前　言

20多年来，自己对数学中的两个难题——费尔马大定理和四色问题，在前人研究成果的基础上，进行了深入的研究和分析，并试图找到比较简单的数学证明方法。这里，把自己在证明过程中所写出的几份证明手稿汇集在一起。这既可以使大家了解证明的全过程，也可以作为资料保存下来。

因为人的认识是一个不断深化的过程，在探索中总会有些错误或不完善之处的。然而，只有在这种不断探索和不断完善的过程中，才能逐步地接近真理，并最终使之确立起来的。只有这样，才能鼓励人们去努力地攀登科学技术高峰。

经过多年艰苦的研究和探索，书稿于2004年11月12日最终在济南完成，后于2006年11月5日定稿于成都。

在大力提倡科学和技术创新的今天，如果本书能够有助于这些，则是自己的希望所在。对于其中不足之处，欢迎大家的批评和指正(联系电话：0531－82051543，028－87651028)。

徐俊杰

2006年11月12日

目　录

第一部分　数学难题探索(第一稿)

一、费尔马大定理的初等证明方法①

(一)基本知识

(1)1637 年,法国数学家费尔马(Fermat) 指出,在 $n>2$ 时,方程

$$x^n+y^n=z^n \tag{1}$$

无正整数解。以下,正整数解均简称为解[8]。

(2) 因为 $n>2$ 时,可有 4 整除 n,或者奇素数 p 整除 n,所以只要证明 $n=4$,$n=p$ 时,方程(1) 无解即可[3]。

(3) **定理 1**　在 x,y,z 彼此互素,x 为偶数时,方程

$$x^2+y^2=z^2 \tag{2}$$

的解为

$$x=2mn \tag{3}$$

$$y=m^2-n^2 \tag{4}$$

$$z=m^2+n^2 \tag{5}$$

这里,$m>n>0$,$(m,n)=1$,mn 为偶数,即 mn 为一奇一偶[3]。

(4) **定理 2**　设 $f(x,y)$ 为有理系数多项式,在代数曲线 $f(x,y)=0$ 的亏格 $g>1$ 时,则其最多有有限组有理数解。由此可推

① 1990 年 2 月 18 日完成初稿,1995 年 5 月 20 日完成修改稿,1995 年 6 月 16 日在济南完成第二次修改稿,2006 年 11 月 2 日在成都完成此第三次修改稿。

得：在 $n > 3$ 时，方程(1) 最多有有限组解[6]。

(5) 无穷递降法：如果方程 $f(x) = 0$ 的解是若干个正整数，则在其中必有一个最小的正整数 x；如果可以得到另一个方程 $f(x_0) = 0$ 也有一个解为正整数 x_0，并且 $x_0 < x$。于是，方程 $f(x) = 0$ 无正整数解[3]。

(6) 有穷递升法：如果方程 $f(x) = 0$ 的解是有限个正整数，则在其中必有一个最大的正整数 x；如果可以得到另一个方程 $f(x_0) = 0$ 也有一个解为正整数 x_0，并且 $x_0 > x$。于是，方程 $f(x) = 0$ 无正整数解。

