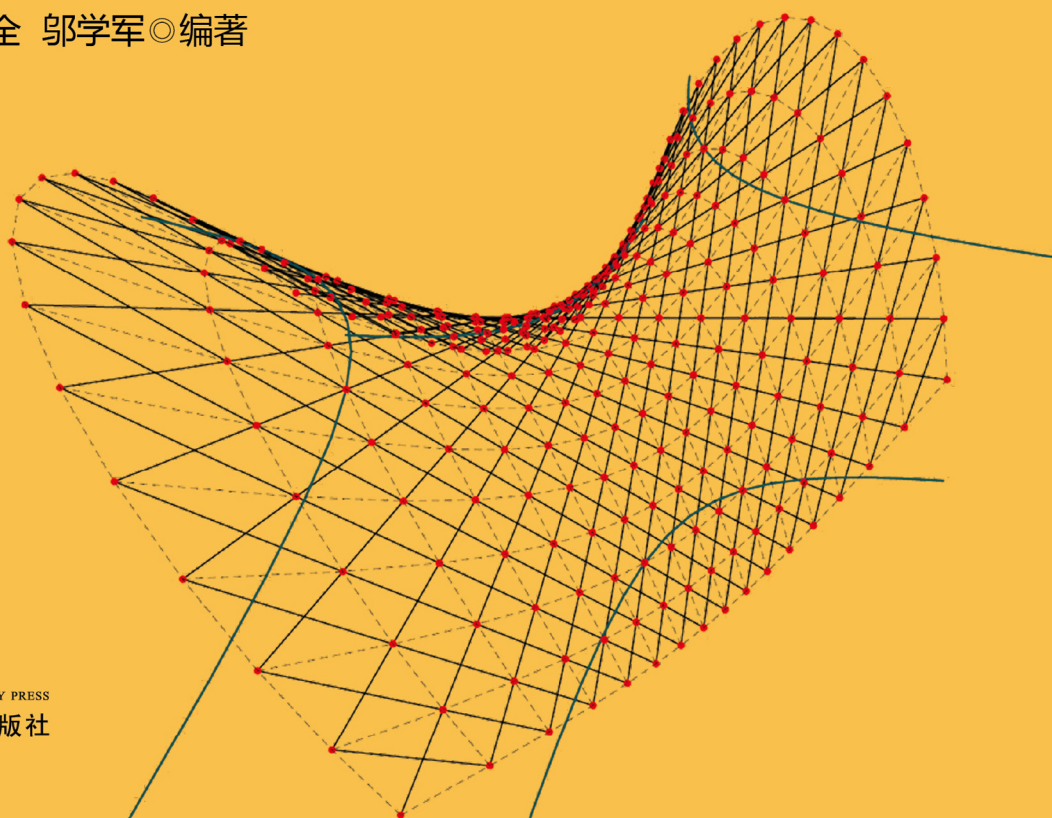


# 数学建模竞赛 入门与提高

*Introduction and Improvement  
of Mathematical Contest in  
Modeling*

周 凯 宋军全 邬学军◎编著



# 数学建模竞赛入门与提高

周 凯 宋军全 邬学军 编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS  
浙江大学出版社

## 图书在版编目 (CIP)数据

数学建模竞赛入门与提高 / 周凯, 宋军全, 邬学军  
编著. — 杭州: 浙江大学出版社, 2011. 12  
ISBN 978-7-308-09443-6

I. ①数… II. ①周… ②宋… ③邬… III. ①数学模  
型—竞赛—高等数学—教材参考资料 IV. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 265366 号

## 数学建模竞赛入门与提高

周 凯 宋军全 邬学军 编著

---

责任编辑 徐素君  
封面设计 刘依群  
出版发行 浙江大学出版社  
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)  
(网址: <http://www.zjupress.com>)  
排 版 杭州中大图文设计有限公司  
印 刷 浙江云广印业有限公司  
开 本 787mm×1092mm 1/16  
印 张 17  
字 数 425 千  
版 印 次 2012 年 1 月第 1 版 2012 年 1 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 978-7-308-09443-6  
定 价 35.00 元

---

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591

## 前 言

数学是研究现实世界数量关系和空间形式的科学,是一种思维方式,在它的发展历史长河中,一直与各种应用问题紧密相关。培根(F. Bacon)说过:“数学是进入各个科学门户的钥匙,如果没有数学知识,就不可能知晓这个世界的一切。”数学的特点不仅在于概念的抽象性,逻辑的严密性,结论的明确性和体系的完整性,而且在于它应用的广泛性。控制论创立者维纳(N. Wiener)提出:“数学的优势在于数学抽象能使我们的注意力不再局限于特定的情况,而是关注解决问题的思路、方法和抽象形式的表达,它的一个好处是数学的描述可以毫无偏差地从一个领域应用于另一个领域。”这就是数学的一个重要作用,使人们忽略细枝末节,提炼出最为关键的问题,然后概括成一个数学表达式——数学模型。在科技和生产领域解决实际问题时,不论是直接使用数学方法,还是与其他学科结合形成交叉学科,首先和关键的一步是建立研究对象的数学模型。

近年来,数学建模活动在国内各个高校普遍展开,一年一度的全国大学生数学建模竞赛是这项活动的高潮。本书是为各类本专科院校开展数学建模活动和参加全国大学生数学建模竞赛的指导培训而编著的,是笔者在使用多年的指导培训讲义基础上结合最新的竞赛题修订而成的。内容包括:数学建模概述、初等数学建模方法示例、预测类数学模型、评价类数学模型、优化类数学模型、概率类数学模型、多元统计分析模型、方程类数学模型、图与网络模型以及如何准备全国大学生数学建模竞赛。同时它对以往在全国大学生数学建模竞赛以及其他数学建模竞赛中出现过的几类主要数学模型进行了归纳总结。

