



非凡图书

龚冬保教授考研数学

2006 版

数学 考研 数学四

根据 2006 年考研大纲全新编写

模拟考试试卷

龚冬保 主编

10 套题

赠答疑卡



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

龚冬保教授数学考研系列



2006 版

模拟考试试卷

数学四

(共 10 套,附解答与评分参考)

主编 龚冬保

王寿生 褚维盘 魏战线 (高等数学)

崔荣泉 (线性代数) 周家良 (概率统计)

西安交通大学出版社

· 西安 ·

图书在版编目(CIP)数据
数学考研模拟考试试卷(数学四)2006版 / 龚冬保主
编. — 西安:西安交通大学出版社,2005.10
ISBN 7-5605-1591-6

I. 数... II. 龚... III. 高等数学-研究生-入学
考试-试题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 082616 号

书 名 数学考研模拟考试试卷(数学四)2006 版
主 编 龚冬保
出版发行 西安交通大学出版社
地 址 西安市兴庆南路 25 号(邮编:710049)
电 话 (029)82668357 82667874(发行部)
(029)82668315 82669096(总编办)
印 刷 西安市新城区兴庆印刷厂
字 数 188 千字
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 8
版 次 2005 年 10 月第 4 版 2005 年 10 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 7-5605-1591-6 / O·191
定 价 48.00(本卷 12.00 元)

版权所有 侵权必究

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

龚冬保教授重要提示

本模拟试卷是在分析历年考卷基础上,严格按《2006年数学考试大纲》的要求,以及新的试卷模式来编制的。为更好地发挥它们的作用,特作以下提示:

1. 考前演习为实战 模拟试卷认真练

一定要按考试的要求,像考试那样去做每一套模拟试卷。比如控制时间,可用闹钟定时到10:45,而于8:00打开试卷开始“考试”,闹铃响时便“交卷”。稍后对照着“解答与评分参考”为自己评分并作小结。

对自己所考的10套模拟卷,至少隔3天,最多隔一周做上一套,效果比连续做要好。

2. 数学一二三四卷 卷卷不漏为求全

比如考数学一的读者,除了像考试一样做相关的10套题之外,还应当练一练数学二、三、四各模拟试卷中与数学一考试内容相关的题。因为尽管我们编写的各模拟题力求全面覆盖各考点和解题方法,但10套试卷题量有限,难免还有遗漏,参考一下其余试卷,可以扩大覆盖面。

3. 做题做到巧准快 总结要求精细全

做每道题都要想巧妙的方法,在不出错的前提下快速完成,这是巧准快的意思。每做完一套试卷后,要认真总结分析,对于不会做的题检查存在哪些未复习到的知识空白;对于做错的题,检查错在哪里:概念?方法?还是运算?对于做对的题,总结一下还有没有更好的方法,更快的途径。为此,我们特为设计了总结记录表,希望认真分析并记录。这是精细全的方法。

4. 知己知彼信心增 沉着应试展才能

每做一套模拟题后,不仅要作解题方法方面的总结,还要从应试策略方面不断做调整。从2004年起试卷模式上的重大变化是客观题占56分。因此,加强基本运算能力,训练用最简洁的步骤做填空题;加强对基本概念的理解,用最灵活的方法做选择题,力争在60分钟内将这56分拿到手。作解答题时,要坚持先易后难的原则,即先做那些感到熟悉的、容易得分的题,后做甚至可以不做自己觉得难的个别题。也可以考虑先做概率统计的题,再作线性代数题,尤其是数学三、四的试卷中,这两部分解答题占52分,仅有4道题,一般说难度不大。熟悉这些内容的考生很容易获得这52分,加上客观题共有108分之多!我们模拟试卷估计会比正式考题难些,考前像正式考试一样去做这些题,正式考时,像平时作模拟题一样的心态去应试,方能胸有成竹。模拟题定能助你超水平发挥,充分展示你的才能,考出理想成绩。

最后,我们强调要反复做模拟题,从做第二遍起,要把练习基本功作为重点,对会做的题一定要一遍做对,不断总结不丢分和多得分的应试策略,这对模拟题做得“不太好”数学基础差的考生尤为重要,只要会做基本题,临场不慌不乱,也是能考出理想成绩的。

考研成功!