(二) $n = 4$ 时的证明

1. 第一种方法

在 x, y, z 彼此互素，x 为偶数时，设方程

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{1}$$

的解为 (x, y, z)，并且 z 是所有解中的最小解。

因为 yz 为奇数，设 $z = a + b$，$y = a - b$，由式(1) 可有

$$x^4 = (a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2) \tag{2}$$

这里，$a > b > 0$，$(a, b) = 1$，ab 为偶数。因为 $(8ab, a^2 + b^2) = 1$，由式(2) 可有

$$c^4 = 8ab \tag{3}$$

$$e^4 = a^2 + b^2 \tag{4}$$

根据定理 1，在 a 或 b 为偶数时，式(4) 的解为

$$a \text{ 或 } b = 2uv \tag{5}$$

$$b \text{ 或 } a = u^2 - v^2 \tag{6}$$

$$e^2 = u^2 + v^2 \tag{7}$$

这里，$u > v > 0$，$(u, v) = 1$，uv 为偶数。由式(3)，(5)，(6) 可有

$$c^4 = 16uv(u+v)(u-v)$$

即

$$(c/2)^4 = uv(u+v)(u-v) \tag{8}$$

因为$(u,v)=1$,uv为偶数,所以uv,$u+v$,$u-v$彼此互素。由式(8)可有

$$u=r^4 \tag{9}$$

$$v=s^4 \tag{10}$$

$$u+v=t^4 \tag{11}$$

$$u-v=k^4 \tag{12}$$

这里,$r>s>0$,$(r,s)=1$,rs为偶数,kt为奇数。把式(9),(10)代入式(11),可有

$$r^4+s^4=t^4 \tag{13}$$

于是,从式(13)可以得出,(r,s,t)也是式(1)的解。由式(6),(11)可有

$$z=a+b>b \text{ 或 } a=u^2-v^2\geqslant u+v=t^4>t$$

$$z>t$$

这与假设z是式(1)的最小解相矛盾。因此,式(1)无解。

这种证明方法是1989年4月28日得出的。

2. *第二种方法*

在x,y,x彼此互素,x为偶数时,设方程

$$x^4+y^4=z^4 \tag{1}$$

的解为(x,y,z)。根据定理1,式(1)的解为

$$x^2=2mn \tag{2}$$

$$y^2=m^2-n^2 \tag{3}$$

$$z^2=m^2+n^2 \tag{4}$$

这里,$m>n>0$,$(m,n)=1$,m为奇数,n为偶数。于是,在式(2)有解的同时,式(3)也同时有解。设m是式(3)所有解中的最小解。

根据定理1,式(3)的解为

$$m=a^2+b^2 \tag{5}$$

$$n=2ab \tag{6}$$

$$y = a^2 - b^2 \tag{7}$$

这里，$a > b > 0$，$(a,b) = 1$，ab 为偶数。由式(2)，(5)，(6) 可有

$$x^2 = 4ab(a^2 + b^2) \tag{8}$$

因为$(a,b) = 1$，ab 为偶数，所以$(4ab, a^2 + b^2) = 1$。由式(8) 可有

$$c^2 = 4ab \tag{9}$$

$$e^2 = a^2 + b^2 \tag{10}$$

于是，从式(10) 可以得出，(a,b,e) 也是式(3) 的解。由式(5)，(10) 可有

$$m = a^2 + b^2 = e^2 > e$$

$$m > e$$

这与假设 m 是式(3) 的最小解相矛盾。因此，在式(2) 有解的同时，式(3) 无解，进而式(1) 无解。

同理，也可以证明在式(2) 有解的同时，式(4) 无解，进而式(1) 无解。

这种证明方法是 1994 年 10 月 15 日得出的。

实际上，对于方程(2)，(3)，(4)，单独地看，每一个方程都是有解的。然而，却无法找到相应的 m 和 n，使这三个方程同时有解。因此，只要证明其中两个方程不同时有解，也就能证明式(1) 无解。以下的证明思路，也是如此。

