图书在版编目(CIP)数据

数学建模简明教程 / 杨尚俊编著 .—合肥:安徽大学出版社,2006.3
ISBN 7－81110－111－4

Ⅰ. **数** ...　Ⅱ. **杨** ...　Ⅲ. **数学模型－高等学校－教材**　Ⅳ. 022

中国版本图书馆 CIP **数据核字**(2006)**第** 021818 **号**

数学建模简明教程　　**杨尚俊　编著**

出版发行	**安徽大学出版社** (**合肥市肥西路** 3 **号　邮编** 230039)	**印　刷**	**中国科学技术大学印刷厂**
联系电话	**编辑室** 0551－5108438 **发行部** 0551－5107784	**开　本**	880×1230　1/16
		印　张	7.5
		字　数	144.4 **千**
责任编辑	**鲍家全**	**版　次**	2006 **年** 3 **月第** 1 **版**
封面设计	**孟献辉**	**印　次**	2006 **年** 3 **月第** 1 **次印刷**
经　　销	**新华书店**		

ISBN 7－81110－111－4/O・55　　**定价** 12.50 **元**

本书得到安徽大学"211 工程"经费资助

数学建模简明教程

（课件形式）

杨尚俊　编著

安徽大学出版社

中国·合肥

前　言

随着科技的进步，数学越来越受到人们的高度重视。大量事实证明，数学已经成为高科技的基础，甚至不少知名学者都说，高科技本质上是数学技术。当今世界，高质量的数学教育已成为各国培养高素质人才的重要组成部分。1985 年美国创办了大学生数学建模竞赛。我国大学生热烈参加美国的数模竞赛。1992 年起我国也举办大学生数学建模竞赛。受这两大赛事的影响，以及我国教育部面向 21 世纪课程体系改革，建议把“数学实验”列为基础课（强调数学教学中理论联系实际和学生动手），我国高校近年已广泛开设“数学建模”课，参加大学生数学建模竞赛的高校，全部开设“数学建模培训课”。

近十几年来，我给安徽大学本科学生上数学建模课和为安大参加国际、国内大学生数学建模竞赛的学生上培训课★，并为此编写了讲义。我感到这门课面临着大量的矛盾：时间紧而内容多；内容深且广而学生的基础不够；以及内容难于理解而学生渴望弄懂，等等。我以为，解决这些矛盾的一个可行办法是：少而精地处理教材。

本教材本着少而精原则，在多年修改讲义的基础上编成。有以下特点：

（1）用课件形式，以期更方便于教与学。

（2）以一个个实际问题为主要线索，讲述应用数学知识解决实际问题的整个数学建模过程，不忽略讲述问题的实际背景。

（3）求解数学建模时，尽量结合学生已学知识详细讲解有关数学推导。

（4）在教学中适时插入思考题，以提高学生兴趣，促进教与学互动。

（5）适当介绍数学软件及其编程知识。强调编程在数学建模中的重要性，更给出一些有趣例子和练习题及其参考答案，为上机培训提供一些素材。

作者在编写过程中得到安徽大学曾建军、章权兵、鲍炎红等老师的协助和广大听课学生的支持，思考题参考答案中的一部分就参考了当年学生的作业。作者一直得到安徽大学教务处和数学学院的鼓励与支持。鲍家全编辑为本书做了认真细致的工作。在此一并表示对他们的深切谢意。

由于作者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者指正。

杨尚俊

2005 年 7 月于安徽大学

★安徽大学从 1993 年起，就组队参加全国和国际大学生数学建模竞赛，并取得不错的成绩。例如，2000 年在国际大学生数学建模竞赛中，安大 3 个参赛队个个得奖，其中获一等奖 1 个，二等奖 2 个；2002 年在全国大学生数学建模竞赛中，安大 7 个参赛队也是个个得奖，其中获国家一等奖 2 个，二等奖 1 个，安徽赛区一等奖、二等奖各 2 个。杨尚俊也因此获得全国大学生数学建模竞赛优秀指导教师的殊荣。

★本教材配有多媒体教学课件，有需要者请与安徽大学出版社联系。

目　　录

引 言

§0.1 数学的重要性

新世纪国家间的竞争主要是经济竞争,是人才的竞争;人才培养的关键是素质教育,数学教育在素质教育中占据重要地位.

当今社会正日益数字化,数学是高科技的基础.

数学在工程技术以及国民生产中发挥愈来愈重要的作用,甚至是决定性的作用.

素质教育的重要性

素质教育既是“科教兴国”战略的必然选择,也是教育自身进一步发展的客观需要,更是高校发展的灵魂和动力.

大学最重要的是强调个性化教育,能充分挖掘每个学生的潜力,发挥其个性.而数学建模的教育及实践正符合这方面的要求.

