

2008 文登考研过关指导丛书①

揭开考研数学的神秘面纱 ,使你达到胸有成竹 ,应对自如的境界

数学过关基本题型

(数学一、二)

陈文灯 数学团队编著

北京理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学过关基本题型. 1、2 / 陈文灯主编. —北京：
北京理工大学出版社 2007.4

(知识树考研)

ISBN 978 - 7 - 5640 - 1038 - 6

I. 数... II. 陈... III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 -
习题 IV. O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 037868 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京时代华都印刷有限公司

开 本 / 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张 / 24.5

字 数 / 586 千字

版 次 / 2007 年 4 月第 1 版 2007 年 4 月第 1 次印刷

定 价 / 38.00 元

前 言

在近年的考研辅导中,有很多考生向我们反映,自己的基础比较薄弱,学习起来比较困难,难以迅速提高成绩.还有的考生是在职人员,工作非常繁忙,没有很多时间可以支配,希望能有一本考研数学速成书.如何帮助考生在短时间内取得好的学习效果,达到硕士生入学考试数学的分数线,这就是我们研发此书的初衷和愿望.

本书结合我们多年来的考研数学辅导经验编写而成.针对每个题型,设置了以下几个栏目:

- **考试概况** 给出1987年以来各题型在数学一、数学二试卷中的考查情况,填空题、单项选择题和计算证明题中出现的频率.
- **思路点拨** 针对各题型给出了相应的解题思路和方法,简洁而实用.
- **实例精讲** 根据真题难度和题型设置了典型例题,并给出了详细讲解,供考生学习模拟之用.
- **现学现练** 精选相应试题供考生进行实战演练.
- **要点补充** 对一些题型依据需要给出补充注释,帮助考生加强对题型的理解.

考生通过阅读本书,不但能了解历年试卷中试题在高等数学、线性代数、概率论与数理统计等三门课程中的分布情况和难度,而且能够掌握各种基本题型的解题思路和方法.通过对真题的认真演练,揭开考研数学的神秘面纱,达到考试时胸有成竹、应对自如的境界.

成书仓促,并请考研朋友和数学同仁予以指正.

目 录

高等数学篇

第1章 函数、极限和连续	(1)
题型1 函数的定义域的求解	(1)
题型2 函数值域的求解	(2)
题型3 求复合函数的表达式	(2)
题型4 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性等函数性质的判别或证明	(4)
题型5 函数极限尤其是双侧极限存在的判定或求解	(6)
题型6 数列敛散性的判定和证明	(7)
题型7 求数列的极限	(8)
题型8 求数列的 n 项和或积的极限	(9)
题型9 极限式中含有 $a + \sqrt{b}$ 或 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 形式的极限	(11)
题型10 求 $\frac{0}{0}$ 型极限	(12)
题型11 求 ∞ 型极限	(13)
题型12 求 $\infty - \infty$ 型极限	(14)
题型13 求 $0 \cdot \infty$ 型极限	(14)
题型14 求 1^∞ 型极限	(15)
题型15 求 0^0 型极限, ∞^0 型极限	(16)
题型16 极限式中常数值的确定	(17)
题型17 已知一个极限 求另一个极限	(18)
题型18 无穷小的比较或根据无穷小的比较结果反求常数或确定无穷小的阶	(19)
题型19 讨论函数的连续性或已知函数的连续性反求常数	(20)
题型20 函数间断点的判别或求解	(22)
参考答案	(23)
第2章 一元函数微分学	(30)
题型1 与导数或微分定义相关的命题	(30)
题型2 抽象函数、分段函数或含绝对值符号的函数在一点是否可导的判定或求解	(31)
题型3 求一元复合函数的导数或微分	(33)
题型4 求一元隐函数的导数或微分	(35)