(三) $n = p$ 时的证明

1. 第一种方法

在 x,y,z 彼此互素时，设方程

$$x^p + y^p = z^p \tag{1}$$

的解为(x,y,z)。由式(1) 可有

$$(x^{p/2})^2 + (y^{p/2})^2 = (z^{p/2})^2 \tag{2}$$

因此，(x,y,z) 也是式(2) 的解。

根据定理 1，由式(2) 可知，z 只能为奇数。于是，在 x 为偶数

时，式(2) 的解为

$$x^{p/2} = 2mn \tag{3}$$

$$y^{p/2} = m^2 - n^2 \tag{4}$$

$$z^{p/2} = m^2 + n^2 \tag{5}$$

这里，$m > n > 0$，$(m,n) = 1$，mn 为偶数。

由式(3)，(4)，(5) 可知，x,y,z 又只能都为平方数。设 $x = r^2$，$y = s^2$，$z = t^2$，则式(2) 和式(1) 为

$$r^{2p} + s^{2p} = t^{2p} \tag{6}$$

(1) 方程(6) 可为

$$(s^2)^p = (t^p)^2 - (r^p)^2 \tag{7}$$

式(7) 的解为

$$r^p = n \cdot g(m,n) \text{ 或 } n \cdot g(n,m) \tag{8}$$

$$s^2 = m^2 - n^2 \tag{9}$$

$$t^p = m \cdot f(m,n) \text{ 或 } m \cdot f(n,m) \tag{10}$$

这里，$m > n > 0$，$(m,n) = 1$，m 为奇数，n 为偶数；$(m, f(m,n)) = 1$ 或 p，$(n, g(m,n)) = 1$ 或 p；

$$f(m,n) = C_p^0 m^{p-1} + C_p^2 m^{p-3} n^2 + \cdots + C_p^{p-3} m^2 n^{p-3} + C_p^{p-1} n^{p-1} \tag{11}$$

$$f(n,m) = C_p^1 n^{p-1} + C_p^3 n^{p-3} m^2 + \cdots + C_p^{p-2} n^2 m^{p-3} + C_p^p m^{p-1} \tag{12}$$

$$g(m,n) = C_p^1 m^{p-1} + C_p^3 m^{p-3} n^2 + \cdots + C_p^{p-2} m^2 n^{p-3} + C_p^p n^{p-1} \tag{13}$$

$$g(n,m) = C_p^0 n^{p-1} + C_p^2 n^{p-3} m^2 + \cdots + C_p^{p-3} n^2 m^{p-3} + C_p^{p-1} m^{p-1} \tag{14}$$

其中，$f(n,m)$ 和 $g(n,m)$ 式子中的各项是分别把 $f(m,n)$ 和 $g(m,n)$ 式子中的各项颠倒过来写的，并且 $C_p^i = C_p^{p-i}$ $(i = 0,1,2,\cdots,p-1,p)$。