数学是高科技的基础

社会进步依赖于科学的创新.数学对于科学的发展则具有根本的意义.在今天,数学已成为高科技的基础,并且在一定意义上,可以说是现代文明的标志(2002年北京国际数学家大会东道国欢迎词摘录)★.

各行各业日益依赖于数学,可以说,当今社会正日益数字化.数学正在向一切领域渗透,数学正在不停地与别的学科结合产生活跃的新兴学科.“高科技本质上是一种数学技术”的观点正在被越来越多的人接受.

这是李岚清副总理在致大会欢迎词中的一段话.

★2002年8月在中国首都北京举行国际数学家2002年大会,这是国际最高级数学学术会议第一次在一个发展中国家举行.我国政府非常重要和支持这次会议,最高领导人出席了会议开幕式,并为得奖者授奖.

数学在生产中起重要作用的例子

曾经有一家电器公司曾出现成品率只有84%,并仅有50%的发货日期可以兑现的问题,而因此造成严重的亏损.他们应用统计质量控制在很短时间就成功地发现和解决了问题,使成品率稳定在95%以上,按期发货率也达到95%,当年就实现扭亏增盈1200万美元.★

这个故事告诉我们:数学可以在国民生产中发挥重要作用,甚至决定性作用.

★这个例子取自 Glimm 教授主持编撰的代表美国数学科学委员会给美国政府的公开报告：*Mathematical Science*，*Technology*，*Economic Compitiveness*（National Academy Press，Washington D. C. 1991).

该公司最先发现电器元件的各种性能波动太大．他们首先用数学技术找出产生元件性能波动的原因是，在自动控制的酸洗工序中确定酸洗液 PH 值的机制有问题，产生校正过度．他们再用数学技术（优选法）重新校正，减少了起伏，从而解决了这个大问题．这份报告提出的如下结论也颇有启发性："在经济竞争中数学科学是必不可少的．数学科学是一种关键性的，能够实行的技术．"

§0.2 本书主要内容

初等方法建模；

微分方程方法建模；

层次分析方法建模；

矩阵分析方法建模；

数学规划方法建模；

依靠智力巧妙建模；

大学生数学建模竞赛和 Matlab 编程及应用．

§0.3 本课程主要特点

①以讨论具体实际问题为主要线索.

②以讲授数学建模的思路与方法为主要目的.

③强调启发思路和分析、解决问题的技巧.

④按求解所讨论的具体数学模型的需要介绍有关数学背景知识和基本方法，即实际问题需要什么就介绍什么，不强求数学知识方面的系统性与完整性.

第1章　初等模型

§1.1　例子与定义

例1　航行问题

A ———————— B

已知：沿长江在相距750km的两个码头A与B之间，顺水航行时间是30hr；逆水航行时间是50hr. 试分别求出船和水的平均速度.

解：令船和水的平均速度分别是x和y，由题意得二元方程组：

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{750}{30} \\ x-y=\dfrac{750}{50} \end{cases}$$

求解此方程组得：$x=20$，$y=5$.

答案：船和水的平均速度分别是20km/hr和5km/hr.

必要的简化与说明

①这里，只考虑平均速度是基本的简化*，因为船和水的速度是随时间、地点而变化的. 严格讲，已知的顺水、逆水航行时间是船在该河段上常年航行的平均时间；而要求的船和水的平均速度也应是该船和水在该河段上常年航行的平均速度.

②解决本问题也需要速度等相关的物理概念.

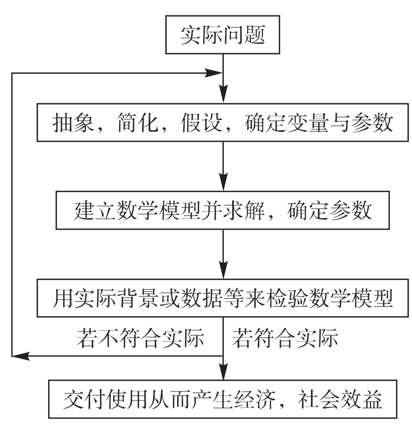
③解决本问题的步骤：按照题意设定未知量并决定未知量满足的数学公式；求出这个方程组的解；并在讨论解的存在性与唯一性之后确定该解就是原问题所需要的解.

④别忘了验证解的正确性.

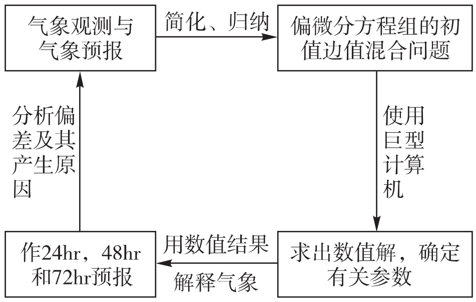
* 若把实际问题看做原型的话，则数学模型是将原型经过简化提炼而构成的替代物. 这里值得注意的是：简化是构造数学模型的必要前提.