题型 5	求一元参数方程所确定的函数的导数或微分	(36)
题型 6	求函数表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分	(37)
题型 7	求函数的 n 阶导数	(38)
题型 8	求函数的泰勒公式或麦克劳林公式或系数	(39)
参考答案	(40)
第 3 章	一元函数积分学	(44)
题型 1	已知函数或其导数的表达式求函数的原函数或已知不定积分求函数表达式	(44)
题型 2	求有理函数的不定积分	(45)
题型 3	求含根式的不定积分	(47)
题型 4	求三角有理式的不定积分	(49)
题型 5	求含有反三角函数、对数函数或指数函数的不定积分	(50)
题型 6	求抽象函数的不定积分	(51)
题型 7	求简单的定积分	(52)
题型 8	求变限积分的导数	(53)
题型 9	求分段函数或含绝对值符号的变限积分或定积分	(54)
题型 10	求广义积分	(56)
参考答案	(57)
第 4 章	中值定理	(62)
题型 1	至少存在一点,使某个等式或不等式成立的证明	(62)
题型 2	至少存在一点 ξ ,使 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 成立的证明	(63)
题型 3	至少存在一点 ξ ,使 $f^{(n)}(\xi) = k(k \neq 0)$ 成立的证明	(64)
题型 4	至少存在两个不同的点,使某个式子成立的证明	(66)
参考答案	(67)
第 5 章	多元函数微分学	(70)
题型 1	考查二元函数极限、连续、偏导、可微的题型	(70)
题型 2	求多元复合函数的偏导数	(71)
题型 3	求多元隐函数的偏导数	(72)
题型 4	求函数的全微分或逆问题	(73)
题型 5	求函数的梯度或方向导数	(74)
参考答案	(75)
第 6 章	向量代数与空间解析几何	(78)
题型 1	向量的数乘、数积、叉积、混合积及向量之间的关系等运算	(78)
题型 2	求直线方程	(80)
题型 3	求平面方程	(81)
题型 4	求两直线、两平面或直线与平面的夹角及位置关系	(83)

题型 5	求空间曲线在坐标面的投影曲线方程	(85)
题型 6	求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面方程或母线平行于坐标轴的柱面方程	(86)
参考答案		(87)
第 7 章 重积分		(90)
题型 1	被积域为矩形、三角形或任意形的二重积分的计算	(90)
题型 2	被积域为圆域、环域、扇域、环扇域且被积函数形如 $f(x^2 + y^2)$ $f\left(\frac{x}{y}\right)$ $f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的 二重积分的计算	(92)
题型 3	交换二重积分的积分次序或化积分为累次积分	(93)
题型 4	积分域为长方体、四面体或任意形体的三重积分的计算	(94)
题型 5	积分域为柱体或由柱面、锥面、旋转抛物面与其他曲面所围成的形体的三重积分 的计算	(94)
题型 6	积分域为球体或球体的一部分或锥体的三重积分的计算	(95)
题型 7	对称区间上的重积分的比较或判定	(97)
参考答案		(97)
第 8 章 无穷级数		(101)
题型 1	无穷级数敛散性的判定	(101)
题型 2	求幂级数的收敛区间或收敛半径	(103)
题型 3	求函数的幂级数展开	(105)
题型 4	有关无穷级数敛散性的证明	(106)
题型 5	求无穷级数的和	(108)
题型 6	求函数的傅里叶级数在某点的收敛值	(110)
题型 7	求函数的傅里叶级数展开式或傅里叶系数或根据傅里叶级数求某无穷级数的 和	(111)
参考答案		(114)
第 9 章 常微分方程		(118)
题型 1	求一阶可分离变量方程、齐次方程或可化为齐次型的方程的通解或特解	(118)
题型 2	求一阶线性微分方程的通解或特解	(120)
题型 3	求伯努利方程的通解或特解	(121)
题型 4	求可降阶的二阶微分方程的通解或特解	(122)
题型 5	求二阶线性齐次或非齐次微分方程的通解或特解	(123)
题型 6	求三阶或以上的齐次或非齐次微分方程的通解或特解	(124)
题型 7	求全微分方程的通解或特解	(125)
题型 8	求欧拉方程的通解或特解	(126)
题型 9	已知方程的特解或通解反求微分方程	(126)
参考答案		(127)