全书以涉及的数学方法为主线进行编排,每一章讨论一种类型的模型。一般先简单介绍这一章所涉及数学方法的基本思想,以应用为目的,不作过多的理论阐述,然后通过例子介绍该方法的使用。所用例子大部分来自于各种形式的数学建模竞赛,当然一篇完整的竞赛论文往往不仅仅只是一种数学方法的使用,因此在本书中一般只是给出该例子的解题思路,它往往只是赛题的部分解,只涉及和这一数学方法有关的内容。一篇优秀的竞赛论文往往是多种数学方法以及各种工具的综合运用,它是一个团队综合能力的具体展示。

希望通过对本书的学习,能够帮助大家快速了解建立数学模型的过程,掌握一些基本的数学模型以及建立数学模型的常用方法,并初步学会如何学习以及运用数学模型的方法去解决现实生活中存在的各式各样的实际问题。当然也希望通过对本书的学习,能够对组建培养优秀的大学生团队参加每年一次的全国大学生数学建模竞赛提供有益的帮助。

限于编者水平,不妥之处敬请指正。

编 者  
2011年10月  
于浙江工业大学理学院

## 目 录

<b>第 1 章 数学建模概述</b> .....	1
1.1 出入门径——认识数学模型与数学建模 .....	1
1.2 数学模型的分类以及建立模型的一般步骤 .....	7
1.3 走入数学建模竞赛的世界 .....	9
1.4 关于本书的说明.....	12
1.5 思考题.....	13
<b>第 2 章 初等数学建模方法示例</b> .....	14
2.1 公平席位分配方案.....	14
2.2 商人安全渡河问题.....	17
2.3 货物存储模型.....	19
2.4 制动器试验台的控制方法分析.....	20
2.5 思考题.....	23
<b>第 3 章 预测类数学模型</b> .....	24
3.1 数据拟合与插值.....	24
3.2 多项式数据拟合.....	25
3.3 非多项式数据拟合.....	33
3.3.1 Malthus 拟合 .....	33
3.3.2 Logistic 拟合 .....	35
3.3.3 一般形式的拟合实现方法.....	38
3.4 Leslie 矩阵模型 .....	40
3.5 灰色预测模型.....	48
3.6 讨论题.....	53
<b>第 4 章 评价类数学模型</b> .....	57
4.1 层次分析法.....	57

4.1.1	递阶层次结构的建立	57
4.1.2	构造两两比较判断矩阵	58
4.1.3	单一准则下元素相对权重计算及一致性检验	59
4.1.4	一致性检验	60
4.1.5	计算各层元素对目标层的总排序权重	60
4.2	灰色关联分析体系	72
4.3	DEA 评价体系	78
4.4	讨论题	84
<b>第 5 章</b>	<b>优化类数学模型</b>	<b>87</b>
5.1	Lindo/Lingo 软件基本介绍	87
5.2	线性规划模型	89
5.3	非线性规划模型	98
5.4	整数规划模型	105
5.5	目标规划模型	108
5.6	动态规划模型	114
5.7	多目标规划模型	118
5.8	讨论题	122
<b>第 6 章</b>	<b>概率类数学模型</b>	<b>127</b>
6.1	随机性问题转化为确定性问题	127
6.2	排队论(生灭过程)的应用	132
6.3	时间序列模型	146
6.4	讨论题	153
<b>第 7 章</b>	<b>多元统计分析模型</b>	<b>157</b>
7.1	聚类分析	157
7.1.1	距离和相似系数	158
7.1.2	八种系统聚类法	159
7.1.3	系统聚类法	160
7.1.4	系统聚类法 SPSS 实现过程	166
7.2	判别分析	169
7.2.1	距离判别法	170
7.2.2	费歇(Fisher)判别法	172
7.2.3	贝叶斯(Bayes)判别法	173
7.2.4	判别法评价	174
7.2.5	判别分析 SPSS 实现过程	182

7.3 相关分析 .....	185
7.4 回归分析 .....	194
7.5 讨论题 .....	199
<b>第8章 方程类数学模型</b> .....	<b>201</b>
8.1 微分方程数学模型 .....	201
8.1.1 传染病传播数学模型 .....	201
8.1.2 种群竞争数学模型 .....	205
8.1.3 污染扩散数学模型 .....	208
8.2 马尔可夫模型 .....	214
8.3 讨论题 .....	221
<b>第9章 图与网络模型</b> .....	<b>224</b>
9.1 图论基本概念 .....	224
9.2 最短路径模型 .....	225
9.3 网络流模型 .....	252
9.4 讨论题 .....	254
<b>第10章 如何准备全国大学生数学建模竞赛</b> .....	<b>256</b>
10.1 如何组建优秀数学建模队伍 .....	256
10.2 如何准备全国大学生数学建模竞赛 .....	257
10.3 如何科学选择数学建模竞赛赛题 .....	260
10.4 如何合理安排竞赛过程中的时间 .....	261
10.5 如何合理排版数学建模论文 .....	262
10.6 数学建模竞赛的评阅标准 .....	262
<b>参考文献</b> .....	<b>264</b>

# 第 1 章 数学建模概述

近半个多世纪以来,随着计算机技术的迅速发展,数学的应用不仅在工程技术、自然科学等领域发挥着越来越重要的作用,而且以空前的广度和深度向经济、金融、生物、医学、环境、地质、人口、交通等新的领域渗透,所谓数学技术已经成为当代高新技术的重要组成部分.不论是用数学方法在科技和生产领域解决哪类实际问题,还是与其他学科相结合形成交叉学科,首要的和关键的一步是建立研究对象的数学模型,并加以计算求解.数学建模和计算机技术在知识经济时代的作用可谓如虎添翼.