于是，在式(9) 有解的同时，式(8) 也同时有解。

根据定理1，由式(25)，式(9)的解为

$$m = a^2 + b^2 \tag{15}$$

$$n = 2ab \tag{16}$$

$$s = a^2 - b^2 \tag{17}$$

这里，$a > b > 0$，$(a,b) = 1$，ab 为偶数。由式(8)，(16)可有

$$r^p = 2ab \cdot g(m,n) \text{ 或 } 2ab \cdot g(n,m) \tag{18}$$

(2) 方程(6)还可为

$$(r^p)^2 + (s^p)^2 = (t^p)^2 \tag{19}$$

根据定理1，式(19)的解为

$$r^p = 2uv \tag{20}$$

$$s^p = u^2 - v^2 \tag{21}$$

$$t^p = u^2 + v^2 \tag{22}$$

这里，$u > v > 0$，$(u,v) = 1$，uv 为偶数。同时，式(21)的解为

$$u = a \cdot f(a,b) \tag{23}$$

$$v = b \cdot g(a,b) \tag{24}$$

$$s = a^2 - b^2 \tag{25}$$

由式(20)，(23)，(24)可有

$$r^p = 2ab \cdot f(a,b) \cdot g(a,b) \tag{26}$$

这里，$(a, f(a,b)) = 1$ 或 p，$(b, g(a,b)) = 1$ 或 p。

(3) 在 a 为偶数，b 为奇数时，分别有

① 在 p 不整除 ab 时，从式(18)可知，p 不整除 $g(m,n)$。因为 $(2ab,\ g(m,n)) = 1$，由式(18)可有

$$r_1^p = 2a \tag{27}$$

$$r_{25}^p = g(m,n) \tag{28}$$

$$r_3^p = b \tag{29}$$

因此，在式(27)有解的同时，式(28)也同时有解。设 r_{25} 是式(28)所有解中的最小解。

从式(26)可知，p 不整除 $f(a,b)$，p 不整除 $g(a,b)$。因为

$(a,f(a,b))=1,(b,g(a,b))=1$,由式(26)可有

$$r_1^p=2a \tag{30}$$

$$r_2^p=f(a,b) \tag{31}$$

$$r_3^p=b \tag{32}$$

$$r_4^p=g(a,b) \tag{33}$$

于是,从式(33)可以得出,(a,b,r_4)也是式(28)的解。由式(28),(33)可有

$$r_{25}^p=g(m,n)>r_4^p=g(a,b) \tag{34}$$

$$r_{25}>r_4$$

② 在p不整除a,p整除b时,从式(18)可知,p整除$g(m,n)$。因为$(a,g(m,n))=1$,$(b,g(m,n))=p$,由式(18)可有

$$r_5^p=2a \tag{35}$$

$$pr_{26}^p=g(m,n) \tag{36}$$

$$r_7^p=pb \tag{37}$$

因此,在式(35)有解的同时,式(36)也同时有解。设r_{26}是式(36)所有解中的最小解。这里,式(36)实际上就是$r_{26}^p=g(m,n)/p$。以下类似的,也是如此。

