非凡图书

龚冬保教授考研数学

2006版

数学考研

数学一

根据2006年考研大纲全新编写

模拟考试试卷

龚冬保 主编

10套题

赠答题卡

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

龚冬保教授数学考研系列

数学考研

2006 版

模拟考试试卷

数学一

（共 10 套，附解答与评分参考）

主编　龚冬保

王寿生　褚维盘　魏战线（高等数学）

崔荣泉（线性代数）　周家良（概率统计）

西安交通大学出版社

·西安·

图书在版编目(CIP)数据
数学考研模拟考试试卷(数学一)2006 版 / 龚冬保主编. —西安:西安交通大学出版社,2005.10
ISBN 7-5605-1591-6

Ⅰ. 数... Ⅱ. 龚... Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 082616 号

书　　名　数学考研模拟考试试卷(数学一)2006 版
主　　编　龚冬保
出版发行　西安交通大学出版社
地　　址　西安市兴庆南路 25 号(邮编:710049)
电　　话　(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷　西安新视点印务有限责任公司
字　　数　188 千字
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　8
版　　次　2005 年 10 月第 4 版　2005 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 7-5605-1591-6 / O・191
定　　价　48.00(本卷 12.00 元)

龚冬保教授重要提示

本模拟试卷是在分析历年考卷基础上，严格按《2006年数学考试大纲》的要求，以及新的试卷模式来编制的。为更好地发挥它们的作用，特作以下提示：

1. 考前演习为实战　模拟试卷认真练

一定要按考试的要求，像考试那样去做每一套模拟试卷。比如控制时间，可用闹钟定时到10：45，而于8：00打开试卷开始“考试”，闹铃响时便“交卷”。稍后对照着“解答与评分参考”为自己评分并作小结。

对自己所考的10套模拟卷，至少隔3天，最多隔一周做上一套，效果比连续做要好。

2. 数学一二三四卷　卷卷不漏为求全

比如考数学一的读者，除了像考试一样做相关的10套题之外，还应当练一练数学二、三、四各模拟试卷中与数学一考试内容相关的题。因为尽管我们编写的各模拟题力求全面覆盖各考点和解题方法，但10套试卷题量有限，难免还有遗漏，参考一下其余试卷，可以扩大覆盖面。

3. 做题做到巧准快　总结要求精细全

做每道题都要想巧妙的方法，在不出错的前提下快速完成，这是巧准快的意思。每做完一套试卷后，要认真总结分析，对于不会做的题检查存在哪些未复习到的知识空白；对于做错的题，检查错在哪里：概念？方法？还是运算？对于做对的题，总结一下还有没有更好的方法，更快的途径。为此，我们特为设计了总结记录表，希望认真分析并记录。这是精细全的方法。

4. 知己知彼信心增　沉着应试展才能

每做一套模拟题后，不仅要作解题方法方面的总结，还要从应试策略方面不断做调整。从2004年起试卷模式上的重大变化是客观题占56分。因此，加强基本运算能力，训练用最简洁的步骤做填空题；加强对基本概念的理解，用最灵活的方法做选择题，力争在60分钟内将这56分拿到手。作解答题时，要坚持先易后难的原则，即先做那些感到熟悉的、容易得分的题，后做甚至可以不做自己觉得难的个别题。也可以考虑先做概率统计的题，再作线性代数题，尤其是数学三、四的试卷中，这两部分解答题占52分，仅有4道题，一般说难度不大。熟悉这些内容的考生很容易获得这52分，加上客观题共有108分之多！我们模拟试卷估计会比正式考题难些，考前像正式考试一样去做这些题，正式考时，像平时作模拟题一样的心态去应试，方能胸有成竹。模拟题定能助你超水平发挥，充分展示你的才能，考出理想成绩。

最后，我们强调要反复做模拟题，从做第二遍起，要把练习基本功作为重点，对会做的题一定要一遍做对，不断总结不丢分和多得分的应试策略，这对模拟题做得“不太好”数学基础差的考生尤为重要，只要会做基本题，临场不慌不乱，也是能考出理想成绩的。

考研成功！

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 1	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 2	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 3	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 4	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 5	做题记录： 月 日；用时： 小时 分；得分： 分
存在问题总结：	
试卷 6	做题记录： 月 日；用时： 小时 分；得分： 分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 7	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 8	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 9	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	
试卷 10	做题记录：　　月　　日；用时：　　小时　　分；得分：　　分
存在问题总结：	

数学考研模拟考试试卷 1

数 学 一

考生注意：(1) 本试卷共三大题，23 小题，满分 150 分.
(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

题号	一						二								三									合计
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分																								

一、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分)

(1) 设 $f(x+1)=2^{x^2+2x}-x$. 则 $f(x-1)=$ ________.