数学是研究现实世界数量关系和空间形式的科学,在它产生和发展的历史长河中,一直与各种各样的应用问题紧密相关的.数学的特点不仅在于概念的抽象性、逻辑的严密性,结论的明确性和体系的完整性,而且在于它应用的广泛性.20 世纪以来,随着科学技术的迅速发展和计算机的日益普及,人们对各种问题的要求越来越精确,使得数学的应用越来越广泛和深入,特别是进入 21 世纪的知识经济时代,数学科学的地位发生巨大的变化,它正在从国家经济和科技的后备走到了前沿.经济发展的全球化、计算机的迅猛发展,数学理论与方法的不断扩充使得数学已经成为当代高科技的一个重要组成部分和思想库,数学已经成为一种能够普遍实施的技术.培养学生应用数学的意识和能力已经成为数学教学的一个重要方面.

## 1.1 出入门径——认识数学模型与数学建模

数学建模是一种数学的思考方法,是运用数学的语言和方法,通过抽象、简化建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段.数学建模就是用数学语言描述实际现象的过程.这里的实际现象既包涵具体的自然现象比如自由落体现象,也包涵抽象的现象比如顾客对某种商品所取的价值倾向.这里的描述不但包括外在形态,内在机制的描述,也包括预测,试验和解释实际现象等内容.

我们也可以这样直观地理解这个概念:数学建模是一个让纯粹数学家(指只懂数学不懂数学在实际中的应用的数学家)变成物理学家,生物学家,经济学家甚至心理学家,等等的过程.数学模型一般是实际事物的一种数学简化.它常常是以某种意义上接近实际事物的抽象形式存在的,但它和真实的事物有着本质的区别.要描述一个实际现象可以有很多种方式,比如录音,录像,比喻,传言,等等.为了使描述更具科学性,逻辑性,客观性和可重复性,人们采用一种普遍认为比较严格的语言来描述各种现象,这种语言就是数学.使用数学语言描述的事物就称为数学模型.有时候我们需要做一些实验,但这些实验往往用抽象出来的数学模型作为

实际物体的代替而进行相应的实验,实验本身也是实际操作的一种理论替代.

下面通过三个例子由浅入深让大家明白什么是数学模型与什么是数学建模.

### 例 1-1 测量山高问题

小明站在一个小山丘上,想要测量这个山丘的高度.他站在山边,采取了最原始的方法:从小山丘向下丢一小石子,5 s 后他听到了从小山丘下传来的回音.请各位尝试建立数学模型估计小山丘的高度.

#### 【解题思路】

数学建模的初学者一看到这个问题也许会认为数学建模并不是一件困难的事情,因为很多学生在高中时就遇到过这个问题.确实是这样!这是一个比较简单的实际问题(数学建模问题),大家很容易得到:

$$H = \frac{1}{2}gt^2 = 0.5 \times 9.8 \times 5^2 = 122.5 \text{ m}$$

运用自由落体公式,可以计算出山的高度.也许有人会提出疑问:上述运算是数学建模吗,这样数学建模不是很简单吗?是的,可以认为这样的运算过程就是数学建模.上述建立的模型可以称为最理想的自由落体模型,因为这是在非常理想化状态下建立的模型,它没有考虑任何其他可能影响测量的因素.数学模型就是一个解决实际问题的方法,上述方法解决了测量山高度的问题.但是在此需要说明一点:数学建模问题与其他数学问题不同,数学建模问题的结果本身没有对错之分,但有优劣之分.建立模型解决问题也许不难,但是需要所建立的数学模型能够有效地指导实际工作就比较困难了.这正是数学建模的难点,也是各类数学建模竞赛考查的主要内容.下面继续通过这个例子来解释数学模型间的优劣之分.

虽然上述理想的自由落体模型可以计算出山的高度,但计算所得到的结果可能存在较大的误差.122.5 m 这个答案在高中考试中应该是一个标准答案,不会认为这个答案是错误的.但是测量队在测量山高时绝对不会采用上述计算得到的结果,因为它可能存在较大的误差,所以它是不能被接受的.在研究这个问题的同时请各位不要忘记:现在我们在这里研究的不再是一个抽象的理论问题而是具体的实际问题,各位所建立的数学模型或者结果应该能对实际工作有较强的指导意义,应该尽力使求得的答案贴近事实.

那么在这个问题中我们还需要考虑哪些因素?例如人的反应时间,在现实中这是一个需要考虑的因素.通过查找资料(查阅资料在数学建模中极其重要,也是现代大学生必须具备的基本素质, <http://iask.sina.com.cn/b/3352472.html>),可以知道人的反应时间约为 0.1 s 左右,那么计算式子在结果上能够得到改善:

$$H = \frac{1}{2}gt^2 = 0.5 \times 9.8 \times (5 - 0.1)^2 = 117.649 \text{ m}$$

数学建模竞赛是一种开放性的比赛,竞赛过程中允许查找相关资料来帮助求解.通过上面的分析可以发现 117.649 m 比 122.5 m 更加接近实际情况.相比理想的自由落体模型,以上的数学建模过程可以称为修正的自由落体模型.就实际测量而言,修正的自由落体模型比理想的自由落体模型更加优秀,因为得到的结果更加接近实际.两种模型得到的答案也可以说都是正确的,两种答案都是基于不同的假设前提得到的.理想自由落体模型假设不考虑人的反应时间,如果你作为数学建模竞赛的评委,相信你会选择修正自由落体模型,因为它得到的答案更加接近实际情况.