第 10 章 曲线积分与曲面积分	(131)
题型 1 求对弧长的曲线积分	(131)
题型 2 求对坐标的曲线积分	(132)
题型 3 求对面积的曲面积分	(135)
题型 4 求对坐标的曲面积分	(135)
题型 5 求向量场的散度或旋度	(137)
参考答案	(138)
第 11 章 函数方程与不等式证明	(141)
题型 1 根据函数方程式求函数表达式	(141)
题型 2 已知函数方程中含有极限式,求解函数表达式	(141)
题型 3 已知函数在一点的导数及函数方程,求解函数表达式	(142)
题型 4 已知函数方程中含有变上限积分,求函数表达式	(143)
题型 5 已知函数连续,且函数式中含函数的定积分、极限或二重积分,求函数表达式	(144)
题型 6 已知函数方程中含有偏导数条件或曲线积分与路径无关,求函数表达式 ...	(145)
题型 7 存在一个点 $\xi \in (a, b)$ 使得不等式成立或不等式通过变形,一端可写成 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 或 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ 的命题的证明	(147)
题型 8 在某一区间 (a, b) 不等式命题成立的证明	(148)
题型 9 函数 $f(x)$ 二阶和二阶以上可导的不等式命题的证明	(150)
题型 10 积分不等式的证明	(151)
题型 11 杂例	(153)
参考答案	(153)

线性代数篇

第 1 章 行列式	(161)
题型 1 抽象行列式的计算或判定	(161)
题型 2 低阶行列式的计算	(163)
题型 3 n 阶行列式的计算	(165)
参考答案	(170)
第 2 章 矩阵	(175)
题型 1 与矩阵的乘积等运算相关的命题	(175)
题型 2 与初等变换或初等矩阵相关的命题	(176)
题型 3 矩阵秩的运算或已知矩阵的秩反求矩阵中的参数	(178)
题型 4 有关矩阵可逆的证明	(180)
题型 5 求矩阵的逆或已知矩阵的逆反求参数	(181)

题型 6	有关伴随矩阵判定或证明	(184)
题型 7	解矩阵方程	(184)
参考答案		(186)
第 3 章	向量	(189)
题型 1	求向量在一组基下的坐标或过渡矩阵	(189)
题型 2	求向量组的秩或极大线性无关组或根据向量组的秩求向量中的参数	(189)
题型 3	向量组的线性相关性的判定或证明或根据线性相关性求参数	(191)
题型 4	向量组的线性表出的命题的判定或讨论	(196)
参考答案		(197)
第 4 章	线性方程组	(200)
题型 1	与解的性质、判定和结构相关的命题	(200)
题型 2	有关基础解系的证明或判定	(203)
题型 3	求不含参数的线性方程组的通解	(205)
题型 4	含参数的线性方程组的解的讨论	(206)
题型 5	抽象方程组的通解	(209)
题型 6	有关两个方程组的公共解的求解或证明	(210)
参考答案		(212)
第 5 章	特征值与特征向量	(218)
题型 1	求数值矩阵的特征值和特征向量	(218)
题型 2	求抽象矩阵的特征值和特征向量	(220)
题型 3	已知含参数和矩阵的特征值和特征向量, 反求矩阵或矩阵中的参数或未知特征值等问题	(221)
题型 4	有关矩阵相似或对角化的命题	(224)
题型 5	已知矩阵的特征值求行列式	(227)
题型 6	有关特征值和特征向量的证明题	(228)
参考答案		(230)
第 6 章	二次型	(235)
题型 1	有关二次型所对应的矩阵、秩、正负惯性指数等命题	(235)
题型 2	将二次型化为标准形或已知标准形反求参数	(236)
题型 3	有关二次型正定或正定矩阵的讨论或证明	(238)
题型 4	与矩阵合同或规范形相关的命题	(239)
参考答案		(240)

概率论与数理统计篇 *

第 1 章	随机事件和概率	(243)
题型 1	有关事件关系和运算的命题	(243)

题型 2 求古典型概率	(245)
题型 3 求几何型概率	(246)
题型 4 有关条件概率和积事件概率的计算	(247)
题型 5 有关全概率公式和贝叶斯公式的计算	(248)
参考答案	(249)
第 2 章 随机变量及其分布	(252)
题型 1 与一维随机变量概念、性质有关的命题	(252)
题型 2 求一维随机变量的分布函数、分布律或分布密度	(255)
题型 3 已知一维随机变量的分布,求满足一定条件的概率或已知概率求参数	(256)
题型 4 求一维随机变量函数的分布及分布律或分布密度	(257)
参考答案	(258)
第 3 章 二维随机变量及其分布	(261)
题型 1 与二维随机变量概念、性质有关的命题	(261)
题型 2 求二维随机变量的各种分布及独立性的讨论	(262)
题型 3 求两个随机变量简单函数的分布	(268)
参考答案	(270)
第 4 章 随机变量的数字特征	(274)
题型 1 求一维随机变量的数字特征或逆问题	(274)
题型 2 求一维随机变量函数的数学期望	(277)
题型 3 求二维随机变量的数字特征及独立性的讨论	(278)
题型 4 求二维随机变量函数的数字特征	(282)
参考答案	(284)
第 5 章 大数定律和中心极限定理	(287)
题型 1 根据切比雪夫不等式估计概率	(287)
题型 2 与中心极限定理有关的命题	(288)
题型 3 与大数定律有关的命题	(289)
参考答案	(290)
第 6 章 数理统计的基本概念	(292)
题型 1 统计量的分布的求解或判定或已知分布反求统计量	(292)
题型 2 求统计量的数字特征	(294)
题型 3 求统计量取值的概率或样本的容量	(295)
参考答案	(296)
第 7 章 参数估计与假设检验	(298)
题型 1 求矩估计量、矩估计值或最大似然估计量、估计值	(298)
题型 2 评价估计的优劣(无偏性、有效性、一致性等)	(300)
题型 3 有关区间估计或置信区间的命题	(301)
题型 4 正态总体的均值和方差的假设检验	(304)