从式(26)可知,p不整除$f(a,b)$,p整除$g(a,b)$。因为$(a,f(a,b))=1,(b,g(a,b))=p$,由式(26)可有

$$r_5^p=2a \tag{38}$$

$$r_6^p=f(a,b) \tag{39}$$

$$r_7^p=pb \tag{40}$$

$$pr_8^p=g(a,b) \tag{41}$$

于是,从式(41)可以得出,(a,b,r_8)也是式(36)的解。由式(36),(41)可有

$$pr_{26}^p=g(m,n)>pr_8^p=g(a,b) \tag{42}$$

$$r_{26}>r_8$$

③ 在p整除a,p不整除b时,从式(18)可知,p整除$g(n,m)$。

因为$(a,g(n,m))=p$，$(b,g(n,m))=1$，由式(18)可有

$$r_9^p=2pa \tag{43}$$

$$pr_{27}^p=g(n,m) \tag{44}$$

$$r_{11}^p=b \tag{45}$$

因此，在式(43)有解的同时，式(44)也同时有解。设r_{27}是式(44)所有解中的最小解。

从式(26)可知，p整除$f(a,b)$，p不整除$g(a,b)$。因为$(a,f(a,b))=p$，$(b,g(a,b))=1$，由式(26)可有

$$r_9^p=2pa \tag{46}$$

$$pr_{10}^p=f(a,b) \tag{47}$$

$$r_{11}^p=b \tag{48}$$

$$r_{12}^p=g(a,b) \tag{49}$$

于是，从式(47)可以得出，(a,b,r_{10})也是式(44)的解。由式(44)，(47)可有

$$pr_{27}^p=g(n,m)>pr_{10}^p=f(a,b) \tag{50}$$

$$r_{27}>r_{10}$$

(4) 在a为奇数，b为偶数时，分别有

① 在p不整除ab时，从式(18)可知，p不整除$g(m,n)$。因为$(2ab,g(m,n))=1$，由式(18)可有

$$r_{13}^p=2b \tag{51}$$

$$r_{28}^p=g(m,n) \tag{52}$$

$$r_{15}^p=a \tag{53}$$

因此，在式(51)有解的同时，式(52)也同时有解。设r_{28}是式(52)所有解中的最小解。

从式(26)可知，p不整除$f(a,b)$，p不整除$g(a,b)$。因为$(a,f(a,b))=1$，$(b,g(a,b))=1$，由式(26)可有

$$r_{13}^p=2b \tag{54}$$

$$r_{11}^p=g(a,b) \tag{55}$$

$$r_{15}^{p} = a \tag{56}$$

$$r_{16}^{p} = f(a,b) \tag{57}$$

于是,从式(55)可以得出,(a,b,r_{14})也是式(52)的解。由式(52),(55)可有

$$r_{28}^{p} = g(m,n) > r_{14}^{p} = g(a,b) \tag{58}$$

$$r_{28} > r_{14}$$

② 在p整除a,p不整除b时,从式(18)可知,p整除$g(n,m)$。因为$(a,g(n,m)) = p$,$(b,g(n,m)) = 1$,由式(18)可有

$$r_{17}^{p} = 2b \tag{59}$$

$$pr_{29}^{p} = g(n,m) \tag{60}$$

$$r_{19}^{p} = pa \tag{61}$$

因此,在式(59)有解的同时,式(60)也同时有解。设r_{29}是式(60)所有解中的最小解。

从式(26)可知,p整除$f(a,b)$,p不整除$g(a,b)$。因为$(a,f(a,b)) = p$,$(b,g(a,b)) = 1$,由式(26)可有

$$r_{17}^{p} = 2b \tag{62}$$

$$r_{18}^{p} = g(a,b) \tag{63}$$

$$r_{19}^{p} = pa \tag{64}$$

$$pr_{20}^{p} = f(a,b) \tag{65}$$

于是,从式(65)可以得出,(a,b,r_{20})也是式(60)的解。由式(60),(65)可有

$$pr_{29}^{p} = g(n,m) > pr_{20}^{p} = f(a,b) \tag{66}$$

$$r_{29} > r_{20}$$

③ 在p不整除a,p整除b时,从式(18)可知,p整除$g(m,n)$。因为$(a,g(m,n)) = 1$,$(b,g(m,n)) = p$,由式(18)可有

$$r_{21}^{p} = 2pb \tag{67}$$

$$pr_{30}^{p} = g(m,n) \tag{68}$$

$$r_{23}^{p} = a \tag{69}$$

因此，在式(67) 有解的同时，式(68) 也同时有解。设 r_{30} 是式(68) 所有解中的最小解。

从式(26) 可知，p 不整除 $f(a,b)$，p 整除 $g(a,b)$。因为 $(a, f(a,b)) = 1$，$(b, g(a,b)) = p$，由式(26) 可有

$$r_{21}^{p} = 2pb \tag{70}$$

$$pr_{22}^{p} = g(a,b) \tag{71}$$

$$r_{23}^{p} = a \tag{72}$$

$$r_{24}^{p} = f(a,b) \tag{73}$$

于是，从式(71) 可以得出，(a,b,r_{22}) 也是式(68) 的解。由式(68)，(71) 可有

$$pr_{30}^{p} = g(m,n) > pr_{22}^{p} = g(a,b) \tag{74}$$

$$r_{30} > r_{22}$$

(5) 根据式(34)，(42)，(50)，(58)，(66)，(74) 的结论，这与假设 $r_{25}, r_{26}, r_{27}, r_{28}, r_{29}, r_{30}$ 分别是一个最小解相矛盾。因此，在式(27)，(35)，(43)，(51)，(59)，(67) 分别有解的同时，式(28)，(36)，(44)，(52)，(60)，(68) 分别无解。于是，在式(9) 有解的同时，式(8) 无解，进而式(6) 无解，式(1) 也无解，费尔马大定理成立。