一个优秀的队伍往往能够做得更多！在考虑人的反应时间这一因素后，还有没有其他因素需要考虑，例如空气阻力？各位有了这样的思维外，还拥有微积分这一解题工具。通过查阅相关资料，可以发现石头所受空气阻力和速度成正比，阻力系数与质量之比为 0.2。由此我们又可以建立以下微分方程模型：

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g - \frac{f}{m} = g - \frac{k}{m}v \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

解微分方程得  $v(t) = \frac{g \times m}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

积分得  $H = \int_0^{4.9} v(t)dt = 87.05 \text{ m}$

在竞赛培训中很多学生可能认为自己的数学能力不够好，因此打退堂鼓。然而他们不知道现在已经有很多数学软件可以帮助他们完成编程任务。这样使得所有专业的学生站在同一起跑线参加竞赛。如果大家不能够解决上述的微分方程，那么就交给软件去做。上述常微分方程，通过数学软件 Matlab 的编程计算一点也不困难，仅仅一行代码即可得到答案。Matlab 的人机交互界面做得很好，大家可以上机训练。

```
[Matlab code] Dsolve('dv=g-k*v/m','t') %实现微分方程求解功能
[Matlab code] int('9.8/0.2*(1-exp(-0.2*t))',0,4.9) %实现积分功能
```

数学建模竞赛是一个开放式的竞赛，大家可以借助一切手段（数学软件、图书资料等）得到你想要的结果。正是因为这一点，可以使所有参赛的学生站在同一起跑线上。整体上来说数学软件 Matlab 是一个非常庞大的软件，要全部掌握它是很困难的，而数学建模竞赛仅仅只用到其中的部分知识。Matlab 在数学建模中的应用，本书将结合例子作一些讲解。

通过以上计算可以发现，计算结果得到了很大的改善，理想自由落体模型计算方法得到的山高 122.5 m 的确存在着较大的误差。如果用心，大家可以做得更好。在实际生活中，回音传播时间是另一个不可忽略的因素。因此我们在上述模型的基础上引入回音传播时间  $t_2$ ，对模型进行如下修改：

$$\begin{cases} H = \int_0^{t_1} v(t)dt = 340 \times t_2 \\ t_1 + t_2 = 4.9 \end{cases} \quad \text{得: } H \approx 79 \text{ m}$$

在这个例题中，先后呈现了四种不同的解题方法，也可以说四种不同的数学模型。希望大家能够通过这个例子体会到数学模型的真谛：能够解决问题的方法就是数学模型，其本身没有对错之分，以上四种模型计算得到的答案应该说都是正确的，但是其本身有优劣之分，问题在于思考的角度。它是一种新的思维方法，从上面的例子可以得到，数学模型往往是以下两个方面的权衡：

1. 数学建模是用以解决实际问题的，所建立的模型不能太理想、太简单，过于理想化的模型往往脱离实际情况，这就违背了建模的目的；
2. 数学建模必须是以能够求解为前提的，建立的模型一定要能够求出解，所建立的模型不能过于实际，过于实际的模型往往难以求解，因此作适当的简化假设是十分重要的。

#### 【思考题】

针对考虑回音传播时间的数学模型进行改善，如地球重力场加速度  $g$  并非常数；当石

头速度过大时,空气阻力与速度之间可能存在非线性关系等.

**例 1-2 教室光照问题**

现有一个教室长为 15 m,宽为 12 m,在距离地面高 2.5 m 的位置均匀地安放 4 个光源,假设横向(纵向)墙壁与光源、光源与光源、光源与墙壁之间的距离是相等的,各个光源的光照强度均为一个单位.求:

1. 如何计算教室内任意一点处距离地面 1 m 处的光照强度?(光源对目标点的光照强度与该光源到目标点距离的平方成反比,与该光源的强度成正比).

2. 画出距离地面 1 m 各个点的光照强度与位置(横纵坐标)之间的函数关系曲面图,同时给出一个近似的函数关系式.

**【解题思路】**

假设光源对目标点的光照强度与该光源到目标点距离的平方成反比,并且各个光源的光照强度符合独立作用与叠加原理.在光源点的光照强度为“1”,并且在整个空间中反射情况可以忽略不计.

取地面所在的平面为  $xOy$  平面, $x$  轴与教室的宽边平行, $y$  轴与教室的长边平行,坐标原点在地面的中心,如图 1-1 所示.在空间中任意取一点  $i$ ,它的坐标可以表示为  $(x_i, y_i, z_i)$ ,那么空间点  $i$  的光照强度  $E_i$  应该满足以下公式:

$$E_i = \frac{1}{(x_i - 2)^2 + (y_i - 2.5)^2 + (z_i - 2.5)^2} + \frac{1}{(x_i - 2)^2 + (y_i + 2.5)^2 + (z_i - 2.5)^2} + \frac{1}{(x_i + 2)^2 + (y_i - 2.5)^2 + (z_i - 2.5)^2} + \frac{1}{(x_i + 2)^2 + (y_i + 2.5)^2 + (z_i - 2.5)^2}$$

将空间点  $i$  的纵坐标设定为 1,就可以计算距离地面高 1 m 处各点的光照强度.在 Matlab 计算中都是对离散点进行操作的,因此将距离地面高 1 m 处的 12 m×15 m 的平面离散为网格,每隔 0.25 m 取一个点,而点与点之间采用插值算法,可以得到这个平面的光照强度,如图 1-2 所示.

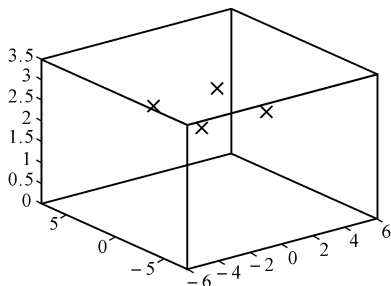


图 1-1 教室坐标示意图

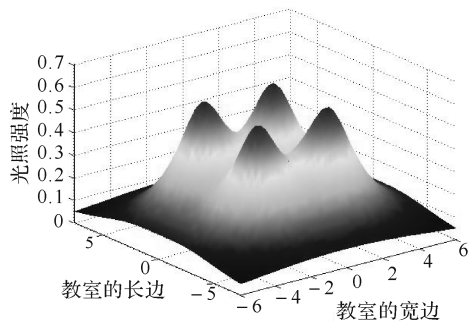


图 1-2 无反射情况下教室光照强度示意图

通过示意图可以发现:在这个距离地面为 1 m 的平面中,四个灯下的光照强度是最强的.上述模型是建立在不考虑墙面反射基础上的.那么忽略反射的想法是否正确呢?考虑墙面反射对于平面各点光照强度会带来怎样的影响?为方便求解,首先假设墙面反射满足镜面反射原理,这也是最简单的假设.重新计算可以得到在距离地面为 1 m 的平面中各点的光照强度如图 1-3 所示.对比有无一次镜面反射,平面光照强度的改善情况如图 1-4 所示.