什么是数学模型？

如果要下一个定义的话，数学模型是对一个实际问题，按照其内在规律作出一些必要的假设（目的是简化问题和去掉不确定的因素使之能归结为一个确定的数学问题），并应用适当的数学工具导出的一个数学结构. 借助数学的分析与计算全面探讨并求出所得数学模型的解，再利用有关的背景知识可以成功地将所得数学解用来解释和回答原先的实际问题. 这一整个过程称为数学建模. 可用下面的图表直观地表示数学建模过程的各阶段及其联系.



例 2 气象预报问题★



★作为天气现象的数学模型在一百多年前就已经很成功地解决了，它是一个特殊的二阶非线性偏微分方程组的初值、边值混合问题．遗憾的是，这个偏微分方程组的混合问题很难求解，不要说精确解找不到，就是求很粗糙的近似解的计算量也惊人地巨大．在现代巨型电子计算机未出现以前，即使通过求此混合问题很粗糙的近似解来作短期天气预报也是不现实的，因为花一个月甚至更多时间也完成不了所需的计算．直到 20 世纪 80 年代出现每秒可完成上亿次运算的巨型计算机以后，这个数值天气预报的多年梦想才得以实现．目前我国也研制成功每秒千亿次运算水平的巨型机，有了先进的计算机才保证了中央气象台每天及时而准确地发布各种天气预报，为国民生产及人民生活作出巨大贡献．

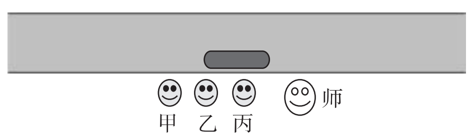
实际问题与其数学模型之间的关系

大家知道原型与模型之间的关系．若把实际问题看做原型的话，则数学模型是将原型经过精致地简化、提炼而构成的替代物．

这里必须强调两点：第一，一般来说，原型总是复杂和困难的，必须把它归结为数学模型才能解决；第二，数学模型不是原型原封不动的复制品，它只是突出反映原型某些方面性质的近似物．这里难免会存在数学模型与原型的差异甚至矛盾、冲突．但对我们来讲，原型是根本的，当二者出现无法解释的矛盾时，必须修改相关的数学模型以适应原型．

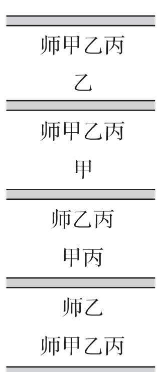
例 3 安全过河问题(1)

问题：一位老师带三名小学生甲、乙和丙过河．假设仅有一条小渡船，最多能容纳二人；并且只有老师能划船．此外，学生乙很顽皮，无老师在场时他肯定要欺负甲和丙．老师应如何安排过河方案使四人都到达彼岸并且不发生学生乙与学生甲、丙单独相处而发生打架伤人的事故？



过河问题(1)的解★

一种安全过河方案是：



①师乙过去，接着师回；

②师甲去，接着师乙回；

③师丙过去，接着师回：

④师乙过去．

★实际问题及其数学模型不仅可以涉及数量关系，也可以涉及方案、规则、措施等方面，过河问题就是一例。

思考题 1—1

过河问题(1)的答案唯一吗？

不允许重复时有几个答案？

最少渡河次数是多少？

如果每人都能划船结论又是如何？

例 4　安全过河问题(2)★

问题：三个商人每人带一随从过河. 假设仅有一条小渡船，最多能容纳二人；并且因他们正处于偏僻地带，这几个不安分的随从在他们人数超过商人人数时将图谋不轨. 应如何安排过河方案使六人到达彼岸之前都不发生随从数超过商人数情况而引发杀人劫货的事故？

★切莫以为数学建模问题都像例 1、例 3 那么简单. 不信的话，请你不要看下面一张幻灯片，对例 4 中的问题，试着给出一个安全过河方案. 你能不假思索地快速写出一个安全过河方案吗？

一种安全过河方案是

①2从过去 接着 1从回来;

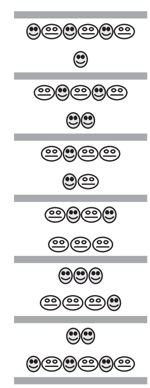
②2从过去 接着 1从回来;

③2商过去 接着 1商1从回来;

④2商过去 接着 1从回来;

⑤2从过去 接着 1从回来;

⑥2从过去.



相关的数学表示与分析

河岸的人员状态可用二维向量(x,y)表示，意指在所考虑的时刻，该岸有x个商人和y个随从. x,y的取值范围是$\{0,1,2,3\}$. 易见：每岸共有$4^2=16$种可能的人员状态；两岸人员状态互相唯一决定，例如，已知此岸状态向量为(x,y)，则彼岸状态向量为$(3-x,3-y)$.

