2008 文登考研过关指导丛书①

揭开考研数学的神秘面纱，使你达到胸有成竹，应对自如的境界

# 数学过关基本题型

## （数学一、二）

陈文灯　数学团队编著

北京理工大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学过关基本题型．1、2 / 陈文灯主编．—北京：
北京理工大学出版社，2007．4
（知识树考研）
ISBN 978－7－5640－1038－6

Ⅰ．数…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．高等数学－研究生－入学考试－
习题　Ⅳ．O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 037868 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（办公室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址 / http：// www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京时代华都印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 24．5
字　　数 / 586 千字
版　　次 / 2007 年 4 月第 1 版　2007 年 4 月第 1 次印刷
定　　价 / 38．00 元

# 前　言

在近年的考研辅导中，有很多考生向我们反映，自己的基础比较薄弱，学习起来比较困难，难以迅速提高成绩. 还有的考生是在职人员，工作非常繁忙，没有很多时间可以支配，希望能有一本考研数学速速成书. 如何帮助考生在短时间内取得好的学习效果，达到硕士生入学考试数学的分数线，这就是我们研发此书的初衷和愿望.

本书结合我们多年来的考研数学辅导经验编写而成. 针对每个题型，设置了以下几个栏目：

■ 考试概况：给出 1987 年以来各题型在数学一、数学二试卷中的考查情况：填空题、单项选择题和计算证明题中出现的频率.

■ 思路点拨：针对各题型给出了相应的解题思路和方法，简洁而实用.

■ 实例精讲：根据真题难度和题型设置了典型例题，并给出了详细讲解，供考生学习模拟之用.

■ 现学现练：精选相应试题供考生进行实战演练.

■ 要点补充：对一些题型依据需要给出补充注释，帮助考生加强对题型的理解.

考生通过阅读本书，不但能了解历年试卷中试题在高等数学、线性代数、概率论与数理统计等三门课程中的分布情况和难度，而且能够掌握各种基本题型的解题思路和方法. 通过对真题的认真演练，揭开考研数学的神秘面纱，达到考试时胸有成竹、应对自如的境界.

成书仓促，并请考研朋友和数学同仁予以指正.

# 目　　录

## 高等数学篇

# 线性代数篇

## 概率论与数理统计篇 *

## 应用题篇

# 高等数学篇

## 第 1 章　函数、极限和连续

### 题型 1　函数的定义域的求解

**考试概况** 数学一在 1988 年考过 1 道计算题 数学二在 1988 年考过 1 道计算题.

**思路点拨** ：由解析式子建立的函数，其定义域是使运算有意义的自变量的集合 ；根据实际问题建立的函数，其定义域是具有实际意义的自变量的集合 ；而求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域（见要点补充 2）所构成的不等式组的解集.

**实例精讲**：

【例 1】　求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_{x-1}(9-x^2)$ ；　(2) $y=\sqrt{\arcsin x-\frac{\pi}{4}}$.

【解】　(1) 函数若要有意义，必满足以下条件：

$$\begin{cases}9-x^2>0\\ x-1>0\\ x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3<x<3\\ x>1\\ x\neq 2\end{cases}$$

，故 函数的定义域为：$\{x\mid 1<x<2 \text{ 或 } 2<x<3\}$.

(2) 函数若要有意义，必满足以下条件：

$$\begin{cases}\arcsin x-\frac{\pi}{4}\geqslant 0\\ |x|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

，故函数的定义域为：$\left\{x\,\middle|\,\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}$.

**现学现练**：

1.1　$y=\sqrt{\sin x}+\lg(16-x^2)$.

1.2　$y=\arcsin\frac{2x-1}{7}+\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$.

**要点补充**：

1. 函数表示法的无关性 ：函数与用什么字母表示无关，只与定义域和对应法则相关.

2. 简单函数的定义域：

$y=\frac{1}{x}$，定义域为 ：$x\neq 0$ ；$y=\sqrt[2n]{x}$，定义域为 ：$x\geqslant 0$ ；$y=\log_a x$，定义域为 ：$x>0$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ ；

$y=\sin x$ 或 $\cos x$，定义域为：$(-\quad,+\quad)$ ；$y=\arcsin x$ 或 $\arccos x$，定义域为：$[-1,1]$ ；

$y=\tan x$，定义域为 ：$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$ ；$y=\cot x$，定义域为 ：$x\neq k\pi$，$k\in Z$.

## 题型 2 函数值域的求解

<u>考试概况</u> 数学一没有考过 数学二在 2004 年考过 1 道计算题.