从图中可以发现,墙边附近的光照强度改善最大,墙角和墙边的改善最小,因为墙角和墙边的反射是最少的,这些都与实际情况符合。

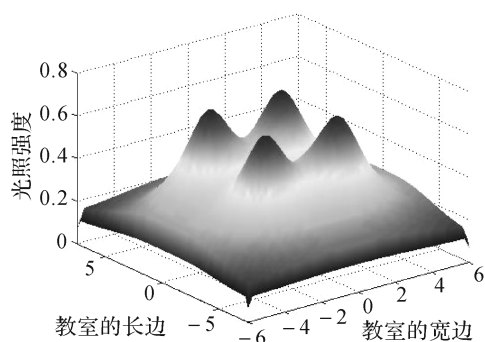


图 1-3 反射情况下教室光照强度示意图

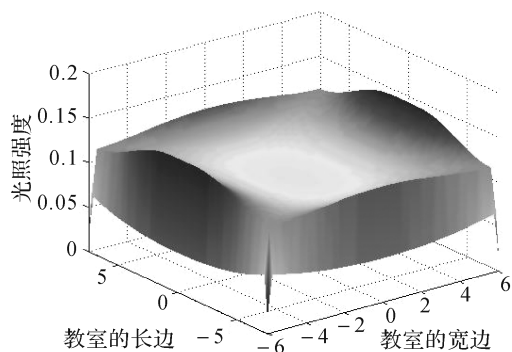


图 1-4 两种情况下教室光照强度对比示意图

图 1-4 显示:通过一次镜面反射光照强度最大可以提高 0.1 左右.那么如果考虑二次反射,二次反射所能增加的光照强度将更小,因此可以忽略不计.需要注意的是在实际生活中,墙面的反射并不是镜面反射,光源也不是点光源,光照强度也并非简单叠加.这样建立的模型将更为复杂!

#### 【思考题】

请同学可以阅读 2002 年全国大学生数学建模竞赛(CUMCM2002)的车灯线光源的优化设计问题,设计更为合理的光照强度模型.安装在汽车头部的车灯的形状为一旋转抛物面,车灯的对称轴水平地指向正前方,其开口半径 36 mm,深度 21.6 mm.经过车灯的焦点,在与对称轴相垂直的水平方向,对称地放置一定长度的均匀分布的线光源.要求在某一设计规范标准下确定线光源的长度.该设计规范在简化后可描述如下.在焦点  $F$  正前方 25 m 处的  $A$  点放置一测试屏,屏与  $FA$  垂直,用以测试车灯的反射光.在屏上过  $A$  点引出一条与地面相平行的直线,在该直线  $A$  点的同侧取  $B$  点和  $C$  点,使  $AC=2AB=2.6$  m.要求  $C$  点的光强度不小于某一额定值(可取为 1 个单位), $B$  点的光强度不小于该额定值的 2 倍(只需考虑一次反射).

请解决下列问题:在满足该设计规范条件下,计算线光源长度,使线光源的功率最小.对得到的线光源长度,在有标尺的坐标系中画出测试屏上反射光的亮区.讨论该设计规范的合理性.

#### 例 1-3 污染预测问题——CUMCM2005(部分)

长江是我国第一、世界第三大河流,长江水质的污染程度日趋严重,已引起了相关政府部门和专家们的高度重视.2004 年 10 月,由全国政协与中国发展研究院联合组成“保护长江万里行”考查团,从长江上游宜宾到下游上海,对沿线 21 个重点城市做了实地考察,揭示了一幅长江污染的真实画面,其污染程度让人触目惊心.假如不采取更有效的治理措施,依照过去 10 年的主要统计数据,对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析,比如研究未来 10 年的情况.表 1-1 为 1995—2004 年长江的排污量,根据以上数据,预测 2005—2014 年长江的排污量.

表 1-1 1995—2004 年长江排污量

年份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
排污量/亿吨	174	179	183	189	207	234	220.5	256	270	285

**【解题思路】**

如果能够找到一种合理的函数形式来表示数据的增长趋势,函数的自变量为年份,因变量为预测量,就可完成预测工作.一旦找到了这样的函数,只需要将预测的年份代入函数表达式,就可以做预测了.根据实际数据,运用最小二乘拟合方式,便可以确定函数的系数.预测过程如下所示:首先将 1995—2004 年的数据以图形的方式表现出来如图 1-5 所示,这样可以观察数据所蕴含的内在关系.通过观察,可以发现数据以类似二次函数形式增长,因此可以假定数据以二次函数的形式增长,通过最小二乘拟合确定二次函数的系数(可用 Matlab 来实现),并预测 2005—2014 年的污染量数据,如图 1-6 所示.

