

第 4 辑

SHUXUE SIXIANG GAILUN
SHUXUE ZHONG DE GUINA TUILI

数学思想概论

数学中的归纳推理

《史宁中/著》



NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
WWW.NNUP.COM

东北师范大学出版社

数学思想概论

(第四辑)

数学中的归纳推理

史宁中 著

东北师范大学出版社

长 春

图书在版编目 (CIP) 数据

数学思想概论 (第4辑) —— 数学中的归纳推理/史宁中著. — 长春: 东北师范大学出版社, 2010. 10
ISBN 978 - 7 - 5602 - 6581 - 0

I. ①数… II. ①史… III. ①数学—思想方法—高等学校
教学参考资料 ②数学—归纳推理—高等学校—教学参
考资料 IV. 01 - 0.

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 208286 号

责任编辑: 杨述春 刘晓军 封面设计: 宋 超

责任校对: 余 天 责任印制: 张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市净月经济开发区金宝街 118 号 (邮政编码: 130117)

电话: 0431—85687213

传真: 0431—85691969

网址: <http://www.nenup.com>

电子函件: sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

农安县金鼎印刷有限公司印装

农安县农安镇古城街 131 号 (130200)

2010 年 10 月第 1 版 2010 年 10 月第 1 次印刷

幅面尺寸: 170 mm×227 mm 印张: 17.25 字数: 198 千

定价: 34.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 可直接与承印厂联系调换

目录

CONTENTS

绪论 为了推断的推理 /1

第一讲 原始推理的基础:想象和抽象 /12

§ 1.1 人与动物的区别 /14

是劳动吗? 是思维吗? 是直立行走吗? 容量扩充了的大脑, 特殊的发音器官, 想象能力, 抽象能力.

§ 1.2 智力如何形成 /25

脑的构造, 大脑皮层的区域功能, 计算机的启发, 早期教育, 智力开发.

§ 1.3 基本思维能力 /33

智商不是思维的基础, 思维是由想象和抽象派生的, 爱因斯坦的思考, 范仲淹的想象.

§ 1.4 直觉有时是不可靠的 /40

直观不是直觉, 直观需要逻辑判断, 眼见为实吗? 一些几何学的例子.

第二讲 基础思维的对象:类 /47

§ 2.1 基于联想的思维 /50

认识是从观察开始的, 想象是从联想开始的, 联想的三个定律, 联想的结果是类.

§ 2.2 通过共相得到类 /58

数学思想概论

如何得到类,形式分类,实质分类,自然数的类,方程解的类.

§ 2.3 通过异相划分类 /70

如何区分类,区分牛和马,有限单群分类,有理数的认识,三角形的认识.

第三讲 知识形成与归纳推理 /85

§ 3.1 定义与类的关系 /87

类是定义的基础,函数定义的形成过程,点线面定义的形成过程.

§ 3.2 知识形成过程中的归纳推理 /97

知识与定义的关系,通过“风险”的认知过程理解归纳推理的效能.

§ 3.3 归纳推理与类的关系 /109

归纳推理与抽象,归纳推理是基于类的推理,归纳推理也作用于类的形成过程.

第四讲 基于一个类的归纳推理 /116

§ 4.1 结果可能是必然的归纳推理 /119

推理模式,哥德巴赫猜想,费马大定理.

§ 4.2 如何让学生感悟归纳推理的过程 /131

积累思维的经验,分数的除法,参数方程,计算公式的形成.

§ 4.3 结果已知是或然的归纳推理 /146

推理模式,废品率的推断,动物数量的推断,社会问题的推断.

第五讲 归纳推理的合理性 /154

§ 5.1 最大可能性原则 /156

基于概率的思维解释,数学定义的概率,模型中的概率,频率,最

	大可能性估计.
§ 5.2	归纳推理的原理 /167 归纳推理的出发点, 自然齐一性原理. 概率是事物的属性, 平均相等标准, 极限相等标准.
§ 5.3	偶然与必然: 一个遗传学的启示 /179 事物的发生形态, 必然不可知, 孟德尔的思维过程, 构建必然的假说, 通过偶然验证假说, 一个统计学的工具, 判断真理的原则.
§ 5.4	原因与结果: 休谟问题 /198 原因是结果的必要条件, 原因的层次, 原因的界定, 联系恒定性原理, 因果模型, 药物的有效性, 经济增长原因, 休谟问题的回答.
§ 5.5	归纳推理的有限性 /224 存在确切观察的不可能的情况, 测不准原理, 历史的不可重复性, 序列延续, 混沌, 周期, 随机游走.
第六讲	基于两个类的归纳推理 /238
§ 6.1	结论可能是必然的类比 /240 参照另一个类已知结论的推理, 类比的推理模式, 点的表示与两点间距离, 角的大小与向量的内积, 球与球的表面.
§ 6.2	结论已知是或然的类比 /252 参照另一个类可能结果的推理模式, 股票价格推断, 彩票中奖推断.
§ 6.3	基于两个类推理的可能性 /259 类比方法与归纳方法的区别, 类比方法与归纳方法本质的一致性, 《墨经》的启发, 如何进行类比方法的教学.
人名索引	/265

