

第 3 辑

SHUXUE SIXIANG GAILUN
SHUXUE ZHONG DE YANYI TULI

数学思想概论

数学中的演绎推理

《史宁中著》



东北师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学思想概论 (第3辑) —— 数学中的演绎推理/史
宁中著. — 长春: 东北师范大学出版社, 2009. 8
ISBN 978 - 7 - 5602 - 5864 - 5

I. 数… II. 史… III. 数学—思想方法—高等学校
教学参考资料 IV. 01 - 0.

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 149786 号

责任编辑: 杨述春 刘晓军 封面设计: 宋 超
 责任校对: 余 天 责任印制: 张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号 (130024)

销售热线: 0431—85687213

传真: 0431—85691969

网址: <http://www.nenup.com>

电子函件: sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

长春新华印刷厂

长春市吉林大路 535 号 (130031)

2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷

幅面尺寸: 170 mm×227 mm 印张: 15.75 字数: 210 千

定价: 29.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 可直接与承印厂联系调换

目录

CONTENTS

绪论 数学的推理	/1
第一讲 基本推理的基础	/11
§ 1.1 推理的工具:语言	/12
§ 1.2 推理的对象:命题	/16
§ 1.3 命题的基础:定义	/23
§ 1.4 三个基本原则	/36
第二讲 具有传递关系的推理	/44
§ 2.1 直言三段论	/45
§ 2.2 直言三段论的本质	/58
§ 2.3 传递三段论	/64
第三讲 具有递推关系的推理	/72
§ 3.1 完全归纳法	/73
§ 3.2 数学归纳法	/80
§ 3.3 数学归纳法的变化	/86
第四讲 具有递推关系的运算	/100
§ 4.1 电子计算机的出现	/102

数学思想概论

§ 4.2 二分法与优选法 /107

§ 4.3 黄金分割 /113

§ 4.4 牛顿法 /118

第五讲 现代数学基础:集合论 /125

§ 5.1 集合的定义 /127

§ 5.2 集合论公理化体系 /134

§ 5.3 选择公理 /140

§ 5.4 无穷的度量与连续统 /151

§ 5.5 序集、良序集与超限归纳法 /163

第六讲 借助符号表示的推理 /171

§ 6.1 符号表示的开始 /173

§ 6.2 布尔的符号运算及其发展 /177

§ 6.3 自然数公理体系 /188

附录 中国古代的命题、定义和推理 /198

人名索引 /245

绪论 数学的推理

阅读提示

抽象和推理是数学的显著特征,与这两个特征关联的思想也就成为数学的核心思想.虽然抽象与推理密不可分,但是,二者对于数学发展的功能和作用各有侧重:通过“抽象”把外部世界引入数学,通过“推理”促进了数学本身的发展.

人们借推理,把关系概念应用于对象概念,得到数学基本命题.一般来说,形成推理模式以后有两个好处和一个坏处,好处是便于使用和交流,坏处是限制发展.

数学推理模式本质上有两种,即演绎推理与归纳推理.虽然这两种推理相互依存,但就数学结果的获得而言,还是有所区别的.在一般情况下,人们是借助归纳推理“预测”数学结果,借助演绎推理“验证”数学结果.因此,就推理的功能而言,预测结果和推测原因这两种能力依赖的推理形式是归纳推理,而不是演绎推理.虽然数学不是实验科学,也不是经验科学,但是,数学概念的形成依赖于经验,数学推理的过程依赖于思维.

这一辑讨论演绎推理,这是一种形式确定、结果必然的推理.

我们在本书的第一辑和第二辑讨论了数学的抽象,在这一辑和第四辑将讨论数学的推理.很显然,抽象和推理都是数学的显著特征,人们一谈起数学首先想到的就是这两个特征.所以,与这两个特征关联的思想也就成为了数学的基本思想.人们通过抽象,从日常生活和生产实践中得到数学所要研究的基本概念和法则;人们通过推理,在基本概念和法则的基础上得到数学的公式和命题.简而言之,人们通过“抽象”把外部世界引入数学,通过“推理”促进了数学本身的发展.当然,我们不可能把这两个功能截然分开,因为抽象必然要借助理推理的方法,而推理又必然要借助抽象的思维.

清晰地把握数学抽象的功能和本质,对理解数学和数学教育至关重要.