题型 5 有关两类错误的命题	(305)
参考答案	(306)

应用题篇

第 1 章 几何应用题	(309)
题型 1 一元函数的极值问题	(309)
题型 2 一元函数的最值问题	(310)
题型 3 函数的拐点或凹凸区间的判断或求解	(312)
题型 4 函数的渐近线的判定或求解	(313)
题型 5 方程根的讨论或证明	(315)
题型 6 关于函数图形的命题	(316)
题型 7 求平面曲线的切线和法线方程或逆问题	(318)
题型 8 求平面曲线的曲率和曲率半径相关的应用题	(319)
题型 9 求平面图形的面积或函数的平均值	(319)
题型 10 求已知平行截面面积的空间立体的体积	(321)
题型 11 求平面图形绕坐标轴旋转的旋转体的体积或面积	(322)
题型 12 求曲线的弧长	(325)
题型 13 求空间曲面的切平面和法线方程	(326)
题型 14 求空间曲线的切线或法平面方程	(327)
题型 15 多元函数的极值与最值问题	(328)
题型 16 求曲面的面积	(330)
参考答案	(331)
第 2 章 物理应用题	(339)
题型 1 变力做功问题	(339)
题型 2 压力与引力问题	(340)
题型 3 函数变化率与速度问题	(342)
题型 4 质量、重心、质心、转动惯量问题	(345)
参考答案	(347)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	(351)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解答	(354)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(364)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解答	(367)

高等数学篇

第1章 函数、极限和连续

题型 1 函数的定义域的求解

考试概况 数学一在 1988 年考过 1 道计算题, 数学二在 1988 年考过 1 道计算题.

思路点拨 由解析式子建立的函数, 其定义域是使运算有意义的自变量的集合; 根据实际问题建立的函数, 其定义域是具有实际意义的自变量的集合; 而求复杂函数的定义域, 就是求解由简单函数的定义域(见要点补充 2) 所构成的不等式组的解集.

实例精讲:

【例 1】 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \log_{x-1}(9 - x^2); \quad (2) y = \sqrt{\arcsin x - \frac{\pi}{4}}.$$

【解】 (1) 函数若要有意义, 必满足以下条件:

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < x < 3 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \quad \text{故函数的定义域为 } \{x \mid 1 < x < 2 \text{ 或 } 2 < x < 3\}.$$

(2) 函数若要有意义, 必满足以下条件:

$$\begin{cases} \arcsin x - \frac{\pi}{4} \geq 0 \\ |x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{故函数的定义域为 } \left\{x \mid \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1\right\}.$$

现学现练:

1.1 $y = \sqrt{\sin x} + \lg(16 - x^2).$

1.2 $y = \arcsin \frac{2x-1}{7} + \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}.$

要点补充:

1. 函数表示法的无关性 函数与用什么字母表示无关, 只与定义域和对应法则相关.

2. 简单函数的定义域:

$$y = \frac{1}{x}, \text{ 定义域为 } x \neq 0; y = \sqrt[n]{x}, \text{ 定义域为 } x \geq 0; y = \log_a x, \text{ 定义域为 } x > 0 (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1);$$

$$y = \sin x \text{ 或 } \cos x, \text{ 定义域为 } (-\infty, +\infty); y = \arcsin x \text{ 或 } \arccos x, \text{ 定义域为 } [-1, 1];$$

$$y = \tan x, \text{ 定义域为 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}; y = \cot x, \text{ 定义域为 } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

题型 2 函数值域的求解

考试概况 数学一没有考过,数学二在 2004 年考过 1 道计算题.