绪论 为了推断的推理

阅读提示

人类原发性创造文字的最古老的两河流域文明、尼罗河文明和黄河文明,均没有在他们的思维过程中表现出演绎推理.

归纳推理是按照某些法则进行的前提与结论之间有或然联系的推理.这种推理具有特殊的灵活性,正因如此,归纳推理才可能从事物(事情和实物)的现实出发,对事物的过去或者未来进行推断.而推断是人们得以创造的根本思维方式.

演绎推理是基于“理念”的推理,而归纳推理是基于“事实”的推理;演绎推理是追求“形式”的推理,而归纳推理是追求“实用”的推理;演绎推理是命题所涉及的范围由大到小的推理,而归纳推理是命题所涉及的范围由小到大的推理.对于数学而言,如果说演绎推理是为了证明的推理,那么归纳推理就是为了推断的推理,把这两种推理模式结合起来,就得到了数学推理的全部过程.

归纳推理的本质是,从经验过的东西推断未曾经验过的东西,从事物的过去和现在推断事物的未来.

在数学教育中,无论从时间上还是从内容上都应当对归纳推理给予足够的重视,应当让学生在学习过程中,逐渐感悟出这种推理模式的“自然”属性.

在第三辑,我们讨论了数学证明过程中的推理,即演绎推理.回忆第三辑绪论中关于**演绎推理**的定义:从假设和定义出发,按照某些规定的法则所进行的、前提与结论之间有必然联系的推理.正因为演绎推理是一种结果必然的推理,因此所有严格的数学证明采用的都是这种推理模式.其中,“按照某些规定的法则”所进行的推理,意味着演绎推理是由一般到特殊的推理;“前提与结论之间有必然联系”的推理,意味着演绎推理要求前提和结论必须是事先知道的.可是,在我们的日常生活和生产实践中,人们常常关心的是:如何从前提出发预测可能得到的结果,或者,如何从已经得到的结果出发探究结果形成的原因.显然,希望“预测”或者“探究”的那些东西并不是事先确切知道的,因此,在“预测”或者“探究”的过程中是无法借助演绎推理的.为了研究问题的方便,我们统称预测和探究为**推断**.不言而喻,人们是通过推断得到新知识的,也是通过推断得到新理论的,因此,推断是人们认识自然的根本思维方式,或者说,推断是人们得以创造的根本思维方式.

正因如此,如果▶
将培养目标仅仅
定位于培养演绎
推理的教育,是
无法培养创新人
才的.

在这一辑,我们将从数学的角度讨论推断所依赖的推理模式.虽然这种推理不能成为严格的数学证

明,但这种推理依然是具有逻辑性的^①,我们称这种推理模式为归纳推理.可以这样描述归纳推理的定义:从经验和概念出发,按照某些法则所进行的、前提与结论之间有或然联系的推理.比较演绎推理的定义可以看到,归纳推理与演绎推理的出发点是根本不同的.特别是,归纳推理比演绎推理要灵活得多,这是因为:在推理过程中,“概念”是必要的,但不需要抽象为严格的定义;“法则”是必要的,但不需要确立为严格的规定;前提与结果之间的“联系”是必要的,但这种联系可以是或然的.正因为归纳推理具有这种灵活性,才可能从事物(事情和实物)的现实出发,对事物的过去或者未来进行推断.

虽然归纳推理是一种“前提与结论之间有或然联系”的推理,但就结论而言,又可以分为两种情况:一种情况是结论的成立本身可能是必然的;一种情况是结论的成立本身已知是或然的.在这本书中,关于归纳推理的任何一个话题,我们都将分别讨论这两种情况.可以看到,前一种情况的必然性恰恰是需要通过演绎推理给予证明的,因而恰恰是纯粹数学所需要的.对于后一种情况,虽然通过推断得到的结论是或然的,但却是实用的,因为在日常生活和生产实践中,人们对事情决策所遵循的原则并不要求必然成立,只是希望在大多数情况下成立.比如,人们在决策的过程中可以不顾及或然率很小的情况:人们不会因为

◀前提与结论之间具有或然联系是归纳推理的重要特征.