一岸的安全状态向量(x,y)应满足条件：$x\geqslant y$或$x=0$. 但当此岸出现$x>y$时，彼岸状态向量$(x',y')=(3-x,3-y)$将出现$x'<y'$. 在此情况下，此岸虽安全，而彼岸却不安全，故$x>y$也被认为是不安全的状态.

所以，每岸的 16 种状态中恰有 10 种是安全的，它们组成的集合是

$$S=\{(x,y)\mid x=0\vee x=3\vee x=y\}.$$

上述分析也适用于有n个商人及n个随从的情况，其中，n为任意正整数. 此时，安全集为

$$S=\{(x,y)\mid x=0\vee x=n\vee x=y\}.$$

在直角坐标系下安全集 S 的点组成 |/| 字形，详见下图.

此岸状态图

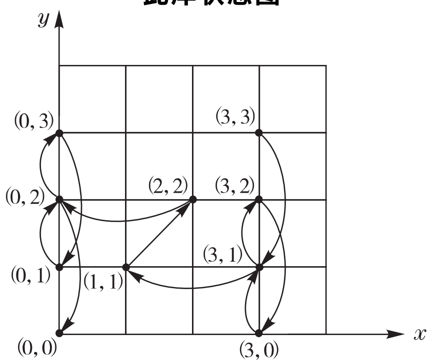


图 1－1

解决安全过河问题(2)的数学模型

基于前面的分析建立解决 n 商 n 从安全过河问题的 И 字形棋盘单人跳棋模型：在此岸安全集 S 组成的 И 字形棋盘上，经奇数步从起点 (n,n) 跳到终点 $(0,0)$ 为成功．

跳棋规则是：① 每步在水平或垂直方向跳 1 或 2 格；或在 $45°$ 斜线方向跳 1 格．② 奇数步向下、向左跳；偶数步向上、向右跳．

一个成功的跳棋过程将给出 n 商 n 从安全过河问题的一个方案．

例如，图 1－1 所示的成功跳棋过程正好对应我们前面提出的那个安全过河方案.

关于安全过河问题(2)解的讨论

一般来说，该问题只要有一个解就有无穷多个解. 因为：在这个解的第 1 步之前增加两步："1 随从过去，接着再回来"，走完此两步仍回到原状态. 显然，把这两步作任意次循环，都将回到原状态. 所以，由一个已知解可以构造出无穷多个不同的解. 换句话说，此问题解的唯一性一般不成立．

我们应把两个这样的解看做同一类：其中一个解除多一个循环之外，与另一个解完全相同．这里，循环指的是偶数步来回过渡，并保持循环前和循环后两岸状态完全一样. 今后，同一类的解中恒取那个"不允许重复的解"为代表．

注意：即使不区别商人随从间的置换，对于不允许重复的解，解的唯一性一般地也是不成立的. 例如，对于安全过河问题(2)，仔细观察图 1－1不难发现：从(3，3)出发，经“2 从过去，接着 1 从回来”或“1 商 1 从过去，接着 1 商回来”都达到同样的状态：“1 从在彼岸，其余人员在此岸”. 因此，安全过河问题(2)至少有两个不允许重复的解．

每个不允许重复的解的渡河次数称为最少渡河次数. 例如，对图 1－1 表示的那个不允许重复解最少渡河次数是 11.

思考题 1－2

① 你能证明：“对任何正整数 n，n 商 n 从的安全过河问题，不允许重复的解一定是有限个”吗？

②你能证明：对 3 商 3 从安全过河问题，不允许重复的解个数是 4 吗？

安全过河问题(2)的各种推广

1. 渡船容量不变(即至多容 2 人)，仅商人、随从人数有所改变．

①思考题 1－3

对任意正整数 $n \geq 2$，讨论 n 商人和 n 随从能否安全过河，若能，并给出答案．

②思考题 1－4

对任意正整数 $n \geq 2$，讨论 $n+1$ 商人和 n 随从能否安全过河？若能，请给出答案．

2. **渡船容量和商、从人数都改变.**

①**思考题** 1—5

假设渡船至多容 3 人,5 商人和 5 随从能否安全过河?若能,请给出答案. 并考虑怎样作更一般性的推广?

②**思考题** 1—6

假设渡船至多容 4 人,能否证明:对任意正整数 n,n 商人和 n 随从都能安全过河?给出你的答案的严格证明.

§1.2 其他初等模型

小兔繁殖问题;

汉诺塔问题——一个著名数学游戏;

过圆周上等分点的三角形计数问题;

双层玻璃窗保温功效可行性分析;

代表席位公平分配问题;

最优价格制定问题.