思路点拨 (1) 由多项式表达的函数,一般用配方法或判别式法求函数的值域;

(2) 通过求反函数的定义域来求原函数的值域;

(3) 若含三角函数,可利用某些三角函数的有界性如: $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$ 等来求函数的值域;

(4) 利用连续函数在闭区间上存在最值来求函数的值域.

实例精讲:

【例 2】 求下列函数的值域:

$$(1) y = 3 - \sqrt{x^2 - 4x + 9}; \quad (2) y = \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2};$$

$$(3) y = \frac{x+1}{x-1}.$$

【解】 (1) 应用配方法,则 $y = 3 - \sqrt{(x-2)^2 + 5}$, 而 $(x-2)^2 + 5 \geq 5$,

故函数的值域为 $:(-3 - \sqrt{5}]$.

$$(2) y = \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} = 1 - \frac{4}{\sin x + 2}, \text{ 而 } -1 \leq \sin x \leq 1,$$

$$\text{所以 } 1 \leq \sin x + 2 \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sin x + 2} \leq 1 \Rightarrow \frac{4}{3} \leq \frac{4}{\sin x + 2} \leq 4,$$

$$\text{即 } -3 \leq y \leq -\frac{1}{3}, \text{ 故函数的值域为 } :[-3, -\frac{1}{3}].$$

$$(3) \text{ 当 } x \neq 1 \text{ 时, 由原式可得 } x = \frac{1+y}{y-1}, \text{ 即 } y \neq 1.$$

故函数的值域为 $:(-1) \cup (1, +\infty)$.

现学现练:

2.1 求 $y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 17$ 的值域.

2.2 求 $y = 2^x - 2^{2x} + 1$ 的值域.

2.3 求 $y = 3 - 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值域.

题型 3 求复合函数的表达式

考试概况 数学一在 1988 年和 1990 年考过 1 道填空题和 1 道计算题;数学二在 1988 年、1990 年、1992 年、1997 年和 2001 年共考过 1 道填空题、3 道选择题和 1 道计算题. 分段函数的复合是重点.

思路点拨 (1) 利用代入法,将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代;

(2) 利用分析法,抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及定义域

进行分析,注意外层函数的定义域必须包含内层函数的值域,函数才能复合,适用于分段函数的复合;

(3) 利用图示法,借助于图形的直观性.

实例精讲:

【例3】 (2001 数学二) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 则 $f(f(f(x)))$ 等于

(A) 0.

(B) 1.

(C) $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$.

【 】

【解】 由题知, $|f(x)| \leq 1$, 所以 $f(f(x)) = 1$,
则 $f(f(f(x))) = f(1) = 1$. 故选(B).

【例4】 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$ 求 $f(\varphi(x))$.

【解】 $f(\varphi(x)) = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$ 因为外层函数的定义域包含内层函数的值域, 则:

(1) 当 $\varphi(x) < 1$ 时,

或 $x < 0$, $\varphi(x) = x+2 < 1$ 即 $\begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1$;

或 $x \geq 0$, $\varphi(x) = x^2 - 1 < 1$ 即 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2}$.

(2) 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时,

或 $x < 0$, $\varphi(x) = x+2 \geq 1$ 即 $\begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 0$;

或 $x \geq 0$, $\varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1$ 即 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \sqrt{2}$.

综上所述有 $f(\varphi(x)) = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x+2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$.

【例5】 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x+|x|)$, $\varphi(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ 求 $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$.

【解】 先求 $f(\varphi(x)) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + |\varphi(x)|]$ (a)

作出 $u = \varphi(x)$ 的图像,如图 1-1 所示,以及 $f(u) = \frac{1}{2}(u+|u|)$ 的分界 $u=0$ ($x-u$ 平面上的 x 轴).

当 $x < 0$ 时, $u = x$ ($u < 0$); 当 $x \geq 0$ 时, $u = x^2$ ($u \geq 0$).