◀这两种情况的研究思路是完全不同的,与此对应,验证结果是否正确的方法也是不同的.

① 关于逻辑,参见:本书第二辑最后一讲《数学的抽象》.

地震而不建高楼,也不会因为有交通事故而不购买汽车.因此,后一种情况的研究已经成为现代数学的重要内容,包括概率论、统计学、随机分析等等.

这是一种关于数学推理比较全面的刻画.

对于数学而言,如果说演绎推理是为了证明的推理,那么归纳推理就是为了推断的推理,把这两种推理模式结合起来,就得到了数学的推理的全部过程:从条件出发,借助归纳推理“推断”数学结果的可能性,借助演绎推理“验证”数学结果的必然性.或者,进行一个相反的推理过程:从结果出发,借助归纳推理“推断”数学条件的可能性,借助演绎推理“验证”数学条件的必要性.

很多人会对问题的结论感到惊讶,但事实就是如此.

在进入正文之前,我们简捷地讨论一个重大的哲学问题,我相信,讨论这个问题对于理解归纳推理是有好处的.这个问题就是:上述的数学推理过程本身是不是必然的?也就是说,如果让人类再一次开始演变的历史,那么,形成的数学推理过程是否会与上面述说的是一样的呢?我想给出的结论是:借助归纳推理进行推断的过程是必然的,而借助演绎推理进行验证这个过程不一定是必然的.在这里,我并没有要否定演绎推理的意思,恰恰相反,我们应当非常珍惜这个“难得的机会”的推理模式.我想,或许正是因为这个“难得”,人们就认为演绎推理是数学的根本特征,于是在数学的整个教育过程中都非常强调演绎推理,并且很大程度地忽略了归纳推理.但是,我们不应当

忘记,归纳推理是“自然”的推理模式,是一种“创新”所要依赖的推理模式.因此,在数学教育的过程中,无论从时间上还是从内容上都应当对归纳推理给予足够的重视,应当让学生在学的过程中,逐渐感悟出这种推理模式的“自然”属性.在这本书中,我们将详细讨论这个问题.

◀这句话道出了传统数学教育的弊端.

之所以得到上述结论,第一个论据是基于事实的,因为在这个地球上,原发性地创造了文字的最古老的三大文明,即两河流域文明、尼罗河文明和黄河文明,均没有在他们的思维过程中表现出演绎推理,并且可以设想,如果没有后来的文化交流,这些文明的延续也很可能不会自发地产生演绎推理.在希腊人入侵埃及之前,尼罗河文明即古埃及文明延续了三千多年,在这漫长的岁月中并没有形成演绎推理的思维模式.上述三大文明中只有黄河文明延续下来了,这便是现在中国这方土地上逐渐形成的中华文明,但追溯到明末清初欧几里得^①的《几何原本》传入之前^②,在中华文明漫长的演变过程中并没有形成演绎推理的

◀创造文字是人类文明的重要标志.



陕西科技出版社
2003年版

- ① 欧几里得(Euclid of Alexandria,约前330~约前275),古希腊最享有盛名的数学家,以其所著的《几何原本》(即《原本》)闻名于世.他将公元前7世纪以来希腊几何积累起来的丰富成果整理成一个严密的逻辑系统,使几何学成为一门独立的、演绎的科学.除了《原本》之外,他还有不少著作,可惜大都失传.《已知数》是除《原本》之外唯一保存下来的著作,体例和《原本》前6卷相近,包括94个命题.
- ② 《几何原本》最早的中文译本完成时间是在明朝万历三十六年,即1607年,是意大利传教士利玛窦(Matteo Ricci,1552~1610)与我国数学家徐光启(1562~1633)根据德国人克拉维乌斯(C. Clavius,1537~1612)1574年拉丁文本《欧几里得原本》合作翻译的,原书15卷,他们翻译了前6卷,因为主要是平面几何的内容,因此将它定名为“几何原本”,也就是从这个译本开始,中文的数学名词中有了“几何”一词.

思维模式,或者说,中国古代的哲人对演绎推理的思维模式不感兴趣.关于这个问题的详细讨论可以参见第三辑的附录.