数学基本命题就是刻画数学的对象概念的基本属性,以及对象概念之间的关系.

回忆第二辑最后一讲的讨论,人们通过抽象得到的数学的基本概念包括对象概念和关系概念.对象概念是指:数学所要研究的那些东西,比如自然数、实数、点、线、面等等;关系概念是指:表示对象之间关系的逻辑术语,这些术语具有因果、转折、递进、对比、补充、选择等功能,比如存在、相等、属于、介于、所以等等.于是,我们可以得到数学流程的最基本形态:借助理推理把关系概念应用于对象概念,得到数学基本命题.

推理是一种思维过程,在现代社会,我们谈及的

思维过程往往都是很复杂的,让人望而生畏.即便如此,我们仍然希望把数学推理的思维过程条理化,我想,这种条理化对大学生和年轻的数学教师更好地理解数学的本质是有益处的,特别是对工作在基础教育第一线的数学教师是有益处的.关于思维过程,或者说,关于推理过程的有关问题,我们先回顾一下笛卡儿^①(R. Descartes, 1596~1650)的建议,他在《探求真理的指导原则》的第六个原则中说^②:

要从错综复杂的事物中区别出最简单事物,然后进行有秩序的研究.这就要求我们在那些已经通过演绎得到真理的推理过程中,观察哪一个事物是最简单项,以及观察这个项与其他项之间关系的远近,或者相等.

笛卡儿非常推崇这个原则,认为这个原则是他这篇论文中最有用的,是揭示科学奥秘的基本方法^③.事实上,笛卡儿提倡的方法的实质就是,把要进行推理的事物排成一个系列,然后找出系列中的最简单项进行逐项判断.

◀这种思维方式具有广泛的普适性.

① 笛卡儿(Rene Descartes, 1596~1650), 1596年3月31日生于法国都兰城.笛卡儿是伟大的哲学家、物理学家、数学家、生理学家,解析几何的创始人.笛卡儿不仅在哲学领域里开辟了一条新的道路,同时笛卡儿又是一位勇于探索的科学家,在物理学、生理学等领域都有值得称道的创见.特别是在数学上他创立了解析几何,从而打开了近代数学的大门,在科学史上具有划时代的意义.他被誉为“近代科学的始祖”.黑格尔称他为“现代哲学之父”.

② 参见:[法]笛卡儿著.探求真理的指导原则.管振湖译.北京:商务印书馆,2005:27.

③ 参见:[法]笛卡儿著.探求真理的指导原则.管振湖译.北京:商务印书馆,2005:31~32.

在论证过程中找出关键点和关键点之间的关联。

对数学而言,笛卡儿所说的系列就是由条件出发最后得到结论的证明过程.在大多数的情况下,这个证明过程是由一些基本推理首尾连接而形成的.所谓基本推理是指由一个命题或者几个命题出发,得到另一个命题的思维路径,其中所谓的命题是指一种可以肯定或者否定的语句.这样,我们就可以把基本推理理解为:由一个或者几个“是非判断”到另一个“是非判断”的思维路径.这样,基本推理就是数学证明过程中的基本元素,这个基本元素可能就是笛卡儿所说的最简单项.我们用下面的图 1 - 1 描述一个证明过程,可以看到,证明过程往往不是线性的,而是多元的.

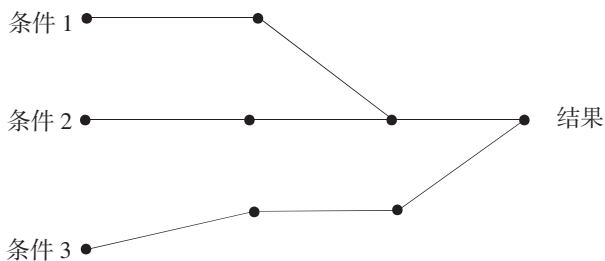


图 1 - 1 从条件到结果的证明过程是由若干个基本推理组成的

因此,为了保证整个证明过程的正确性,首先必须保证基本推理的正确性,也就是通常所说的,我们

必须保证基本推理符合逻辑^①,因为逻辑学是一门关于区分正确推理与不正确推理的原理和方法的学问^②.可以设想,被现代人们广泛认同的逻辑准则,最初只是一些符合常理的推理方法,经过日常生活和生产实践的长期检验,通过归纳整理逐渐形成了准则.因此,我们在这一辑中所述说的基本推理大多数是一些已经成型了的、符合逻辑准则的推理模式.在科学技术如此发达的今天,要创造出新的、被人们广泛认可的思维模式是一件非常困难的事情.