<u>思路点拨</u>:(1) 由多项式表达的函数,一般用配方法或判别式法求函数的值域;

(2) 通过求反函数的定义域来求原函数的值域;

(3) 若含三角函数,可利用某些三角函数的有界性如:$|\sin x| \leqslant 1$,$|\cos x| \leqslant 1$ 等来求函数的值域;

(4) 利用连续函数在闭区间上存在最值来求函数的值域.

<u>实例精讲</u>:

【例 2】 求下列函数的值域:

(1) $y = 3 - \sqrt{x^2 - 4x + 9}$;   (2) $y = \dfrac{\sin x - 2}{\sin x + 2}$;

(3) $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

【解】 (1) 应用配方法,则 $y = 3 - \sqrt{(x - 2)^2 + 5}$,而 $(x - 2)^2 + 5 \geqslant 5$,

故函数的值域为:$(-\ \ , 3 - \sqrt{5}]$.

(2) $y = \dfrac{\sin x - 2}{\sin x + 2} = 1 - \dfrac{4}{\sin x + 2}$,而 $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$,

所以 $1 \leqslant \sin x + 2 \leqslant 3 \Rightarrow \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{\sin x + 2} \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{4}{3} \leqslant \dfrac{4}{\sin x + 2} \leqslant 4$,

即 $-3 \leqslant y \leqslant -\dfrac{1}{3}$,故函数的值域为:$\left[-3, -\dfrac{1}{3}\right]$.

(3) 当 $x \neq 1$ 时,由原式可得 $x = \dfrac{1 + y}{y - 1}$,即 $y \neq 1$.

故函数的值域为:$(-\ \ , 1) \cup (1, +\ \ )$.

<u>现学现练</u>:

2.1 求 $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 17$ 的值域.

2.2 求 $y = 2^x - 2^{2x} + 1$ 的值域.

2.3 求 $y = 3 - 2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值域.

## 题型 3 求复合函数的表达式

<u>考试概况</u> 数学一在 1988 年和 1990 年考过 1 道填空题和 1 道计算题 数学二在 1988 年、1990 年、1992 年、1997 年和 2001 年共考过 1 道填空题、3 道选择题和 1 道计算题. 分段函数的复合是重点.

<u>思路点拨</u>:(1) 利用代入法,将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代;

(2) 利用分析法,抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及定义域

进行分析，注意外层函数的定义域必须包含内层函数的值域，函数才能复合，适用于分段函数的复合；

(3) 利用图示法，借助于图形的直观性.

实例精讲：

【例 3】 (2001 数学二)　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f(f(f(x)))$ 等于

(A) 0.　　(B) 1.

(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$.　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$.　　【　】

【解】 由题知，$|f(x)|\leqslant 1$，所以 $f(f(x))=1$，

则 $f(f(f(x)))=f(1)=1$. 故选 (B).

【例 4】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(\varphi(x))$.

【解】 $f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$，因为外层函数的定义域包含内层函数的值域，则：

(1) 当 $\varphi(x)<1$ 时，

或 $x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x<-1\end{cases}\Rightarrow x<-1$；

或 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2<2\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}$.

(2) 当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时，

或 $x<0$，$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x\geqslant -1\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant x<0$；

或 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow x\geqslant\sqrt{2}$.

综上所述有　$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$.

【例 5】 设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$\varphi(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(\varphi(x))$，$\varphi(f(x))$.

【解】 先求 $f(\varphi(x))=\frac{1}{2}[\varphi(x)+|\varphi(x)|]$　　(a)

作出 $u=\varphi(x)$ 的图像，如图 1-1 所示，以及 $f(u)=\frac{1}{2}(u+|u|)$ 的分界 $u=0$ ($x-u$ 平面上的 $x$ 轴).

当 $x<0$ 时，$u=x$，($u<0$) 当 $x\geqslant 0$ 时，$u=x^2$，($u\geqslant 0$).

将以上所得结果代入 (a) 式，得

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}.$$

再求 $\varphi(f(x)) = \begin{cases} f(x), & f(x) < 0 \\ f^2(x), & f(x) \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} v, & v < 0 \\ v^2, & v \geqslant 0 \end{cases}$. (b)

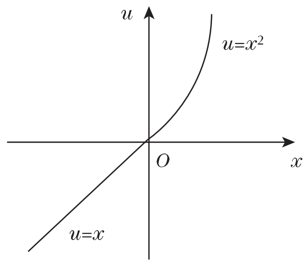


图1-1

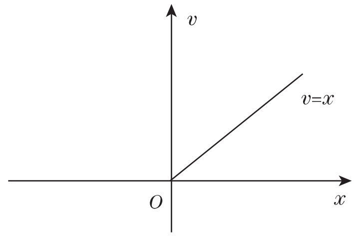


图1-2

作出 $v = f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ 的图像,如图1-2所示,以及 $v = 0$(即 $x - v$ 平面上的 $x$ 轴).