这种证明方法是 1995 年 5 月 28 日最终得出的。其中，证明方程(6) 无解的方法是 1990 年 1 月 12 日得出的。

2. 第二种方法

在 $p > 3, x, y, z$ 彼此互素时，设方程

$$x^{p} + y^{p} = z^{p} \tag{1}$$

的解为 (x,y,z)。于是，可有

(1) 在 z 为偶数时，设 $x = a + b, y = a - b$。由式(1) 可有

$$z^{p} = (a+b)^{p} + (a-b)^{p} = 2a \cdot f(a,b) \tag{2}$$

这里，$a > b > 0$，$(a,b) = 1$，a 为偶数，b 为奇数；$(2a, f(a,b)) = 1$ 或 p。

① 在 p 不整除 ab 时，因为 $(2a, f(a,b)) \neq 1$，由式(2) 可有

$$z_1^p = 2a \tag{3}$$

$$z_2^p = f(a,b) \tag{4}$$

② 在 p 不整除 a，p 整除 b 时，因为 $(2a, f(a,b)) = 1$，由式(2) 可有

$$z_3^p = 2a \tag{5}$$

$$z_4^p = f(a,b) \tag{6}$$

③ 在 p 整除 a，p 不整除 b 时，因为 $(2a, f(a,b)) = p$，由式(2) 可有

$$z_5^p = 2pa \tag{7}$$

$$pz_6^p = f(a,b) \tag{8}$$

(2) 在 x 为偶数时，设 $z = a+b, y = a-b$。由式(1) 可有

$$x^p = (a+b)^p - (a-b)^p = 2b \cdot g(a,b) \tag{9}$$

这里，$a > b > 0$，$(a,b) = 1$，a 为奇数，b 为偶数；$(2b, g(a,b)) = 1$ 或 p。

① 在 p 不整除 ab 时，因为 $(2b, g(a,b)) = 1$，由式(9) 可有

$$x_1^p = 2b \tag{10}$$

$$x_2^p = g(a,b) \tag{11}$$

② 在 p 整除 a，p 不整除 b 时，因为 $(2b, g(a,b)) = 1$，由式(9) 可有

$$x_3^p = 2b \tag{12}$$

$$x_4^p = g(a,b) \tag{13}$$

③ 在 p 不整除 a，p 整除 b 时，因为 $(2b, g(a,b)) = p$，由式(9) 可有

$$x_5^p = 2pb \tag{14}$$

$$px_6^p = g(a,b) \tag{15}$$

根据定理 2，方程(1) 最多有有限组解，所以在式(3)，(5)，(7)，(10)，(12) (14) 分别有解的同时，式(4)，(6)，(8)，(11)，(13)，(15)