一般来说,形成推理模式以后有两个好处和一个坏处.两个好处是:便于使用和便于交流.所谓便于使用,是因为形成模式的东西是经过检验的,使用时不必重新考虑推理的合理性;所谓便于交流,是因为一个思维过程一旦形成模式就规范了,甚至可以形成专门的术语和符号,这便于述说和理解.一个坏处是:限制发展.一个东西一旦形成模式就难以突破,在一般情况下,人们还是习惯于因循守旧,不到不得不作为的程度,人们是不会轻易打破传统的,因为传统凝聚了祖先对生存环境的适应,就像我们在第二辑最后一讲叙述的那样.

◀这里所说的交流主要是指数学.为了数学的需要往往要把知识系统化,使得知识能够有条理地、规范地呈现.

① 逻辑这个词源于希腊语 λογος,拉丁语称谓 logic,有多种含义,如语言、命运、智慧、尺度、原则、规则、必然性等.古希腊哲学家赫拉克利特(Herakleitos,约前530~前470)最早使用了这个词.意指贯穿变化过程中的必然性.亚里士多德用这个词表示事物的本质,并把这个词应用于推理过程.他的一系列著作,如《工具论》、《逻辑学》等,是逻辑学研究的发端.在现代西方语言中,各门科学中“学”字的词尾常用-logy,也是源于这个词.

② 参见:[美]柯匹,[美]科恩著.逻辑学导论·第11版.张建军,潘天群,等译.北京:中国人民大学出版社,2007:5.

这里所说的是推理模式而不是思维模式。

对于数学,本质上有两种推理模式,一种是演绎推理,一种是归纳推理.事实上,这两种推理模式不仅在数学、在自然科学,甚至在社会科学以及人们的日常生活中都是最基本的,正如爱因斯坦^①(A. Einstein,1879~1955)曾经说过的^②:

西方科学的发展是以两个伟大成就为基础,那就是:希腊哲学家发明的形式逻辑体系(在欧几里得几何学中),以及通过系统的实验发现有可能找出因果关系(在文艺复兴时期).在我看来,中国的贤哲没有走上这两步,那是用不着惊奇的.令人惊奇的倒是这些发现(在中国)全都做出来了.

中国古代常用分类判断的方法,详见附录的讨论。

爱因斯坦所说的两个伟大成就,前者指的是演绎推理,后者指的是归纳推理.从上文中可以看到,爱因斯坦对于中国的了解是不够的,从另一个角度也说明了,中国的学者们没有很好地归纳整理古代贤者们的思想脉络,使得西方的学者们不能很好地把握.我确信,中国古代如此灿烂的文化是不可能离开推理的,当然,中国古代的推理模式很可能与上面说的两种推理模式有所不同,我们将在这一辑的附录中详细地讨

① 爱因斯坦(Albert Einstein,1879~1955),举世闻名的德裔美国科学家,现代物理学的开创者和奠基人.

② 这是爱因斯坦在1953年写给朋友的信中所说的话,李约瑟(Joseph Needham)在1961年发表的论文中全文引用了这封信.参见:爱因斯坦文集·I.许良英,范岱年编译.北京:商务印书馆,1976:574.

论这个问题.关于爱因斯坦说的那两个伟大成就,美籍华人科学家杨振宁^①说得更为明确,他在《我的生平》中说^②:

我很有幸能够在两个具有不同文化背景的国度里学习和工作,我在中国学到了演绎能力,我在美国学到了归纳能力.

这里的演绎能力和归纳能力分别是指使用演绎推理的能力和使用归纳推理的能力.

现在,简单分析上述两种推理模式在数学推理中的功能.回忆我们在第二辑最后一讲的总结:人们往往是通过直观来预测数学的结果,然后通过证明来验证数学的结果.其中直观借助的推理模式主要是归纳推理,证明借助的推理模式主要是演绎推理,这样,就可以用非常直白的语言来述说数学结果的推理的过程:从条件出发,借助归纳推理“预测”数学结果,借助演绎推理“验证”数学结果,当然在验证的过程中需要适当地调整“给定的条件”和“预测的结果”.我再次强调,上面的述说是针对一般情况而言的,我们不能排除有特殊情况的出现.