(2) 若 $f'(\sin x)=\sin 3x$. 则 $f''(x)=$ ________.

(3) 与直线 $L_1: x=1,\ y=t-1,\ z=t+2$ 及 $L_2: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 均平行且过原点的平面方程为________.

(4) 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是三元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个线性无关的解向量，则 $r(\boldsymbol{A})=$ ________.

(5) 设 $P(A)=1, P(B)=0.7$，则 $P(AB)=$ ________.

(6) 已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & 0<y<x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 $P\{X>5 \mid Y\leqslant 3\}=$ ________.

二、选择题(本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分)

(7) 设 $\{x_n\}$ 是无界的数列，$\{y_n\}$ 是无穷大量，$\{z_n\}$ 是无穷小量. 则以下结论中正确的是(　).

(A) $\{x_n+y_n+z_n\}$ 是无界数列

(B) $\left\{x_n+\dfrac{1}{y_n}+z_n\right\}$ 是无界数列

(C) $\{x_n + \frac{1}{z_n}\}$ 是无界变量

(D) $\{\frac{1}{x_n + y_n} + z_n\}$ 是无穷小量

(8) 设 $f(x) = \begin{cases} -x-2, & x < -2 \\ \frac{1}{2}x^2 + x, & |x| \leqslant 2 \\ 2x+1, & x > 2 \end{cases}$,则 $f(x)$ 在 $x = \pm 2$ 的左、右导数中有( ).

(A) $f'_+(2) = \infty$　　(B) $f'_-(2) = \infty$　　(C) $f'_+(-2) = \infty$　　(D) $f'_-(-2) = \infty$

(9) 级数 $J_1 = \sum_{n=2}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$; $J_2 = \sum_{n=2}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1-x}\mathrm{d}x$,则( ).

(A) J_1 收敛,J_2 发散　　(B) J_1 发散,J_2 收敛

(C) 两级数皆收敛　　(D) 两级数皆发散

(10) 设 $f'_x(0,0) = 1$, $f'_y(0,0) = 2$. 则( ).

(A) $\mathrm{d}f(x,y)\Big|_{(0,0)} = \mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y$.

(B) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

(C) $f(x,y)$ 在原点沿 $\{0,1\}$ 方向导数等于 1.

(D) $f(x,y)$ 在原点沿 $\{0,-1\}$ 方向导数为 -2.

(11) 已知某二阶线性非齐次方程的三个特解为 $y_1 = x^2 + x$, $y_2 = 3e^x + x^2$, $y_3 = 2x - e^x + x^2$. 则此方程满足 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的特解是 $y =$ ( ).

(A) $e^x + x - 1 + x^2$　　(B) $x + x^2$　　(C) $e^x - 1 + x^2$　　(D) $x - x^2$

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n \times m$ 矩阵,$m \neq n$. 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$,则必有( ).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量线性相关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量线性相关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量线性相关

(D) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量线性相关

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}$ 均是 3 维向量,下列命题正确的是( ).

① 若 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性相关.

② 若 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性无关.

③ 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

④ 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(A) ①②　　(B) ①③　　(C) ①④　　(D) ②④

(14) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,且 $EX = \mu, DX = 2$,则下列结论正确的是( ).

(A) $\overline{X}$ 是 μ 的最大似然估计

(B) $(\overline{X})^2$ 是 μ^2 的无偏估计

(C) $P\{|\overline{X} - \mu| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{2}{n\varepsilon^2}$

(D) $\frac{\sum_{i=1}^{\infty}(\overline{X} - X_i)^2}{2} = \chi^2(n)$.

三、解答题(本题共 9 小题,总分 94 分)

(15)(本题满分 12 分) 设 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$,求 $y^{(n)}(0)$.

(16)(本题满分 12 分) 设 $a_n=\int_0^{n\pi}x\,|\sin x|\,\mathrm{d}x$. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}-\dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)$ 的和 S.

(17)（本题满分 12 分） 火箭从地面铅直向上发射，燃料的排气速率为 a kg/s（a 是正常数）. 排出气体相对火箭的速率为 b m/s. 若不计空气阻力，并设开始发射时火箭质量为 M_0. 求火箭飞行速度、高度与时间 t 的关系。

(18)（本题满分 12 分） 设一长度为 1 的非均匀细棒，其上一点 $x \in [0,1]$ 处的线密度分布函数 $\mu = f(x)$，满足关系式：$f(0) = 0, f'(1) = 1$，当 $u = f(xyz)$ 时，$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = x^2 y^2 z^2 f'''(xyz)$. 求此细棒的质心.

（19）**（本题满分 10 分）**设 $f(u)$ 连续，计算积分

$$I=\int_{C}\frac{1+y^{2}f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^{2}}[y^{2}f(xy)-1]\mathrm{d}y.$$

其中 C 是抛物线 $y=-\frac{1}{6}(x^{2}-13)$ 从 $(1,2)$ 至 $\left(3,\frac{2}{3}\right)$ 的弧段.