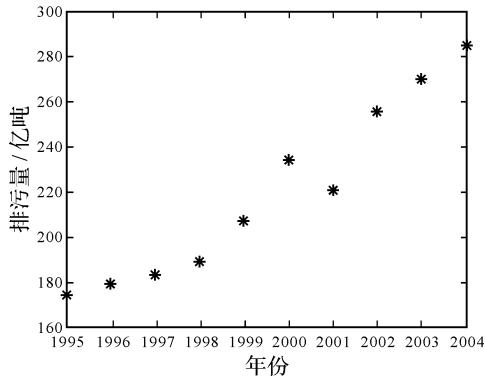


图 1-5 污染量趋势示意图

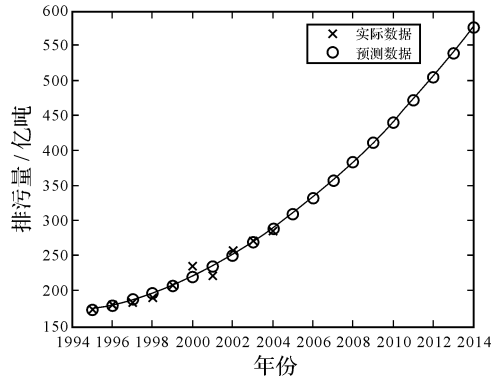


图 1-6 污染量预测示意图

寻找出与实际数据最贴近的二次函数表达式为:

$$P = 0.84 \times \text{Year}^2 - 3300 \times \text{Year} + 3300000$$

通过图 1-6 可以发现拟合效果还是比较好的,通过分别代入年份(Year)2005—2014,可以得到那些年份的污染量数据如表 1-2 所示.

表 1-2 2005—2014 年污染量预测

年份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
排污量/亿吨	309	332	356	383	410	440	471	504	539	575

以上三题虽然涉及的内容各不相同,但是作为数学建模问题有着以下的共同之处:

1. 都是通过建立数学模型解决实际问题,可以看出数学模型不是特指的那一块数学知识内容,而是指一种解决问题的思想.数学模型的很多内容对大家来所并不是全新的,本书的目的就在于帮助大家整理所学过的数学知识,用所学的知识来解决实际问题.
2. 数学模型本身没有对错,只是在方法、结果上有优劣之分.解决一个实际问题的方法也许有很多,所建立的数学模型也会有很多,但是大家要学会分析和思考.数学建模竞赛通常没有一个预设的标准答案,它考查大家的数学创新能力与应用能力.

通过以上三个例子简单介绍,希望大家初步能够明白什么是数学模型、对数学建模的过程有一个大致的了解.下面我们将比较系统地介绍数学建模的一般步骤,明白如何建立一个数学模型.

## 1.2 数学模型的分类以及建立模型的一般步骤

定期总结数学模型的分类以及建立数学模型的一般步骤对于初学者而言是非常重要的.虽然数学模型多种多样,但是其中有着内在的相似之处.经常总结经验有助于初学者尽快掌握各类模型,适应不同的数学建模题目.

数学模型可以按照不同方式来分类.按照模型的应用领域可以分为数量经济模型、医学模型、地质模型、社会模型,等等;更具体的有人口模型、交通模型、生态模型,等等;按照建立模型的数学方法可以分为几何模型、微分方程模型、图论模型,等等.数学建模的初衷是洞察源于数学之外的事物或系统;通过选择数学系统,建立原系统的各部分与描述其行为的数学部分之间的对应,达到发现事物运行的基本过程的目的.因此,人们通常也用如下的方法分类:

**观察模型与决策模型:**基于对问题状态的观察、研究,所提出的数学模型可能有几种不同的数学结构.例如,决策模型是针对一些特定目标而设计的.典型的情况是,某个实际问题需要作出某种决策或采取某种行动以达到某种目的.决策模型常常是为了使技术的发展达到顶峰而设计,它包括算法和由计算机完成的特定问题解的模拟.例如一般的马尔可夫链模型是观察模型,而动态规划模型是决策模型.

**确定性模型和随机性模型:**确定性模型建立在如下假设的基础上:即如果在时间的某个瞬间或整个过程的某个过程有充分的确定信息,则系统的特征就能准确的预测,如 2008 年全国大学生数学建模竞赛的数码相机定位问题.确定性模型常常用于物理和工程之中.微分方程模型就是常见的确定性模型.随机性模型是在概率意义上描述系统的行为,它广泛应用于社会科学和生命科学中,如 2009 年全国大学生数学建模竞赛的眼科病床的合理安排问题.

**连续模型和离散模型:**有些问题可用连续变量描述,比如空中飞行安全的设计;有些问题适合离散变量描述,比如 2007 年全国大学生数学建模竞赛的乘公交看奥运问题.有些问题由连续性变量描述更接近实际,但也允许离散化处理.例如 2006 年全国大学生数学建模竞赛的艾滋病治疗问题中病毒是随时间变化的可视连续模型,但如果勘察的时间段较短,则用离散模型描述更合适.在全国大学生数学建模竞赛中一般是一题连续型问题和一题离散型问题.

**解析模型和仿真模型:**建立的数学模型可直接用解析式表示,结果可能是特定问题的解析解,或得到的算法是解析形式的,通常可以认为是解析模型.如 2007 年全国大学生数学建模竞赛的人口预测问题.而实际问题的复杂性经常使目前的解析法满足不了实际问题的要求或无法直接求解.因此,很多实际问题需要进行仿真,如 2007 年全国大学生数学建模竞赛的乘公交看奥运问题.仿真模型可以对原问题进行直接或间接的仿真.

在现实生活工作中所面临的问题是纷繁复杂的,如果需要借助数学模型来求解,往往不可能孤立地使用一种方法.需要根据对研究对象的了解程度和建模目的来决定采用什么数学工具.一般来说,建模的方法可以分为机理分析法、数据分析法和类比仿真法等.