① 杨振宁(1922~),美籍华裔物理学家,1922年10月1日生于安徽合肥,美国科学院院士、英国皇家学会会员、中国科学院外籍院士.1956年,杨振宁和李政道共同的论文,推翻了物理学的中心信息之一——宇称守恒基本粒子和它们的镜象的表现是完全相同的,由此,两人获得了1957年的诺贝尔物理学奖.美国物理学家、诺贝尔奖获得者赛格瑞(E. Segre)推崇杨振宁是“全世界几十年来可以算为全才的三个理论物理学家之一”.

② 参见:杨振宁的《我的生平》,东北师范大学60周年校庆学术报告,2006年.

这种设计思想是▶
“学科为本”课程
设计思想的核心。

这种能力的培养▶
往往表现在过程
中,因而给教学
设计和评价都带
来了很大的
困难。

把思维方法本身▶
思考清楚是非常
重要的,这也是
数学教育的
难点。

因此,这两种推理模式都是非常重要的,都应当在数学教育中得到充分的重视.但是,在我们现行的数学教学中,需要论证的结果往往都是书本或者教师事先给定的,并且是一丝不差地给定的^①,因此,学生们的工作只是借助演绎推理来验证这些事先给定结果的正确性.可以看到,这样的数学教学是不全面的,这样的数学教育没有培养学生通过条件预测结果的能力,也没有培养学生根据结果推测原因的能力,而“预测结果”的能力和“推测原因”的能力恰恰是创新能力的基础,是不能忽视的.为此,我们必须有意识地设计一些数学的教学过程,有意识地培养学生的这两种能力.从本质上说,预测结果和推测原因这两种能力所依赖的思维方法是归纳推理,而不是演绎推理.

我们在这一辑讨论演绎推理,在下一辑讨论归纳推理.虽然从逻辑层面上看,似乎应当先讨论发现结果所需要的归纳推理,然后再讨论论证结果所需要的演绎推理,但是,作为一种推理形式,更便于表述的是演绎推理.我想,这也是为什么演绎推理的模式要比归纳推理的模式更早地被总结出来的原因.对于这两种推理模式,我们都将先讨论具体的推理方法,在对具体的方法有所了解的基础上,再回过头来分析推理

① 在数学教学中,教师往往会对学生说,在证明过程中,如果事先给定的条件没有用就证明了结果,那么证明肯定是不正确的,或者是不严格的,这就说明给定的条件与结果之间是一丝不差的.

过程中涉及的重要概念以及这些概念的内涵与外延。也就是说,我们先建立推理方法的直观基础,然后再尝试地分析推理方法本身的合理性。

我们不准讨论推理方法中的哲学问题,比如命题判断的标准是如何存在的以及命题判断的路径是不是先验的等等诸如此类的问题,因为这些问题与我们曾经用很大的篇幅讨论过的“抽象了的东西是如何存在的”这个命题是相似的,我们在其中可以找到问题的答案。数学不是实验科学,也不是经验科学,但是,数学概念的形成依赖于经验,数学推理的过程依赖于思维。虽然思维本身是无形的,但是,正如恩格斯^①(F. Engels, 1820~1895)在《自然辩证法》中所谈到的^②:

我们的主观的思维和客观的世界服从于同样的规律,因而两者在自己的结果中不能相互矛盾,而必须彼此一致,这个事实绝对地统治着我们的整个理论思维,它是我们的理论思维的不自觉的和无条件的前提。

我们生活在地球上,我们是“这个”世界的产物,因此,正确的思维就是指那些能够合同于“这个”世界

① 弗里德里希·恩格斯(Friedrich Engels, 1820. 11. 28~1895. 8. 5), 德国社会主义理论家及作家, 马克思主义的创始人之一, 马克思的亲密战友, 国际无产阶级运动的领袖。

② 参见: 马克思恩格斯全集: 第二十卷. 中共中央马克思, 恩格斯, 列宁, 斯大林著作编译局译. 北京: 人民出版社, 1971: 610.

