出更为有力的预见和肯定。

美国学者道恩斯在全世界浩如烟海的书籍中精选出从意大利文艺复兴时期到 20 世纪中叶出版的 16 本自然科学和社会科学名著，称它们是“改变世界的书”。因为这 16 本书作无一不是在相关领域中做出了开创性、奠基性的工作。在 16 本书中直接用上数学的有 10 本，它们是哥白尼的《天体运行》、哈维的《血液循环》、牛顿的《自然哲学》、达尔文的《物种起源》、爱因斯坦的《相对论原理》、潘恩的《常识》、亚当·斯密的《国富论》、马尔萨斯的《人口论》、马克思的《资本论》和马汉的《论制海权》。如果把间接用上数学的书也包括在内，那么这 16 本书将无一例外。

德国大数学家克莱因是这样赞美数学的：“数学是人类最高超的智力成就，也是人类心灵最独特的创造。音乐能激发或抚慰情怀，绘画能使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学使人获得智慧，科技可改善物质生活，而数学却能提供以上的一切。”

如果说克莱因还有点偏重于从数学的应用性方面谈论数学的伟大和迷人之处,那么米山国藏则完全是以欣赏的眼光用下面一段文字把我们带进了数学宫殿的大门,并道出现代数学发展的壮阔景象:

“在迄今建立起来的思维宫殿中,公理数学犹如一座极其严正抽象的水晶宫,基础牢固且富有普遍性和包含性;深奥的高等数学,则好比一座堂皇富丽的大宫殿。当你步入那些宫殿的内部,就会看到令人眼花缭乱的新思想,我们无法想象的新方案层出不穷,美不胜收,足以使观者心旷神怡,沉浸在真和美的享受之中而忘记自身所在。”

1992年联合国教科文组织发表了著名的里约热内卢宣言。宣言中指出:“纯数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙。”美国国家研究委员会在其相关报告中更明确提出:“今天的世界比昨天的世界需要更多的数学,明天的世界将比今天的世界又需要更多的数学。”

现代社会是经济社会,经济发展被放在社会发展的首要位置。但经济的发展必须依靠科学技术,科学技术的基础是应用科学,应用科学的基础又是数学。一个十分明显的事实是,现代科学技术的形成和发展无一不用上计算机。计算机的工作依靠计算机软件,“从本质上看,任何计算机软件都是某种数学方法的具体应用,数学方法的水平有多高,软件的水平就有多高。”

无疑,随着计算机科学的快速发展,数学已成为当今进行社会交流和信息贮存的重要手段,它几乎无所不在,无所不为。从某种意义上讲,信息化就是数学化,并且整个社会包括老百姓的日常生活在内,都越来越数学化。数学的未来发展在一定程度上决定了人类社会发展的前景和命运。



1.2 数学的特点及应用

1.2.1 数学的四大特点

(1) 内容的抽象性:“内容抽象”是一切学数学的人都可以感受到的数学的第一个特点。这一特点从数和形的最简单的概念中就能体现出来。“1”是什么？一个苹果？一头牛？一条河？还是一座城市？都不是。它只是思维中一个抽象的符号，1 就是 1。正因为它什么都不是，所以在需要的时候“什么都可能是”。直线是什么？是方桌的边缘线、拉紧的绳子、还是一束很细很细的光线？都不是。它没有宽窄，没有厚薄，也没有确定的长度，只代表在某一特定位置和方向上的无限延伸，所以既“看不见”，也“摸不着”，因为什么有形的东西它都没有。

数学研究的所有对象在现实世界中都无法直接找到。因为它已经舍弃了事物所有特性，仅仅保留下量的关系，并以一种“纯粹形式”存在于我们思维之中。换言之，它把形式和内容分离开来，仅以概念定义的方式去构造相应的量化模式，并以此为对象开展纯形式的研究。

“数学并没有垄断抽象”（数学家柯朗语），但数学的抽象不同于其他任何学科的抽象。这不仅因为它保留下来的只是物质世界的“空间形式和数量关系”，抛弃了其他一切，还因为它的抽象有与众不同的特点和性质：

首先，数学的抽象性表现为高度的概括性（弱抽象）或限制性（强抽象），即在思维中，把从部分对象抽取出来的属性扩展到同类对象中去，或者反过来，把从同类对象中抽取出来的属性用到个别对象上去。例如，三角形的概念一经确定，便可将它用到一切具有同样形状的图形上去，从中推导的性质，也可用到一切具有同样形状的物体上去；从一个抽象三角形中用逻辑方法得到的内角和性质可用到一切不同形状、大小和材质的三角形物体上去。相反，一般三角形具有的