当 $x < 0$ 时,$v = 0$;当 $x \geqslant 0$ 时,$v = x\ (v \geqslant 0)$.

把以上结果代入(b)式,得 $\varphi(f(x)) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geqslant 0 \end{cases}$.

**现学现练:**

3.1 (1997 数学二) 设 $g(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leqslant 0 \\ x + 2, & x > 0 \end{cases}$,$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geqslant 0 \end{cases}$,则 $g(f(x)) =$

(A) $\begin{cases} 2 + x^2, & x < 0 \\ 2 - x, & x \geqslant 0 \end{cases}$.　　(B) $\begin{cases} 2 - x^2, & x < 0 \\ 2 + x, & x \geqslant 0 \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} 2 - x^2, & x < 0 \\ 2 - x, & x \geqslant 0 \end{cases}$.　　(D) $\begin{cases} 2 + x^2, & x < 0 \\ 2 + x, & x \geqslant 0 \end{cases}$.

3.2 设 $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & |x| \leqslant 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$,求 $f(f(x))$.

## 题型 4 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性等函数性质的判别或证明

**考试概况** 数学一在1999年和2005年共考过2道选择题;数学二在1987年、1996年、1999年、2002年、2004年和2005年共考过6道选择题和1道计算题.

**思路点拨**:一般利用定义.另外,利用 $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法;若函数在区间可导,利用导数判别单调性较简便;可利用闭区间上连续函数的有界性或有极限的函数必局部有界来判断函数的有界性.

**实例精讲:**

【例6】 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;　　(2) $y = x\frac{a^x - 1}{a^x + 1}\ (a > 0)$.

【解】 (1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,则

$$f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})$$
$$= \ln(-x^2+x^2+1) = 0,$$

故该函数为奇函数.

(2) 令 $f(x) = x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$,则

$$f(-x) = (-x)\cdot\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1} = (-x)\cdot\frac{1-a^x}{1+a^x} = x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1} = f(x),$$

故该函数为偶函数.

【例 7】　设 $f(x)$ 为定义在 $(-a, a)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内也单调增加.

【分析】　结论要证明 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内单调增加,而条件中已知 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加,易知,对于 $\forall x \in (-a, 0)$, $-x \in (0, a)$,则可将未知命题转化为已知命题.

【证明】　$\forall x_1, x_2 \in (-a, 0)$,且 $x_1 < x_2$,则 $-x_1, -x_2 \in (0, a)$,且 $-x_1 > -x_2$.

由于 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加,故 $f(-x_1) > f(-x_2)$.

又由于 $f(x)$ 为奇函数,故 $-f(x_1) > -f(x_2)$,即 $f(x_1) < f(x_2)$.

因此,$f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内也单调增加.

【例 8】　设对一切实数 $x$,有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$,则 $f(x)$ 是周期为________的周期函数.

【分析】　题设中已知 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)$ 与 $f(x)$ 的关系式,可试求 $f\left(\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\right)$.

【解】　
$$f\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right) - f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)}$$
$$= \frac{1}{2} + \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] = f(x),\left(\text{由题设 } f(x) \geqslant \frac{1}{2}\right)$$

即　$f(1+x) = f(x)$,故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

**现学现练:**

4.1　(1987 数学二) $f(x) = |x\sin x| e^{\cos x}$ $(- \quad < x < \quad)$ 是

(A) 有界函数.　　(B) 单调函数.　　(C) 周期函数.　　(D) 偶函数.

4.2　设函数 $y = f(x)$, $x \in (- \quad , + \quad)$ 的图形关于 $x = a$, $x = b$ 均对称 $(a < b)$,求证:$y = f(x)$ 是周期函数,并求其周期.

4.3　函数 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ 上为(　　).

(A) 有上界无下界　　　　(B) 有下界无上界

(C) 有界,且 $2\ln\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 0$　　　　(D) 有界,且 $\ln\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$

**要点补充：**

1. 判别奇偶函数的其他方法：

 (1) 奇函数的代数和为奇函数;偶函数的代数和为偶函数；

 (2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数;奇数个奇函数之积为奇函数；

 (3) 可导的偶函数的导函数为奇函数;可导的奇函数的导函数为偶函数.