（20）**（本题满分 9 分）**设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为 n 维列向量，证明方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 一定有解.

（21）（本题满分 9 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+bx_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+2ax_2x_3(a>0)$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化成的标准形为

$$f=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2.$$

求常数 a、b 及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

（22）（本题满分 9 分）已知二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}cx\mathrm{e}^{-x(1+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求（Ⅰ）c 的值；

（Ⅱ）关于 X,Y 的边缘概率密度，并判断 X、Y 是否独立；

（Ⅲ）$z=\max(X,Y)$ 的概率密度.

（**23**）（**本题满分 9 分**）设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{Q\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{Q^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

Q 是未知正参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，试求 Q 的矩估计量和最大似然估计量.

试卷(一)解答与评分参考

一、填空题

(1) $\underline{\quad 2^{x^2-2x}-x+2 \quad}$. 由 $f(x+1)=2^{(x+1)^2-1}-(x+1)+1$ 得 $f(t)=2^{t^2-1}-t+1$. 令 $t=x-1$ 得 $f(x-1)=2^{x^2-2x}-x+2$.

(2) $\underline{\quad 3-12x^2(|x|\leqslant 1,\text{不写此定义域不扣分}) \quad}$.

由 $f'(\sin x)=\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, 得 $f'(t)=3t-4t^3$. $|t|\leqslant 1$. 故 $f''(x)=3-12x^2$, $|x|\leqslant 1$.

(3) $\underline{\quad x-y+z=0 \quad}$. $\{1,2,1\}\times\{0,1,1\}=\{1,-1,1\}$ 是所求平面的法向量, 故平面方程为 $x-y+z=0$.

(4) $\underline{\quad 1 \quad}$. 因为 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$, 又 $\xi_1-\xi_2$ 与 $\xi_1-\xi_3$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解. 故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$, 从而 $r(\boldsymbol{A})=1$.

(5) $\underline{\quad 0.7 \quad}$. 由 $P(A)=1$, 得 $P(\bar{A})=0$, 于是

$0\leqslant P(\bar{A}\bar{B})\leqslant P(\bar{A})=0$, $P(\bar{A}\bar{B})=0$. 故

$P(AB)=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-[P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})]=0.7$.

(6) $\underline{\quad \dfrac{3\mathrm{e}^{-5}}{1-\mathrm{e}^{-3}} \quad}$. $P\{X>5\mid Y\leqslant 3\}=\dfrac{P\{X>5,Y\leqslant 3\}}{P\{X\leqslant 3\}}=\dfrac{\int_0^3 \mathrm{d}y\int_5^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\int_0^3\mathrm{d}y\int_y^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}=\dfrac{3\mathrm{e}^{-5}}{1-\mathrm{e}^{-3}}$.

二、选择题

(7) (B). 由 $\dfrac{1}{y_n}$ 是无穷小知, $\dfrac{1}{y_n}+z_n\to 0$. 因此, 对任意 $M>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时有 $\left|\dfrac{1}{y_n}+z_n\right|<1$, 及 $n_0>N$ $|x_{n_0}|>M+1$. 于是有 $\left|x_{n_0}+\dfrac{1}{y_{n_0}}+z_{n_0}\right|>|x_{x_0}|-\left|\dfrac{1}{y_n}+z_n\right|>M$ 成立. 故(B)正确.

注 令 $x_n=-n$, $y_n=n$, 可知(A)、(D)不正确; 令 $z_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$, 知(C)不正确(此时 $z_{2n-1}=0$, $1/z_{2n-1}$ 无意义). 无穷小量的倒数是无穷大量的说法一定要加上“不取 0 值的无穷小量”才是正确的.

(8) (A). 由 $f(2)=4$, $f'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x-3}{x-2}=\infty$. 选(A).

注 在 $x=-2$ 处 $f(x)$ 连续, 这时 $f'_-(-2)=-1$; $f'_+(-2)=-2$; $f'_-(2)=2$.

(9) (C). 显然 $\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1\pm x}\mathrm{d}x>0$. $(n=2,3,\cdots)$. 令 $\dfrac{1}{n}=t$ 则

$$\lim_{n\to\infty}n^p\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1\pm x}\mathrm{d}x=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t\frac{\sqrt{x}}{1\pm x}\mathrm{d}x}{t^p}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{\sqrt{t}}{1\pm t}}{pt^{p-1}}=\frac{1}{p}.$$

$p=\dfrac{3}{2}>1$, 由 $p-$ 判别法, 两个级数皆收敛, 选(C).

(10) (D). 本题概念性强, 请读者总结.