将以上所得结果代入(a)式,得

$$f(\varphi(x)) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{再求 } \varphi(f(x)) = \begin{cases} f(x), & f(x) < 0 \\ f^2(x), & f(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} v, & v < 0 \\ v^2, & v \geq 0 \end{cases}. \quad (\text{b})$$

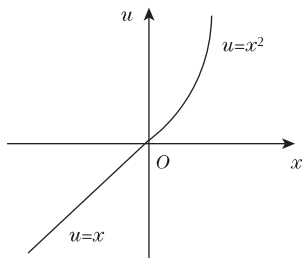


图 1 - 1

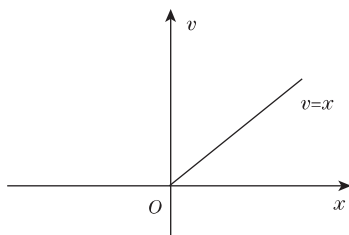


图 1 - 2

作出 $v = f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ 的图像, 如图 1 - 2 所示, 以及 $v = 0$ (即 $x - v$ 平面上的 x 轴).

当 $x < 0$ 时, $v = 0$; 当 $x \geq 0$ 时, $v = x$ ($v \geq 0$).

把以上结果代入 (b) 式, 得 $\varphi(f(x)) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

现学现练:

3.1 (1997 数学二) 设 $g(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 0 \\ x + 2, & x > 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $g(f(x)) =$

(A) $\begin{cases} 2 + x^2, & x < 0 \\ 2 - x, & x \geq 0 \end{cases}$.

(B) $\begin{cases} 2 - x^2, & x < 0 \\ 2 + x, & x \geq 0 \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} 2 - x^2, & x < 0 \\ 2 - x, & x \geq 0 \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} 2 + x^2, & x < 0 \\ 2 + x, & x \geq 0 \end{cases}$.

3.2 设 $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$, 求 $f(f(x))$.

题型 4 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性等函数性质的判别或证明

考试概况 数学一在 1999 年和 2005 年共考过 2 道选择题, 数学二在 1987 年、1996 年、1999 年、2002 年、2004 年和 2005 年共考过 6 道选择题和 1 道计算题.

思路点拨 一般利用定义. 另外, 利用 $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法. 若函数在区间可导, 利用导数判别单调性较简便; 可利用闭区间上连续函数的有界性或有极限的函数必局部有界来判断函数的有界性.

实例精讲:

【例 6】 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; (2) $y = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ ($a > 0$).

【解】 (1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 则

$$f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \ln(-x^2 + x^2 + 1) = 0,$$

故该函数为奇函数.

(2) 令 $f(x) = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ 则

$$f(-x) = (-x) \cdot \frac{a^{-x} - 1}{a^{-x} + 1} = (-x) \cdot \frac{1 - a^x}{1 + a^x} = x \cdot \frac{a^x - 1}{a^x + 1} = f(x),$$

故该函数为偶函数.

【例7】 设 $f(x)$ 为定义在 $(-a, a)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内也单调增加.

【分析】 结论要证明 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内单调增加, 而条件中已知 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加, 易知, 对于 $\forall x \in (-a, 0)$, $-x \in (0, a)$, 则可将未知命题转化为已知命题.

【证明】 $\forall x_1, x_2 \in (-a, 0)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $-x_1, -x_2 \in (0, a)$, 且 $-x_1 > -x_2$.

由于 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加, 故 $f(-x_1) > f(-x_2)$.

又由于 $f(x)$ 为奇函数, 故 $-f(x_1) > -f(x_2)$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

因此 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内也单调增加.

【例8】 设对一切实数 x , 有 $f\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则 $f(x)$ 是周期为_____的周期函数.

【分析】 题设中已知 $f\left(\frac{1}{2} + x\right)$ 与 $f(x)$ 的关系式, 可试求 $f\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\right)$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } f\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\right) &= \frac{1}{2} + \sqrt{f\left(\frac{1}{2} + x\right) - f^2\left(\frac{1}{2} + x\right)} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} \\ &= \frac{1}{2} + \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] = f(x) \quad (\text{由题设 } f(x) \geq \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

即 $f(1 + x) = f(x)$, 故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

现学现练:

4.1 (1987 数学二) $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$ ($-\pi < x < \pi$) 是

(A) 有界函数. (B) 单调函数. (C) 周期函数. (D) 偶函数.

4.2 设函数 $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于 $x = a$, $x = b$ 均对称 ($a < b$), 求证 $y = f(x)$ 是周期函数, 并求其周期.

4.3 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上为().