分别最多有有限组解。

在 $p>3,r,s,t$ 彼此互素，r 为偶数时，设方程

$$r^{2p}+s^{2p}=t^{2p} \tag{16}$$

的解为(r,s,t)。

(1) 方程(16) 可为

$$(r^p)^2+(s^p)^2=(t^p)^2 \tag{17}$$

根据定理 1，式(17) 的解为

$$r^p=2uv \tag{18}$$

$$s^p=u^2-v^2 \tag{19}$$

$$t^p=u^2+v^2 \tag{20}$$

这里，$u>v>0,(u,v)=1,uv$ 为偶数。同时，式(19) 的解为

$$u=a\cdot f(a,b) \tag{21}$$

$$v=b\cdot g(a,b) \tag{22}$$

$$s=a^2-b^2 \tag{23}$$

这里，$a>b>0,(a,b)=1,ab$ 为偶数。由式(18)，(21)，(22) 可有

$$r^p=2ab\cdot f(a,b)\cdot g(a,b) \tag{24}$$

这里，$(a,f(a,b))=1$ 或 $p,(b,g(a,b))=1$ 或 p。因此，在式(19) 有解的同时，式(18) 也同时有解。

(2) 方程(16) 还可为

$$(s^2)^p=(t^p)^2-(r^p)^2 \tag{25}$$

式(25) 的解为

$$r^p=n\cdot g(m,n) \text{ 或 } n\cdot g(n,m) \tag{26}$$

$$s^2=m^2-n^2 \tag{27}$$

$$t^p=m\cdot f(m,n) \text{ 或 } m\cdot f(n,m) \tag{28}$$

这里，$m>n>0,(m,n)=1,m$ 为奇数，n 为偶数；$(m,f(m,n))=1$ 或 $p,(n,g(m,n))=1$ 或 p。

根据定理 1，由式(23)，式(27) 的解为

$$m=a^2+b^2 \tag{29}$$

$$n = 2ab \tag{30}$$

$$s = a^2 - b^2 \tag{31}$$

由式(26),(30)可有

$$r^p = 2ab \cdot g(m,n) \text{ 或 } 2ab \cdot g(n,m) \tag{32}$$

(3)在a为偶数,b为奇数时,分别有

①在p不整除ab时,从式(24)可知,p不整除$f(a,b)$,p不整除$g(a,b)$。因为$(a,f(a,b))=1$,$(b,g(a,b))=1$,由式(24)可有

$$r_1^p = 2a \tag{33}$$

$$r_2^p = f(a,b) \tag{34}$$

$$r_3^p = b \tag{35}$$

$$r_4^p = g(a,b) \tag{36}$$

因为式(33),(34)分别与式(3),(4)相同,所以$r_1 = z_1$,$r_2 = z_2$。于是,在式(33)有解的同时,式(34)最多有有限组解。设r_2是式(34)所有解中的最大解。

从式(32)可知,p不整除$g(n,m)$。因为$(2ab,g(n,m))=1$,由式(32)可有

$$r_1^p = 2a \tag{37}$$

$$r_{25}^p = g(n,m) \tag{38}$$

$$r_3^p = b \tag{39}$$

于是,从式(38)可以得出,(n,m,r_{25})也是式(34)的解。由式(34),(38)可有

$$r_2^p = f(a,b) < r_{25}^p = g(n,m) \tag{40}$$

$$r_2 < r_{25}$$

②在p不整除a,p整除b时,从式(24)可知,p不整除$f(a,b)$,p整除$g(a,b)$。因为$(a,f(a,b))=1$,$(b,g(a,b))=p$,由式(24)可有

$$r_5^p = 2a \tag{41}$$

$$r_6^p = f(a,b) \tag{42}$$

$$r_7^p = pb \tag{43}$$

$$pr_8^g = g(a,b) \tag{44}$$

因为式(41),(42)分别与式(5),(6)相同,所以 $r_5 = z_3, r_6 = z_4$。于是,在式(41)有解的同时,式(42)最多有有限组解。设 r_6 是式(42)所有解中的最大解。

从式(28)可知,p 不整除 m,p 不整除 $f(m,n)$。因为 $(m, f(m,n)) = 1$,由式(28)可有

$$t_1^p = m \tag{45}$$

$$t_2^p = f(m,n) \tag{46}$$

于是,从式(46)可以得出,(m,n,t_2) 也是式(42)的解。由式(42),(46)可有

$$r_6^g = f(a,b) < t_2^p = f(m,n) \tag{47}$$

$$r_6 < t_2$$

③ 在 p 整除 a,p 不整除 b 时,从式(24)可知,p 整除 $f(a,b)$,p 不整除 $g(a,b)$。因为 $(a, f(a,b)) = p$, $(b, g(a,b)) = 1$,由式(24)可有

$$r_9^p = 2pa \tag{48}$$

$$pr_{10}^p = f(a,b) \tag{49}$$

$$r_{11}^p = b \tag{50}$$

$$r_{12}^p = g(a,b) \tag{51}$$

因为式(48),(49)分别与式(7),(8)相同,所以 $r_9 = z_5, r_{10} = z_6$。于是,在式(48)有解的同时,式(49)最多有有限组解。设 r_{10} 是式(49)所有解中的最大解。

从式(32)可知,p 整除 $g(n,m)$。因为 $(2ab, g(n,m)) = p$,由式(32)可有

$$r_9^g = 2pa \tag{52}$$

$$pr_{26}^p = g(n,m) \tag{53}$$

$$r_{11}^p = b \tag{54}$$