小兔繁殖问题

假设:

一对刚出生的小兔(一公一母)被放到一个水草丰盛的孤岛上;2 月龄及以上的每对兔子每一个月恰好繁殖一对新兔(也是一公一母);在观察期间没有任何兔子死去.

问题:

试计算在观察期间的第 n 个月岛上兔子总对数.

解:记第 n 个月内兔子总对数为 f_n. 则显然 $f_1 = 1$;因 1 月龄的兔不能繁殖,故 $f_2 = 1$.

当 $n \geq 3$ 时,为了计算第 n 月兔子对数 f_n,要把前一个月的兔子对数 f_{n-1} 加上新生兔子对数,而新生兔子对数正好等于 f_{n-2}(因每对兔子一次生一对). 这就证明数列 $\{f_n\}$ 满足初始条件:$f_1 = f_2 = 1$ 和递推关系:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3.$$

不难依次求得数列 $\{f_n\}$ 前若干项(参看图 1—2)的值如下:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21

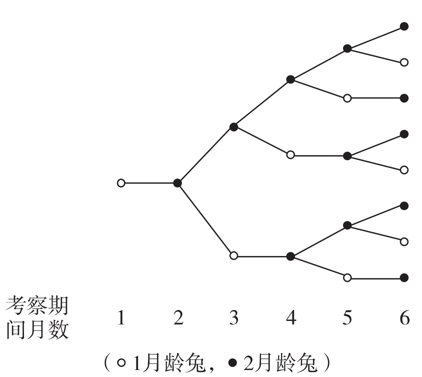


图 1—2

Fibonacci **数列**

数列 $\{f_n\}$ 在理论和运用方面都非常有用,被称为 Fibonacci **数列. 可以方便地编程计算数列 $\{f_n\}$,也可以证明它满足下列封闭公式:**

$$f_n = \frac{u^{n+1} - v^{n+1}}{\sqrt{5}}, n = 0,1,2,\cdots \qquad (2.1)$$

其中,$u = (1+\sqrt{5})/2, v = (1-\sqrt{5})/2.$

思考题 1－7

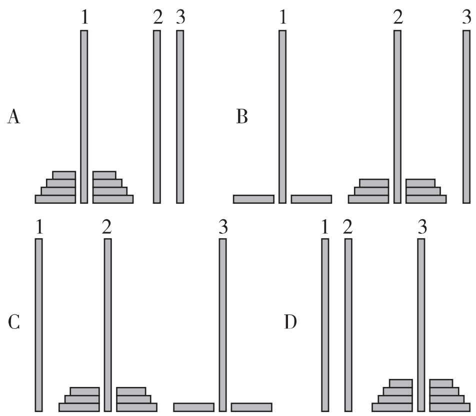
①试用 Matlab 编程求 f_n，其中 n 为任意正整数．

②你能严格证明公式(2.1)吗？

汉诺塔问题——一个著名数学游戏

游戏规则：今有安装在一块木板上的 3 根柱子和若干中心有孔的盘子．这些盘子的直径两两不同. 开始时，它们已按大小的次序套在第一根柱子上，使得每个盘子的下面没有比它小的盘子．每一次把 1 个盘子从一根柱子移动到另一根柱子，但是不允许这个盘子放在任何比它小的盘子上面．游戏的最终目标是把所有的盘子都放到第三根柱子上，并保证按大小次序放置，大盘子在下面．

问题：令 h_n 表示解 n 个盘子汉诺塔问题所需要的最少移动次数．试建立关于 h_n 的递推关系并求出 h_n 的封闭公式．



汉诺塔问题的解法

开始时 n 个盘子放在柱 1. 按照游戏规则我们用 h_{n-1} 次移动将上边的 $n-1$ 个盘子移到柱 2. 在这些移动中保留最大的盘子不动，然后我们用一次移动将最大盘子移动到柱 3. 我们再使用 h_{n-1} 次移动将柱 2 上的 $n-1$ 个盘子移到柱 3，把它们放到最大的盘子上面(这个最大的盘子一直放在柱 3 的底部). 容易看出，使用更少的次数是不可能达到目的的．这就证明了 $h_n=2h_{n-1}+1$. 初始条件是 $h_1=1$，因为依照规则一个盘子可以经 1 次移动从柱 1 移到柱 3.