机理分析是根据对现实对象特征的认识,分析其因果关系,找出反映内部机理的规律,用这种方法建立起来的模型,常有明确的物理或现实意义.各个“量”之间的关系可以用几个函数、几个方程(或不等式)乃至一张图等数学工具明确地表示出来.在内部机理无法直接寻

求时,可以尝试采用数据分析的方法.首先测量系统的输入输出数据,并以此为基础运用统计分析方法,按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个与数据拟合得最好的模型.这种方法也可称为系统辨识.有时还要将这两种方法结合起来运用,即用机理分析建立模型的结构,用系统辨识来确定模型的参数.类比则是在两类不同的事物之间进行对比,找出若干相同或相似之处,推测在其他方面也可能存在相同或相似之处的一种思维模式,这样便可借用其他一些已有的模型,推测现实问题应该或可能的模型结构.仿真(也称为模拟)是以类比为逻辑基础,用计算机模仿实际系统的运行过程.在整个运行时间内,对系统状态的变化进行观察和统计,从而得到系统基本性能的估计或认识.但是仿真方法一般不能得到解析的结果.

建立数学模型没有固定的模式,通常它与实际问题的性质、建模的目的等有关.当然,建模的过程也有其共性,一般来说大致可以分为以下几个步骤:

**形成问题:**要建立现实问题的数学模型,首先要对所解决的问题有一个十分明确的提法.只有明确问题的背景,尽量弄清楚对象的特征,掌握有关的数据,确切地了解建立数学模型要达到的目的,才能形成一个比较明晰的“问题”.

**假设和简化:**根据对象的特征和建模的目的,对问题进行必要地、合理地假设和简化.如前所述,现实问题通常是纷繁复杂的,必须紧抓本质的因素(起支配作用的因素),忽略次要的因素.此外,一个现实问题不经过假设和化简,很难归结成数学问题.因此,有必要对现实问题作一些简化,有时甚至是理想化的简化假设.

**模型构建:**根据所做的假设,分析对象的因果关系,用适当的数学语言刻画对象的内在规律,构建现实问题中各个变量之间的数学结构,得到相应的数学模型.这里,有一个应遵循的原则,即尽量采用简单的数学工具.

**检验和评价:**数学模型能否反映原来的现实问题,必须经受多种途径的检验.这里包括数学结构的正确性,即没有逻辑上自相矛盾的地方;适合求解,即是否会有多解或无解的情况出现;数学方法的可行性,迭代方法收敛性以及算法的复杂性等.而最重要和最困难的问题是检验模型是否真正反映原来的现实问题.模型必须反映实际,但又不等同于现实;模型必须简化,但过分的简化则使模型远离现实,无法解决现实问题.因此,检验模型的合理性和适用性,对于建模的成败是非常重要的.评价模型的根本标准是看它能否准确地解决现实问题.此外,是否容易求解也是评价模型的一个重要标准.

**模型的改进:**模型在不断的检验过程中进行修正,逐步趋向完善,这是建模必须遵循的重要规律.一旦在检验过程中发现问题,人们必须重新审视在建模时所作的假设和简化的合理性,检查是否正确刻画对象内在的量之间的相互关系和服从的客观规律.针对发现的问题做出相应的修正.然后,再次重复建模、计算、检验、修改的过程,直到获得某种程度的满意模型为止.

**模型的求解:**经过检验,能比较好地反映现实问题的数学模型,最后通过求解得到数学上的结果;再通过“翻译”回到现实问题,得到相应的结论.模型若能获得解的确切表达式固然最好,但现实中多数场合需依靠计算机数值求解.正是由于计算技术的飞速发展,使得数学建模现在变得越来越重要,如2010年全国大学生数学建模竞赛的储油罐的变位识别与罐容表标定问题.

应用数学去解决各类实际问题时,建立数学模型是十分关键的一步,同时也是十分困难的一步.建立数学模型的过程,是把错综复杂的实际问题简化、抽象为合理的数学结构的过程.要通过调查、收集数据资料,观察和研究实际对象的固有特征和内在规律,抓住问题的主要矛盾,建立起反映实际问题的数量关系,然后利用数学的理论和办法去分析和解决问题.

这就需要深厚扎实的数学基础,敏锐的洞察力和想象力,对实际问题的浓厚兴趣和广博的知识面.数学建模是联系数学与实际问题的桥梁,是数学在各个领域广泛应用的媒介,是数学科学技术转化的主要途径,数学建模在科学技术发展中的重要作用越来越受到数学界和工程界的普遍重视,它已成为现代科技工作者必备的重要能力之一.为了适应科学技术发展的需要和培养高质量、高层次科技人才,数学建模已经在大学教育中逐步开展,国内外越来越多的大学正在进行数学建模课程的教学和参加开放性的数学建模竞赛,将数学建模教学和竞赛作为高等院校的教学改革和培养高层次的科技人才的一个重要方面,现在许多院校正在将数学建模与教学改革相结合,努力探索更有效的数学建模教学法和培养面向 21 世纪的人才的新思路,与我国高校的其他数学类课程相比,数学建模具有难度大、涉及面广、形式灵活,对教师和学生要求高等特点,数学建模的教学本身是一个不断探索、不断创新、不断完善和提高的过程.为了改变过去以教师为中心、以课堂讲授为主、以知识传授为传统的教学模式,数学建模课程指导思想是:以实验室为基础、以学生为中心、以问题为主线、以培养能力为目标来组织教学工作.通过教学使学生了解利用数学理论和方法去分析和解决问题的全过程,提高他们分析问题和解决问题的能力;提高他们学习数学的兴趣和应用数学的意识与能力,使他们在以后的工作中能经常性地想到用数学去解决问题,提高他们尽量利用计算机软件及当代高新科技成果的意识,能将数学、计算机有机地结合起来去解决实际问题.数学建模以学生为主,教师利用一些事先设计好问题启发,引导学生主动查阅文献资料和学习新知识,鼓励学生积极开展讨论和辩论,培养学生主动探索,努力进取的学风,培养学生从事科研工作的初步能力,培养学生团结协作的精神,形成一个生动活泼的环境和气氛,教学过程的重点是创造一个环境去诱导学生的学习欲望,培养他们的自学能力,增强他们的数学素质和创新能力,提高他们的数学素质,强调的是获取新知识的能力,是解决问题的过程,而不是知识与结果.接受参加数学建模竞赛赛前培训的同学大都需要学习诸如数理统计、最优化、图论、微分方程、计算方法、神经网络、层次分析法、模糊数学、数学软件包的使用等“短课程”(或讲座),用的学时不多,多数是启发性地讲一些基本的概念和方法,主要是靠同学们自己去学,充分调动学生的积极性及发挥他们的潜能.培训中广泛采用讨论班方式,学生自己作报告、讨论、辩论,教师主要起质疑、答疑、辅导的作用,竞赛中一定要使用计算机及相应的软件,如 SPSS, Lingo, Maple, Mathematica, Matlab 甚至排版软件等.