(A) 有上界无下界 (B) 有下界无上界

(C) 有界, 且 $2 \ln \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0$ (D) 有界, 且 $\ln \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$

要点补充：

1. 判别奇偶函数的其他方法：

- (1) 奇函数的代数和为奇函数, 偶函数的代数和为偶函数;
- (2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数, 奇数个奇函数之积为奇函数;
- (3) 可导的偶函数的导函数为奇函数, 可导的奇函数的导函数为偶函数.

2. 无穷大量和无界变量是不同的. 无穷大量一定是无界变量, 但无界变量不一定是无穷大量. 如函数 $f(x) = x \sin x$ 是无界变量, 但不是无穷大量.

题型 5 函数极限尤其是双侧极限存在的判定或求解

考试概况 数学一在 1992 年、2000 年和 2002 年共考过 2 道选择题和 1 道计算题, 数学二在 1992 年和 2002 年共考过 2 道选择题.

思路点拨 利用定义或相关定理及法则, 考查双侧极限时须利用左右极限的定义.

实例精讲：

【例 9】 下列极限哪些是正确的？

$$(A) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \quad ; \quad (B) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = 0 ;$$

$$(C) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = + \quad ; \quad (D) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 1.$$

【解】 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow +$, 故 $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +$, 因此(C)正确;

$x \rightarrow 0^-$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow -$, 故 $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$, 因此(B)正确, 所以(A)不正确;

又 $x \rightarrow (+$ 或 $-)$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, 故 $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$, 因此(D)正确.

【例 10】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$.

【解】 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2}}$ (分式有理化)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x} + \frac{\sqrt{1-x+x^2}}{x}}$$

$$= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{(-1)\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + (-1)\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}} = -1 \end{cases},$$

因此, 原极限不存在.

【例 11】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2x \arctan x}{e^x - \pi x}$.

【解】 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $e^x \rightarrow +\infty$, $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时 $e^x \rightarrow 0$, $\arctan x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2x \arctan x}{e^x - \pi x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2x \arctan x + \frac{2x}{1+x^2}}{e^x - \pi} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2e^{-x} \arctan x + \frac{2xe^{-x}}{1+x^2}}{1 - \pi e^{-x}} = 1, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2x \arctan x}{e^x - \pi x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2x \arctan x + \frac{2x}{1+x^2}}{e^x - \pi} = 1.$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 2x \arctan x}{e^x - \pi x} = 1.$$

现学现练：

5.1 (1992 数学一、二) 当 $x \rightarrow 1$ 时 函数 $\frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

- (A) 等于 2. (B) 等于 0.
(C) 为 . (D) 不存在但不为 .

5.2 (2000 数学一) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

要点补充：

若 $x \rightarrow \infty$ 的极限式中含有 a^x ($a > 0, a \neq 1$) (特别是 e^x) 或 $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot} x$ 的, 一定分别求出 $x \rightarrow +\infty$ 及 $x \rightarrow -\infty$ 时的极限, 两者相等, 则 $x \rightarrow \infty$ 时的极限存在, 否则不存在.

题型 6 数列敛散性的判定和证明

考试概况 数学一在 1996 年和 2003 年考过 1 道选择题和 1 道计算题; 数学二在 1998 年、1999 年、2002 年和 2003 年共考过 3 道选择题和 2 道计算题.

思路点拨 利用定义, 单调有界准则或夹逼准则.

实例精讲：

【例 12】 (1996 数学一) 设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

【证】 由 $x_1 = 10$ 及 $x_2 = \sqrt{6 + x_1} = \sqrt{16} = 4$ 知 $x_1 > x_2$. 设对某正整数 k 有 $x_k > x_{k+1}$, 则有

$$x_{k+1} = \sqrt{6 + x_k} > \sqrt{6 + x_{k+1}} = x_{k+2},$$

故由数学归纳法知, 对一切正整数 n , 都有 $x_n > x_{n+1}$, 即 $\{x_n\}$ 为单调减少数列. 又显见 $x_n > 0$ ($n = 2, \dots$), 即 $\{x_n\}$ 有下界. 根据单调有界准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 因此可设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则有 $a = \sqrt{6 + a}$ 成立. 从而 $a^2 - a - 6 = 0$. 解得 $a = 3$ 或 $a = -2$, 但因 $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 所以 $a \geq 0$, 舍去 $a = -2$, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.