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 1 做题记录： 月 日；用时： 小时 分；得分： 分

存在问题总结：

试卷 2 做题记录： 月 日；用时： 小时 分；得分： 分

存在问题总结：

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 3 做题记录： 月 日；用时： 小时 分；得分： 分

存在问题总结：

试卷 4 做题记录： 月 日；用时： 小时 分；得分： 分

存在问题总结：

数学考研模拟考试总结记录表

| | |
|---------|--------------------------|
| 试卷 5 | 做题记录： 月 日；用时： 小时 分；得分： 分 |
| 存在问题总结： | |
| 试卷 6 | 做题记录： 月 日；用时： 小时 分；得分： 分 |
| 存在问题总结： | |

数学考研模拟考试总结记录表

试卷 7 做题记录： 月 日；用时： 小时 分；得分： 分

存在问题总结：

试卷 8 做题记录： 月 日；用时： 小时 分；得分： 分

存在问题总结：

数学考研模拟考试总结记录表

| | |
|---------|--------------------------|
| 试卷 9 | 做题记录： 月 日；用时： 小时 分；得分： 分 |
| 存在问题总结： | |
| 试卷 10 | 做题记录： 月 日；用时： 小时 分；得分： 分 |
| 存在问题总结： | |



数学考研模拟考试试卷

1

数 学 四

考生注意:(1) 本试卷共三大题,23 小题,满分 150 分.

(2) 本试卷考试时间为 180 分钟.

| 题号 | 一 | | | | | | 二 | | | | | | | | 三 | | | | | | | | 合计 | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | | 23 |
| 得分 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 已知 $\int e^{-x} f(x) dx = \arctan e^x + C$, 那么 $\int f(x) dx =$ _____.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{\cos x})^{\csc^2 x} =$ _____.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3 + 1} + \frac{2^2}{n^3 + 2} + \dots + \frac{n^2}{n^3 + n} \right) =$ _____.

(4) 设 A 为 3 阶矩阵, 且 $|E + A| = |2E + A| = |3E + 2A| = 0$, 则 $|3E - 2A^*| =$ _____.

(5) 设 $P(A) = 1, P(B) = 0.7$, 则 $P(AB) =$ _____.

(6) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且都服从区间 $[-1, 1]$ 上的均匀分布则 $E|X - Y| =$ _____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0 \\ ae^x + be^{-x}, & x \leq 0 \end{cases}$ 处处可导, 则().

(A) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$

(B) $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$

(C) $a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{4}$

(D) $a = 1, b = 0$

(8) 设 $f(x)$ 在 $(a-1, a+1)$ 内可导, 且 $f'(x)$ 在 $x = a$ 连续, 及 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = 2$, 则().

- (A) $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值
 (B) $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极大值
 (C) $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 (D) $f(x)$ 在 $(a-1, a+1)$ 是单调函数

(9) 设 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x < 0 \\ \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$, 则().

- (A) $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导
 (B) $F(x)$ 在 $x=0$ 不连续
 (C) $x=1$ 是 $F(x)$ 的极值点
 (D) $F(\pi) = 3\frac{2}{3}$

(10) 设 $(axy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2) dy = du(x, y)$, 则().

- (A) $a = -2, b = 2$
 (B) $a = 2, b = -2$
 (C) $a = -3, b = 3$
 (D) $a = 3, b = -3$

(11) 已知某一阶线性微分方程有两个特解: $y = 2\sin x + x \cos x$ 及 $y = x \cos x - \sin x$, 则此方程是().

- (A) $y' \sin x - y \cos x = x \sin x \cos x$
 (B) $y' - y \cos x = \cos x - x$
 (C) $y' \sin x - y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x - x$
 (D) $y' - y \cos x = \sin x - x$

(12) 与矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 相似的矩阵是().

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
 (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
 (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(13) 设 A 为 n 阶矩阵, $r(A) = n-1$, 则 $r[(A^*)^*] =$ ().

- (A) n
 (B) $n-1$
 (C) 1
 (D) 0

(14) 连续型随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$, Y 的分布律为

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| Y | 1 | 4 | 8 |
| p | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

且 X, Y 相互独立, 则随机变量 $Z = \frac{X}{Y}$ 的分布函数().

- (A) 是连续函数
 (B) 是阶梯函数
 (C) 恰有一个间断点
 (D) 恰有两个间断点

三、解答题(本题共 9 小题, 总分 94 分)

(15) (本题满分 9 分) 计算 $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 2}} dx$.

(16) (本题满分 8 分) 某种商品的需求量 Q 是单价 P (单位元) 的函数, $Q = 12000 - 8P$, 商品的总成本 $C = 25000 + 50Q$; 每件商品税费 2 元, 求使销售利润最大的商品单价和最大利润额.