2. 无穷大量和无界变量是不同的. 无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量. 如函数 $f(x) = x\sin x$ 是无界变量，但不是无穷大量.

## 题型 5 函数极限尤其是双侧极限存在的判定或求解

**考试概况** 数学一在 1992 年、2000 年和 2002 年共考过 2 道选择题和 1 道计算题;数学二在 1992 年和 2002 年共考过 2 道选择题.

**思路点拨** 利用定义或相关定理及法则，考查双侧极限时须利用左右极限的定义.

**实例精讲：**

【例 9】 下列极限哪些是正确的？

(A) $\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x}} = \quad$；  (B) $\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$；

(C) $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = + \quad$；  (D) $\lim\limits_{x\to} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

【解】 $x\to0^+$ 时，$\frac{1}{x}\to+\quad$，故 $e^{\frac{1}{x}}\to+\quad$，因此(C)正确；

$x\to0^-$ 时，$\frac{1}{x}\to-\quad$，故 $e^{\frac{1}{x}}\to0$，因此(B)正确;所以(A)不正确；

又 $x\to\quad(+\quad$ 或 $-\quad)$ 时，$\frac{1}{x}\to0$，故 $e^{\frac{1}{x}}\to1$，因此(D)正确.

【例 10】 求 $\lim\limits_{x\to}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to}\dfrac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}$ (分式有理化)

$$= \lim_{x\to}\frac{2}{\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}+\dfrac{\sqrt{1-x+x^2}}{x}}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to+}\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+1}} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-}\dfrac{2}{(-1)\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1}+(-1)\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+1}} = -1 \end{cases},$$

因此，原极限不存在.

【例 11】 求 $\lim\limits_{x\to}\dfrac{e^x+2x\arctan x}{e^x-\pi x}$.

【解】 因为当 $x\to+$ 　时，$e^x\to+$ 　，$\arctan x\to\frac{\pi}{2}$ 当 $x\to-$ 　时，$e^x\to0$，$\arctan x\to-\frac{\pi}{2}$，

所以 $$\lim_{x\to+}\frac{e^x+2x\arctan x}{e^x-\pi x}=\lim_{x\to+}\frac{e^x+2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}}{e^x-\pi}\text{（洛必达法则）}$$

$$=\lim_{x\to+}\frac{1+2e^{-x}\arctan x+\frac{2xe^{-x}}{1+x^2}}{1-\pi e^{-x}}=1,$$

$$\lim_{x\to-}\frac{e^x+2x\arctan x}{e^x-\pi x}=\lim_{x\to-}\frac{e^x+2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}}{e^x-\pi}=1.$$

于是 $$\lim_{x\to}\frac{e^x+2x\arctan x}{e^x-\pi x}=1.$$

**现学现练：**

5.1 （1992 数学一、二） 当 $x\to1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

（A）等于 2. （B）等于 0.

（C）为 　. （D）不存在但不为 　.

5.2 （2000 数学一） 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$.

**要点补充：**

若 $x\to$ 　的极限式中含有 $a^x$（$a>0,a\neq1$）（特别是 $e^x$），或 $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot} x$ 的，一定分别求出 $x\to+$ 　及 $x\to-$ 　时的极限，两者相等，则 $x\to$ 　时的极限存在，否则不存在.

## 题型 6　数列敛散性的判定和证明

**考试概况** 数学一在 1996 年和 2003 年考过 1 道选择题和 1 道计算题 数学二在 1998 年、1999 年、2002 年和 2003 年共考过 3 道选择题和 2 道计算题.

**思路点拨** 利用定义，单调有界准则或夹逼准则.

**实例精讲：**

【例 12】 （1996 数学一） 设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$（$n=1,2,\cdots$），试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

【证】 由 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}=4$ 知 $x_1>x_2$. 设对某正整数 $k$ 有 $x_k>x_{k+1}$，则有

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

故由数学归纳法知，对一切正整数 $n$，都有 $x_n>x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 为单调减少数列. 又显见 $x_n>0$（$n=2,\cdots$），即 $\{x_n\}$ 有下界. 根据单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to}x_n$ 存在. 因此可设 $\lim\limits_{n\to}x_n=a$，则有 $a=\sqrt{6+a}$ 成立. 从而 $a^2-a-6=0$. 解得 $a=3$，$a=-2$，但因 $x_n>0$（$n=1,2,\cdots$），所以 $a\geqslant0$，舍去 $a=-2$，得 $\lim\limits_{n\to}x_n=3$.