从本质上看,人的思维过程应当是自然规律的模拟,当然,这个模拟在最初可能是不自觉的。

的思维,能够合同于“这个”世界已经存在了的规律的思维.因此,这本书的目的就是分析:在数学的论证过程中,分析问题的思维应当如何合同于“这个”世界已经存在了的规律,就像恩格斯所说的那样,不要使思维过程与客观规律矛盾.

为了讨论问题的方便,我们初步定义数学中的**演绎推理**为:按照某些规定了的法则所进行的、前提与结论之间有必然联系的推理.因为数学的结论大体上可以分为命题结论和运算结论,那么针对数学的演绎推理而言,大体就可以分成两个部分:**命题推理**和**运算推理**.

第一讲 基本推理的基础

阅读提示

基本推理是指数学论证过程的每一个关节点,其中,语言是推理的工具,命题是推理的对象,定义是命题的基础.

语言是信息传递的有效工具.如果不涉及论证过程,数学上的语句通常以命题的形式出现,命题是一种可以判断是非的语句.数学命题的核心是叙述研究对象之间的关系,即把关系概念应用于对象概念.数学命题可以以正命题或者否命题两种形式存在,因此,就判断而言,对数学中的命题只存在正正、正否、否正、否否四种可能的结果.

为了数学推理的确定性,数学命题中的所指项必须定义明确,这是进行命题判断的前提.因此,数学命题中的所指项必须是元素或者是集合,但命题中的命题项可以是集合也可以是类.我们通常使用的数学定义大致分为两种,一种是名义定义,一种是实质定义.

从先哲的论述中我们能够清楚地知道:定义的功能是为了明确讨论问题的对象,命题的功能是为了表

述所讨论问题的实质,论证的功能是分析条件和结果之间的关系.

在数学推理中,需要把握同一律、矛盾律和排中律这三个基本原则.三段论是形式逻辑的核心,小前提被大前提包含是三段论的核心.对于数学的推理而言,全称肯定、全称否定、特称否定这三种形式的直言三段论是有效的,也是经常被使用的.

处理好一般与具体之间、抽象与实体之间的关系,应当是数学教育的基本法则之一.

我们已经说过,一个数学论证过程是由一系列基本推理构成的,因此,讨论基本推理是分析数学论证过程的基础.我们先讨论基本推理中涉及的基本概念,我想,这些基本概念应当包括语言、命题和定义.其中语言是推理的工具,命题是推理的对象,定义是命题的基础.

§ 1.1 推理的工具:语言

语言是信息传递的有效工具.我们可以设想,在许多动物那里也有语言的雏形,许多动物能够发出不同的声调来表示愤怒、紧张、高兴、悲伤,甚至他们还能够向同伴传递食物、水源、平安、危险这样的信息.当然,这些信息的传递还不能构成真正意义上的语

言,因为对于上面所说的信息表达只需要简单的声音符号就可以了,而我们通常所说的语言所表达的是关于事物(事件和实物)的信息,是必须由若干个声音符号组合而成的复杂的声音符号。

我曾经问过学习语言的学生一个问题:你能推断远古的人类什么时候会说话的吗?你如何来说明你的推断?后来,我发现我提出的是一个非常难以定论的问题,因为至今为止,考古学的任何发现都无法直接证实“话语”的存在。但是,对于这个问题我们仍然可以通过逻辑推理给出一个回答。我想,人类至少在旧石器时代的晚期或者新石器时代的早期就会说话了,距今三万五千年。这样推断的理由是,复杂信息的传递必须经过语言,新石器时代的一个重要标志就是生产工具,即石器的相对规范化,规范化需要传递复杂信息,不借助语言这个载体是不可能实现的,所以,至少在新石器时代到来之时语言就已经形成了。

在近代,许多哲学、人类学的学者,尝试地通过语言的结构来分析民族的起源,我想,这是有道理的。比如,有些学者认为,在西起土耳其、途经蒙古大草原、东至朝鲜半岛和日本这片广阔地域上生活的民族很可能是起源于远古时代的一个或者相临的几个部落,因为在这些民族的语言中都把动词放在名词的后面^①。

◀语言对于人类进化的作用,对于人类思维发展的作用,怎么评价几乎都不过分。人类的抽象能力的发展是与语言的使用密切相关的。

^① 东北师范大学历史文化学院教授、研究古巴比伦的专家吴宇虹支持这种看法。