(17) (本题满分 8 分) 设 $f(x)$ 可微, 且 $f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$. 求 $x^2 z'_x + y^2 z'_y$.

(18) (本题满分9分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上可微, 且 $f(1) = 3 \int_{1/3}^{2/3} \frac{f(x)}{x} dx$ 证明存在 $\xi \in (0, 1)$ 使 $\xi f'(\xi) = f(\xi)$.

(19) (本题满分8分) 计算二重积分 $I = \iint_D \sin(x+y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq \pi\}$.

(20) (本题满分 13 分) 求一正交矩阵 Q , 将对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 化为相似的对角

矩阵: $B = Q^{-1}AQ$.

(21) (本题满分 13 分) 已知向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, a_1 \neq 0, A = \alpha\alpha^T$

(i) 求方程组 $Ax = 0$ 的通解;

(ii) 求 A 的非零特征值与对应的特征向量.

(22) (本题满分 13 分) 已知二维随机变量的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx e^{-x(1+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求(i)C 的值;

(ii) 关于 X, Y 的边缘概率密度, 并判断 X, Y 是否独立;

(iii) $Z = \max(X, Y)$ 的概率密度.

(23) (本题满分 13 分) 袋中装有 50 枚正品硬币, 50 枚次品硬币(次品硬币的两面都印有国徽)

(1) 从袋中任取一枚硬币, 将它投掷三次, 已知每次都出现国徽, 问这枚硬币是正品的概率为多少?

(2) 若在袋中任取一枚硬币, 将它投掷 k 次 ($k \geq 1$), 问至少出现一次国徽的概率为多少?

试卷(一) 解答与评分参考

一、填空题

(1) $\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$. 由所给等式两边求导得 $e^{-x}f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$, 故

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}, \int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C.$$

(2) $e^{-\frac{1}{4}}$. 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{2\sin^2 x} \ln(1+\cos x - 1)} = e^{-\frac{1}{4}}$

(3) $\frac{1}{3}$. 此极限 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

(4) -126 . 由已知等式知 $1, -2$ 和 $-\frac{3}{2}$ 是 A 的三个特征值, 故 A 可相似对角化: $A =$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} P. \quad |A| = 3. \text{ 故由 } A^* = |A| A^{-1} \text{ 知 } A^* \text{ 的特征值为 } 3, -\frac{3}{2}, -2,$$

$$|3E - 2A^*| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -126.$$

(5) 0.7 . $P(A) = 1$, 则 $P(\bar{A}) = 0$, 及 $P(\bar{A}\bar{B}) \leq P(\bar{A}) = 0, P(AB) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - (P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B})) = 0.7$.

注 本题的特殊解法: 设 A 是必然事件, 则 $AB = B, P(AB) = P(B) = 0.7$.

(6) $\frac{2}{3}$. $E|X-Y| = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4} |x-y| dx dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \int_x^1 (x-y) dy = \frac{2}{3}$.

二、选择题

(7) (B). 由连续性知 $a+b=1$, 再由可导性知 $a-b=-\frac{1}{2}$, 解得 $a=\frac{1}{4}, b=\frac{3}{4}$.

(8) (A). 由 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = 2$ 知, $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = f'(a) = 0$ 及 $f''(a) = 2$. 故 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值. 选(A).

(9) (D). $F(\pi) = \int_{-1}^0 (1-t^2) dt + \int_0^\pi \sin x dx = \frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{3}$, 选(D).

(10) (B). 解 1 由已知 $du = (axy^3 dx + 3x^2 y^2 dy) - y^2 \cos x dx + by \sin x dy + dy = (\frac{a}{2} y^3 dx^2 + x^2 dy^3) - y^2 d \sin x + \frac{b}{2} \sin x dy^2 + dy$

因此 $a=2, b=-2$ 时 $du = d(x^2 y^3 - y^2 \sin x + y)$ 成立. 选(B).

解 2 由已知得 $u'_x = axy^3 - y^2 \cos x, u'_y = 1 + by \sin x + 3x^2 y^2$, 显然二阶导数连续, 因此 $u''_{xy} = u''_{yx}$ 即

$$3axy^2 - 2y \cos x = by \cos x + 6xy^2. \text{ 故 } a=2, b=-2.$$

(11) (C). 解 1 由两个特解可知方程通解为 $y = C \sin x + x \cos x, y' = C \cos x + \cos x -$