我们可以使用迭代方法求解这个递推关系：

$$\begin{aligned}
h_n &= 2h_{n-1}+1\\
&= 2(2h_{n-2}+1)+1\\
&= 2^2h_{n-2}+2+1\\
&= 2^2(2h_{n-3}+1)+2+1\\
&= 2^3h_{n-3}+2^2+2+1\\
&= \cdots\\
&= 2^{n-1}h_1+2^{n-2}+\cdots+2+1\\
&= 2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1 && \text{用了初始条件 } h_1=1\\
&= 2^n-1 && \text{用了等比级数公式}
\end{aligned}$$

一个古老的传说告诉我们，在汉诺地方有一座塔，那里的僧侣们严格按照这个游戏规则从一个柱子到另一个柱子移动 64 个金盘子．他们一秒钟移动一个盘子．据说当他们结束游戏时世界就到了末日．

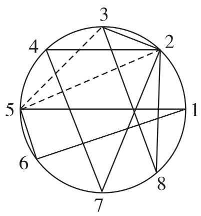
试问：这个世界在僧侣们开始移动盘子多久以后终结？

答案：$2^{64}-1$ 秒 > 5000 亿年．

过圆周上等分点的三角形计数问题

假设 $n(>2)$ 为给定的正整数,并已知圆周上的 n 个等分点. 试计算以这些等分点为顶点的一切可能的锐、直、钝角三角形个数.

例:$n=8$



建立数学模型

用循环数组 (i,j,k) 来刻画所讨论三角形的构形,其中 i,j,k 分别表示该三角形按反时针方向相邻二点间所夹已知等分点的个数. 易见,经旋转后能重合的三角形构形相等;所讨论三角形的构形满足下列条件:

$$i,j,k\geqslant 0, i+j+k=n-3. \qquad (*)$$

例如,在上面例子中的锐角三角形 472,直角三角形 156,钝角三角形 238 可分别刻画为 $(2,2,1)$,$(3,0,2)$ 和 $(0,4,1)$.

注:构形 $(0,4,1)$ 与 $(0,1,4)$ 被视为不同,因对应三角形 238 与 235 旋转后不重合.

设 ABC 为有构形 (i,j,k) 的三角形,显然,

ABC 为直角三角形 $\Leftrightarrow max(i,j,k)=n/2-1$;

ABC 为锐角三角形 $\Leftrightarrow max(i,j,k)<n/2-1$;

ABC 为钝角三角形 $\Leftrightarrow max(i,j,k)>n/2-1$.

(i,j,k) 中的 i,j,k 两两不同,则 (i,k,j) 被视为与 (i,j,k) 构形不同的三角形构形.

在具体计算直、钝角三角形个数时,只要确定一切满足条件 $(*)$ 的不同(非等边)三角形构形 (i,j,k) 的个数 a,再乘以 n 即可. 计算锐角三角形的个数时,还要计算等边三角形 $(i=j=k)$ 构形的个数 b. 则锐角三角形个数等于 $n(a+b/3)$.

$n=8$ 时三角形计数问题的解

$n=8$ 时共计有:

锐角构形一个:$(1,2,2)$;

直角构形 3 个:$(1,1,3)$,$(0,2,3)$,$(0,3,2)$;

钝角构形 3 个:$(0,0,5)$,$(0,1,4)$,$(0,4,1)$.

所以,锐角三角形个数是 8;直、钝角三角形个数都是 $3\times 8=24$.

思考题 1-8

① 当 $n=10$ 时分别有多少锐、直、钝角三角形?

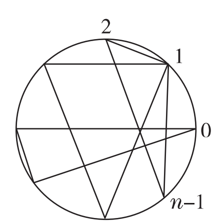
② 当 $n=9$ 时分别有多少锐、直、钝角三角形?

三角形计数问题的另一种解法

在复平面单位圆周上取定的 n 个等分点为 $a_0,a_1,\cdots,a_n$,其中,$a_k=e^{2\pi ki/n}$,$k=0,1,\cdots,n-1$,以 $(0,j,k)$ 表示顶点为 a_0,a_j,a_k 并满足 $0<j<k\leqslant n-1$ 且边 a_ja_k 为最长边的三角形. 易见三角形 (i,j,k) 为直(锐、钝)角三角形的充要条件是:

$k=n/2(>[n/2],<[n/2])$

令 n_1,n_2,n_3 分别表示圆内接锐角、直角、钝角三角形的个数.

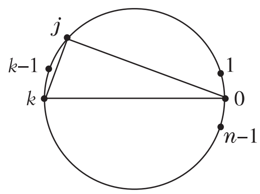


偶数 $n=2k$ 时三角形计数问题的解

①$n=2k$ 时，n_2 的计算：

令 $k=n/2$，则过水平直径的直角三角形是 $(0,j,k)$，$j=1,2,\cdots,k-1$.

$$\begin{aligned}\therefore n_2 &= n(k-1)\\ &= n(n/2-1)\\ &= n(n-2)/2.\end{aligned}$$



②$n=2k$ 时，n_3 的计算：

位于上半圆的钝角三角形是 $(0,i,j)$，

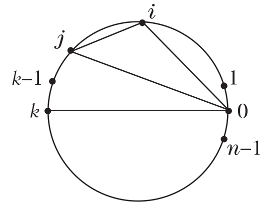
$j=2,\cdots,k-1$；$i=1,2,\cdots,j-1$.

$$\begin{aligned}\therefore n_3 &= n\sum_{j=1}^{k-2} j = n(k-2)(k-1)/2\\ &= (n/2)(n/2-1)(n/2-2).\end{aligned}$$

③$n=2k$ 时，n_1 的计算：

$n_1=C_n^3-n_2-n_3$，

其中，n_2，n_3 的公式如上所示.