### 1.3 走入数学建模竞赛的世界

为了选拔人才(实际上是为了更好地培养人才),组织竞赛是一种行之有效的方法.1985 年在美国出现了一种叫做 MCM 的一年一度的大学生数学建模竞赛(1987 年前全称是 Mathematical Competition in Modeling, 1988 年改全称为 Mathematical Contest in Modeling, MCM).

在 1985 年以前美国只有一种大学生数学竞赛(The William Lowell Putnam mathematical Competition, 简称 Putnam (普特南)数学竞赛),它是由美国数学协会(Mathematical Association of America, MAA)主持,于每年 12 月的第一个星期六分两试进行,每试 6 题,每试各为 3 h.近年来在次年的美国数学月刊(The American Mathematical Monthly)上刊出竞赛小结、奖励名单、试题及部分题解.这是一个历史悠久、影响很大的全美大学生数学竞

赛,自 1938 年举行第一届竞赛以来已近 72 届了,主要考核基础知识和训练逻辑推理及证明能力、思维敏捷度、计算能力等.试题中很少出现应用题,完全不能用计算机,是闭卷考试的,竞赛是由各大学组队自愿报名参加.普特南数学竞赛在吸引青年人热爱数学从而走上数学研究的道路、鼓励各数学系更好地培养人才方面起了很大作用,事实上有很多优秀的数学家就曾经是它的获奖者.

有人认为应用数学、计算数学、统计数学和纯粹数学一样是数学研究和数学课程教学的重要组成部分,它们是一个有机的整体.有人形象地把这四者表示为一四面体的四个顶点,棱和面表示学科的“内在联系”,例如应用线性代数、数值分析、运筹学等,而该四面体即数学的整体.因此在美国自 1983 年就有人提出了应该有一个普特南应用数学竞赛,经过论证、讨论、争取资助的过程,终于在 1985 年开始了第一届数学建模竞赛.

MCM 的宗旨是鼓励大学师生对范围并不固定的各种实际问题予以阐明、分析并提出解法,通过这样一种结构鼓励师生积极参与并强调实现完整模型的过程.每个参赛队有一名指导教师,他在比赛开始前负责队员的训练和战术指导,并接收考题.竞赛由学生自行参加,指导教师不得参与.比赛于每年 2 月或 3 月的某个周末进行.每次给出两个问题(一般是连续和离散各一题),每队只需任选一题.考题是由在工业和政府部门工作的数学家提出建议,再由命题组选择的没有固定范围的实际问题.

另外就全国大学生数学建模竞赛的题目来说,它可以来自于人们日常生活的各个方面,经常会来源于当年社会中的热点问题.如 1998 年的投资的收益和风险以及灾情巡视路线问题;2000 年的钢管订购和运输优化模型以及 DNA 序列分类;2002 年的彩票中的数学;2003 年的 SARS 传染问题;2006 年的艾滋病预防问题;2007 年的乘公交看奥运问题;2009 年的制动器试验台的控制方法分析问题;2010 年的上海世博会影响力的定量评估问题.

我国大学生于 1989 年开始参加美国 MCM(北京理工大学叶其孝教授于 1988 年访问美国时,应当时 MCM 负责人 B. A. Fusaro 教授之邀请访问他所在学校时商定了中国大学生组队参赛的相关事宜),到 1992 年国内已有 12 所大学 24 个参赛队,都取得了较好的成绩.在我国不少高校教师也萌发了组织我国自己的大学生数学建模竞赛的想法.上海市率先于 1990 年 12 月 7—9 日举办了“上海市大学生(数学类)数学建模竞赛”.于 1991 年 6 月 7—9 日举办了“上海市大学生(非数学类)数学建模竞赛”.西安也于 1992 年 4 月 3—6 日举办了“西安市第一届大学生数学建模竞赛”.由中国工业与应用数学学会(CSIAM)举办的“1992 年全国大学生数学建模联赛”也于 1992 年 11 月 27~29 日举行,来自全国 74 所大学的 314 个队参加,不仅得到各级领导的关心,还得到企业界的支持,特别是得到了宣传部门的广泛支持.1995 年起由教育部和中国工业与应用数学学会联合举办全国大学生数学建模竞赛,每年 9 月举行,现在已成为全国规模最大的一项国家级的大学生科技竞赛活动.

近几年,数学建模在中国得到不断发展,涌现出很多区域性数学建模竞赛.使得数学建模爱好者有一个相互交流经验和展示自我能力的舞台.数学建模初学者还可以通过区域赛事检验自我的能力,增加比赛经验.数学建模竞赛与通常的数学竞赛不同,竞赛的问题来自实际工程或有明确的实际背景.它的宗旨是培养大学生用数学方法解决实际问题的意识和能力,整个赛事是完成一篇包括问题的阐述分析,模型的假设和建立,计算结果及讨论的论文.通过训练和比赛,同学们不仅用数学方法解决实际问题的意识和能力有很大提高,而且在团结合作发挥集体力量攻关,以及撰写科技论文等方面将都会得到十分有益的锻炼.现在