再比如,我们曾经在第二辑的最后一讲详细讨论了西方的名实之争,问题的核心是,我们得以抽象的那些数学概念本身是如何存在的.有一种说法认为,这些概念是客观存在的,人们通过某种方式发现或者认识了这些概念,因此,这些概念是永恒的存在,是实体;还有一种说法认为,这些概念原本是没有的,是人为创造出来的,因此,这些概念只是名而已,不是实体.前者便是所谓的“唯实论”,后者便是所谓的“唯名论”.这两派的争论是从古希腊的学者柏拉图^①(Plato,前427~前347)和亚里士多德^②(Aristotle,前384~前322)开始的,一直延续至今.纵观几千年的西方哲学史,我们似乎可以认定,起源于古希腊的名实之争构建了演绎推理的逻辑基础,也就是说,没有柏拉图和亚里士多德开始的这场争论,就不会有如此规范的演绎推理.但是,在中国的认识论中,根本就没有关于这个命题的讨论.公孙龙子^③的《指物论》叙述了中国先秦时代关于定义的认识.那篇文章明确谈道:抽象

在古代,东方人与西方人的关注点有显著差异.

① 柏拉图(Plato,前427~前347),古希腊哲学家、教育家.20岁以后随苏格拉底学习,前后共8年.公元前387年在雅典创办学园,培养了包括亚里士多德在内的一大批学生.一生写了大量著作,其教育思想主要体现在他的《理想国》和《法律篇》等著作中.他有关数学的论述可参见罗素的《西方哲学史》.

② 亚里士多德(Aristotle,前384~前322),古希腊哲学家、科学家,形式逻辑的奠基人.

③ 公孙龙子,相传字子秉,中国战国时期的魏国(今河南省北部)人,活动年代约在公元前320年至前250年间,哲学家,主要著作作为《公孙龙子》.

的名是不存在的,存在的是具体的物,名是基于物抽象出来的.在那篇文章中明确地反问道:人们发现了一个新的事物,怎么能同时知道这个事物的名称呢?而不知道名称人们又如何能够讨论这个事物呢?因此,这个事物的名称是由人命名的^①.

◀这是一种非常自然的思考问题的方式.

之所以得到上述结论,第二个论据是基于必要性.所谓的必要性,就是考察人们为了发现自然的规律,或为了发现来源于自然的知识,这种推理模式是否是必须的.亚里士多德是演绎推理的集大成者,回顾在第三辑曾经讨论过的亚里士多德给出的演绎推理的经典句式:

凡人都有死.
苏格拉底^②是人.
所以,苏格拉底有死.

事实上,对于发现知识而言,这个句式的推理是一点意义都没有的.这个推理模式至多可以在生前判断苏格拉底有死,但亚里士多德在写这个句式的时候,苏格拉底已经死了.事实上,判断“苏格拉底有死”要比判断“所有人有死”容易得多.因此,正常的推理模式应当是从每一个具体的“苏格拉底有死”推断“所

◀这个句式把演绎推理的思维过程抽象到了极致.

① 参见:史宁中.论定义中的殊相与共相——公孙龙子《指物论》评析[J].古代文明,2009(1):22~26.

② 苏格拉底(Socrates,公元前469~公元前399),古希腊著名的哲学家,他和他的学生柏拉图及柏拉图的学生亚里士多德被并称为“希腊三贤”.

有人有死”，可以写出推理模式：

苏格拉底是人，苏格拉底有死。

柏拉图是人，柏拉图有死。

亚里士多德是人，亚里士多德有死。

.....

所以，凡人都有死。

这样，我们得到了一个新的知识：凡人都有死。可以看到，这种句式的流程与演绎推理的经典句式的流程是完全相反的，这是一种从具体到一般的推理模式。为了讨论问题的方便，我们称这个句式为归纳推理的经典句式。

通过上面两种句式的分析可以看到，**演绎推理是基于“理念”的推理，归纳推理是基于“事实”的推理。**

这是演绎推理与
归纳推理的重要
区别之一。

由此，进一步可以知道，**演绎推理是追求“形式”的推理，归纳推理是追求“实用”的推理。**关于演绎推理是基于“理念”的、是追求“形式”的说法似乎有些武断，事实上，这个说法恰恰是形成演绎推理这种思维模式的初衷，正如亚里士多德在《形而上学》中谈到的^①：

另外，为知而知的知识，属于更可通晓的知识，因

① 参见：西方哲学原著选读·上[M]. 北京大学哲学系外国哲学史教研室编译. 北京：商务印书馆，1981：119；
也可参见：苗力田主编. 亚里士多德全集·第七卷[M]. 北京：中国人民大学出版社，1993：31.