思考题 1—9

试证：当 n 为偶数时，钝角三角形的个数是锐角三角形个数的 3 倍.

$n=2k+1$ 时三角形计数问题的解

$n_2=0$；

$n_3=(n/2)[(n-1)/2]([(n-1)/2]-1)$.

$n_1=C_n{}^3-n_2-n_3$.

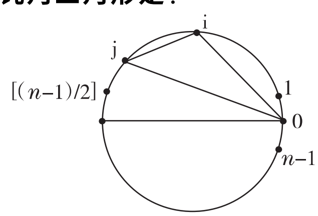
因为上半圆周上最大的等分点的编号是：$[(n-1)/2]=k$.

位于上半圆的钝角三角形是：

$(0,i,j)$，其中

$j=2,3,\cdots,k$；

$i=1,2,\cdots,j-1$.



三角形计数的统一公式及应用举例

统一公式：

$n_3=n[(n-1)/2]([(n-1)/2]-1)/2$★

$n_2=0$，当 n 为奇数；$n_2=n(n-2)/2$，当 n 为偶数.

$n_1=C_n{}^3-n_2-n_3$

举例：

①$n=8$ 时，$n_2=8\times6/2=24$；$n_3=8\times3\times2/2=24$；

$n_1=C_8{}^3-n_2-n_3=56-24-24=8$.

②$n=9$ 时，$n_2=0$；$n_3=9\times4\times3/2=54$；

$n_1=C_9{}^3-n_2-n_3=84-54=30$.

③$n=10$ 时，$n_2=10\times8/2=40$；

$n_3=10\times4\times3/2=60$；

$n_1=C_{10}{}^3-n_2-n_3=120-40-60=20$.

★ 当 n 为奇数时，统一公式已成立. 当 n 为偶数时，我们也已证明

$$n_3=(n/2)(n/2-1)(n/2-2).$$

易见，此时成立

$$n/2-1=[(n-1)/2],$$

$$n/2-2=[(n-1)/2]-1,$$

因此 $n_3=n[(n-1)/2]([(n-1)/2]-1)/2$

所以，统一公式当 n 为偶数时也成立.

双层玻璃窗保温功效可行性分析

问题:众所周知,住房内外的热交换主要部分是通过门窗的热交换. 因此,为了节约空调费用,新式建筑物流行双层玻璃窗的设计,据说保温效果非常好. 试从理论上对双层玻璃窗的功效作一个可行性分析.

分析基点:对比有相同玻璃厚度的单、双层玻璃窗的传热过程,即对比两种情形下单位时间内通过玻璃窗单位面积流出去的热量孰多孰少以及相差的程度.

模型假设

①传热只限于通过门窗上玻璃的热传导,即忽略墙、地板及天花板的传热.

②窗户绝对密封不产生对流,也不考虑辐射.

③只考虑平均稳定热状态.

④两种情形使用完全一样的均匀的窗玻璃.

⑤窗玻璃的面积是影响传热的唯一因素,即忽略窗框形状、深度及所用材料等因素对传热的影响.

双层玻璃窗问题使用的符号

如图 1—3 所示,设 S,D 分别代表双层、单层玻璃的情形. 对情形 S,每片玻璃的厚度为 d;夹层的厚度为 b;室内、室外近玻璃处的(常)温度、夹层靠室内、夹层近外玻璃处的(常)温度分别为 T_1,T_2,T_a,T_b. 对情形 D,每片玻璃的厚度为 $2d$;室内、室外近玻璃处的(常)温度分别为 T_1,T_2.

情形 S,D 单位时间内通过单位面积窗户的传热量分别记为 Q_S,Q_D.

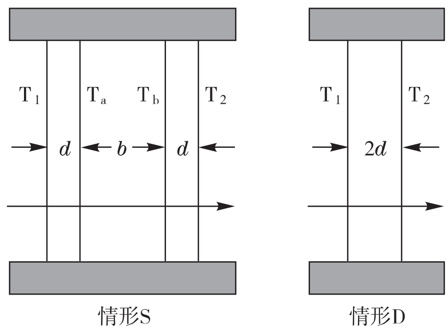
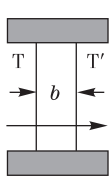


图 1—3

Newton 冷却定律

我们将要应用如下的物理定律——Newton 冷却定律:单位时间内通过厚度为 b,热传导系数为 k 的介质的单位面积的传热量为:$Q = k(T - T')/b$,其中 T 为介质左方的温度;T' 为介质右方的温度,$T > T'$.



双层玻璃窗问题的数学建模

由冷却定律得:$Q_D = k_1(T_1 - T_2)/2d$;$Q_S = k_1(T_1 - T_a)/d = k_2(T_a - T_b)/b = k_1(T_b - T_2)/d$. 其中,$k_1$,$k_2$ 分别为玻璃、空气的传热系数,可查手册求得;d,b,T_1,T_2 可测量求得;T_a,T_b 未知,但可通过计算求出. 易见

$T_a - T_b = s(T_1 - T_a)$;$T_b - T_2 = T_1 - T_a$ (令 $s = k_1 b/(k_2 d)$)

解此联立方程组求得:

$$T_a = ((s+1)T_1 + T_2)/(s+2).$$

进而求得:

$$Q_S = k_1(T_1 - T_2)/(d(s+2)).$$

双层玻璃窗保温功效讨论

由上面求得的公式，得出两种情形下传热量的比值是

$$Q_S/Q_D = 2/(s+2). \qquad (*)$$

下面利用此公式，对双层玻璃窗的保温功效作一个详尽讨论．首先，由 $s>0$ 推出 $Q_S<Q_D$，即在任何情况下双层玻璃窗都有保温功效．

查有关手册知：$0.004<k_1<0.008$；对干燥空气大约 $k_2=0.00025$（焦尔×厘米/（度×秒）），由此得

$s=k_1b/(k_2d)\geq 16b/d=16h$（令 $h=b/d$）；

$Q_S/Q_D=2/(s+2)=f(s)$.

因函数 $f(s)$ 的导数

$$f'(s)=-2/(s+2)^2<0,$$

故它是 s 的严格递减函数，从而 $Q_S/Q_D<2/(16h+2)$．在通常情况下有 $h=b/d>4$，于是

$$Q_S/Q_D=2/(s+2)<2/(64+2)=1/33=3\%.$$

这就是说，在通常情况下，双层玻璃窗的传热量仅为单层玻璃窗的 3%．由此可见，双层玻璃窗的保温效果十分显著．这真是一个又好又省的技术，目前已开始全面推广．

代表席位公平分配问题

假设有人数分别为 103，63 和 34 的 3 个单位．下表显示按通常的人数比例分配方法为此 3 单位分配代表名额的两种分配方案：一种是 20 席名额；另一种是 21 席名额．让我们仔细看一下两种分配结果：20 席时，3 单位依次按 10∶6∶4 分配；21 席时，改为依次按 11∶7∶3 分配．于是，出现对于单位 3 明显不合理的现象：21 席时他们得的名额反而少了．因此提出问题：如何解释上述不合理现象并提出更合理的代表名额分配方案？

			20 席		21 席	
单位	人数	比例 %	理论席位	实际席位	理论席位	实际席位
1	103	51.5	10.3	10	10.815	11
2	63	31.5	6.3	6	6.615	7
3	34	17	3.4	4	3.57	3
总和	200	100	20	20	21	21

表 1－1

不合理现象产生原因及其量化

按人数比例分配应该是公平的，但如何解释上述不合理现象呢？显然，其主要原因是代表席位只取整数值，即必须把公平但不是整数的理论席位值取整，即将小数尾数舍去或增加为 1．所以，执行的实际席位并非理论席位，从而难保其公平性．

一般地，考察人数分别为 p_i，p_j 的单位 i 和单位 j，设按某种分配方案分配给它们实际席位为 n_i，n_j．让我们来讨论在此分配方案下对它们公平性的衡量．

显然，若 $p_i/n_i=p_j/n_j$，则此分配绝对公平．可惜，因 n_i，n_j 经过了取整，上述条件几乎不可能满足，故或者 $p_i/n_i>p_j/n_j$，此时，对单位 i 不公平；或者 $p_i/n_i<p_j/n_j$，此时，对单位 j 不公平．

引进单位 i 的不公平值如下：

$$\begin{aligned} r_i(n_i,n_j) &= (p_i/n_i-p_j/n_j)/(p_j/n_j) \\ &= p_in_j/(p_jn_i)-1. \end{aligned}$$

现在讨论如何在已有分配的基础上修改增加 1 席的新方案．如把 1 席加给单位 i，则单位 j 的不公平值变为：

$$r_j(n_i+1,n_j)=p_j(n_i+1)/(p_in_j)-1;$$

如加给单位 j，则单位 i 的不公平值为

$$r_i(n_i,n_j+1)=p_i(n_j+1)/(p_jn_i)-1.$$