为想以学为唯一目的的人会选择最完善的知识,即最可通晓的知识.……因此,这种知识从一开始就不是为了创造些什么,……很显然,他们是为了知而求知,并不以实用为目的.可以说,只有在生活必需的那些东西有了保障的时候,人们才开始寻求这种知识.我们追求这种知识并不是为了得到些什么别的好处.正如我们称一个为自己而不为他人存在的人为自由人一样,它是唯一的一门自由的学问,因为它只是为了它自己而存在.

我想,亚里士多德所说的是非常确切的,人们只有在衣食无忧的情况下,才可能静下心来观察、思考、推断那些完全为了知而知的知识.关于这一点,几乎同时期的中国古代的哲人们并没有那么好的条件.春秋战国时期,中国大地上征伐不断、民不聊生,因此,中国古代的哲人更关心人世间的事情,关心如何做人的知识,关心如何管理国家的知识,或许这就是中国古代没有出现演绎推理的主要原因.事实上,即便是在衣食无忧的情况下,人们也不一定必然地去探求那些完全为了知而知的知识,因为人们在这种知识中不一定能够直接得到效益,正如现代分析逻辑的奠基人、德国逻辑学家弗雷格(G. Frege, 1848~1925)

◀ 中国古代更强调悟性,这与研究的内容和研究的目的有关.

所说^①：

逻辑规律不是自然规律，而是自然规律的规律。

显然，这里所说的逻辑规律是演绎推理（详细的讨论可以参见第三辑第 5.1 节）。因此可以断言，对于认识自然而言，演绎推理是不能直接发挥效能的。

②

为了更加清晰地把握推理的精髓，我们把两种不同推理的过程简单描述如下：推理的主线是命题之间具有传递性，在这个主线的基础上，演绎推理是命题所涉及的范围由大到小的推理，归纳推理是命题所涉及的范围由小到大的推理。所谓命题范围由大到小或者由小到大，是推理模式从一般到特殊或者从特殊到一般的具体描述，我们可以从演绎推理的经典句式和归纳推理的经典句式理解这种表述。从逻辑层面考虑，正因为演绎推理是命题范围由大到小的推理，因此通过演绎推理得到的结论是必然的，但不能用于发现新的知识；与此相反，正因为归纳推理是命题范围由小到大的推理，因此通过归纳推理得到的结论是或然的，但能够用于发现新的知识。在第三辑的讨论中

华罗庚^②曾经说：▶
从具体到抽象是
数学发展的一条
重要大道。

① 参见：[英]迈克尔·达米特著. 形而上学的逻辑基础[M]. 任晓明, 李国山译. 北京: 中国人民大学出版社, 2004: 2.
弗雷格, F. L. G. (Frege, Friedrich Ludwig Gottlob, 1848~1925), 德国数学家、逻辑学家和哲学家, 数理逻辑和分析哲学的奠基人.

② 华罗庚(1910~1985), 江苏金坛人. 著名数学家, 中国解析数论、矩阵几何学、典型群、自安函数等多方面研究的创始人和开拓者, 代表著作为《堆垒素数论》.

我们可以感悟到,演绎推理的逻辑性集中表现在命题之间的传递性,通过这本书的讨论我们也将知道,归纳推理的逻辑性也体现在命题之间的传递性。

◀这一点是逻辑的集中表现,但这一点很容易被人们忽略。

虽然我们认为归纳推理是一种“自然”的推理模式,但其中存在着一个重大的哲学问题,就是归纳推理的“合理性”问题。归纳推理的本质是,从经验过的东西推断未曾经验过的东西,从事物的过去和现在推断事物的未来,或者从事物的现在推断事物的过去。那么就产生了这样的问题:这种推断本身是合理的吗?这个问题似乎是不可论证的,一方面,这种合理性是不能通过演绎方法证明的,否则归纳推理也可以归入演绎推理的范畴;另一方面,这种合理性也不能通过归纳方法证明,否则将成为无限的循环论证。这个问题最早是英国哲学家休谟^①(David Hume, 1711~1776)提出来的,因此这个问题被称做休谟问题,有时,人们也称其为归纳问题。在这本书中,我们将尝试回答这个问题。

如果我们认为归纳推理是一种“自然”的推理模式,那么,关于归纳推理的讨论就应当从探寻人类最为原始的推理形态开始。

^① 休谟(David Hume, 1711~1776),18世纪英国哲学家、历史学家、经济学家,近代不可知论的著名代表。著有《人性论》(1739~1940)、《人类理智研究》(1748)和死后出版的《论灵魂不死》等。