版权专有　侵权必究

图书在版编目（CIP）数据

数学 10 年真题点评. 4 / 陈文灯主编. —北京：北京理工大学出版社，2006. 2
（考研白皮书系）
ISBN 7-5640-0714-1

Ⅰ. 数… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 007382 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（办公室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址 / http：//www. bitpress. com. cn
电子邮箱 / chiefeditor@bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京中创彩色印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米 ×1092 毫米　1/16
印　　张 / 10. 75
字　　数 / 262 千字
版　　次 / 2006 年 2 月第 1 版　2006 年 2 月第 1 次印刷
定　　价 / 15. 00 元

图书出现印装质量问题，本社负责调换

需要全本请访问 www. ertongbook. com

目　录

近 10 年考题路线图（1997 年 - 2006 年） …… Ⅰ

近 10 年真题集

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 …… 1

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 …… 4

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 …… 7

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 …… 10

2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 …… 13

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 …… 16

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 …… 19

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 …… 22

1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 …… 25

1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 …… 28

近 10 年真题分析、详解及评注

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注…… 31

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注…… 45

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注…… 60

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注…… 75

2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注…… 87

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注…… 98

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注 …… 110

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注 …… 123

1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注 …… 136

1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注 …… 147

附 文登学校分校一览表

2003 - 2005 年文登学校考研数学优秀者名单

2006 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(四)

一、填空题:1 ~ 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.

(1) $\lim\limits_{n\to}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$_____.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导,且 $f'(x)=e^{f(x)}$,$f(2)=1$. 则 $f'''(2)=$_____.

(3) 设函数 $f(u)$ 可微,且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$,则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $dz\big|_{(1,2)}=$_____.

(4) 已知 α_1,α_2 为 2 维列向量,知阵 $A=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)$,$B=(\alpha_1,\alpha_2)$. 若行列式 $|A|=6$,则 $|B|=$_____.

(5) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$,E 为 2 阶单位矩阵,矩阵 B 满足 $BA=B+2E$,则 $B=$_____.

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布,则 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$_____.

二、选择题:7 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0$,$f''(x)>0$,Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则

(A) $0<dy<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<dy$.

(C) $\Delta y<dy<0$.　　(D) $dy<\Delta y<0$.　　【　】

(8) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$,则

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在.　　(B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在.

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在.　　(D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.　　【　】

(9) 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(x)\leqslant g(x)$,则对任何 $c\in(0,1)$,

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^{c}f(t)\,dt\geqslant\int_{\frac{1}{2}}^{c}g(t)\,dt$.　　(B) $\int_{\frac{1}{2}}^{c}f(t)\,dt\leqslant\int_{\frac{1}{2}}^{c}g(t)\,dt$.

(C) $\int_{c}^{1}f(t)\,dt\geqslant\int_{c}^{1}g(t)\,dt$.　　(D) $\int_{c}^{1}f(t)\,dt\leqslant\int_{c}^{1}g(t)\,dt$.　　【　】

(10) 设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$,$y_2(x)$,C 为任意常数,则该方程的通解是

(A) $C[y_1(x)-y_2(x)]$.　　(B) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$.

(C) $C[y_1(x)+y_2(x)]$.　　(D) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$.　　【　】

(11) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$ 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是

(A) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$. 【 】

(12) 设 A 为 3 阶矩阵,将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B,再将 B 的第 1 列的 - 1 倍加到第 2 列得 C,记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则

(A) $C=P^{-1}AP$. (B) $C=PAP^{-1}$.

(C) $C=P^{T}AP$. (D) $C=PAP^{T}$. 【 】

(13) 设 A、B 为两个随机事件,且 $P(B)>0$,$P(A|B)=1$,则必有

(A) $P(A\cup B)>P(A)$. (B) $P(A\cup B)>P(B)$.

(C) $P(A\cup B)=P(A)$. (D) $P(A\cup B)=P(B)$. 【 】

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$,随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$

则必有

(A) $\sigma_1<\sigma_2$. (B) $\sigma_1>\sigma_2$.

(C) $\mu_1<\mu_2$. (D) $\mu_1>\mu_2$. 【 】

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分,解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 7 分)

设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$,$x>0$,$y>0$. 求

(Ⅰ) $g(x)=\lim\limits_{y\to+}f(x,y)$;

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}g(x)$.

(16) (本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\,dxdy$,其中 D 是由直线 $y=x$,$y=1$,$x=0$ 所围成的平面区域.

(17) (本题满分 10 分)

证明:当 $0<a<b<\pi$ 时,

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

(18) (本题满分 8 分)

在 xOy 坐标平面上,连续曲线 L 过点 M(1,0),其上任意点 P(x,y)($x\neq 0$) 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a>0$).

(Ⅰ) 求 L 的方程;

(Ⅱ) 当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\dfrac{8}{3}$ 时,确定 a 的值.

(19) (本题满分 10 分)

试确定常数 A,B,C 的值,使得

$$e^{x}(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+0(x^3),$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

其中 $0(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

(20)(本题满分 13 分)

设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^T$, 问 a 为何值时, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关? 当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

(21)(本题满分 13 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^T$, 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(Ⅰ) 求 A 的特征值与特征向量;

(Ⅱ) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 A, 使得 $Q^TAQ=\boldsymbol{\Lambda}$;

(Ⅲ) 求 A 及 $\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 13 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中 a,b,c 为常数, 且 X 的数学期望 $EX=-0.2$, $P\{Y\leqslant 0\mid X\leqslant 0\}=0.5$, 记 $Z=X+Y$. 求

(Ⅰ) a,b,c 的值;

(Ⅱ) Z 的概率分布;

(Ⅲ) $P\{X=Z\}$.

(23)(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

令 $Y=X^2$, $F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数, 求

(Ⅰ) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(Ⅱ) $\mathrm{Cov}(X,Y)$;

(Ⅲ) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试
数学 (四)

一、填空题 (本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ _____.

(2) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解为_____.

(3) 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$,则 $dz|_{1,0}=$ _____.

(4) 设行向量组 $(2,1,1,1)$,$(2,1,a,a)$,$(3,2,1,a)$,$(4,3,2,1)$ 线性相关,且 $a\neq1$,则 $a=$ _____.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为三维列向量,记三阶矩阵

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3),B=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|A|=1$,那么 $|B|=$ _____.

(6) 从数 1,2,3,4 中任取一个数,记为 X,再从 1,…,X 中任取一个数,记为 Y,则 $P\{Y=2\}=$ _____.

二、选择题 (本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 当 a 取下列哪个值时,函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点. ( )

(A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

(8) 设 $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$,$I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\,d\sigma$,$I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}$,则 ( )

(A) $I_3>I_2>I_1$. (B) $I_1>I_2>I_3$.

(C) $I_2>I_1>I_3$. (D) $I_3>I_1>I_2$.

(9) 下列结论中正确的是 ( )

(A) $\int_1^+\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 都收敛.

(B) $\int_1^+\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 都发散.

(C) $\int_1^+\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 发散,$\int_0^1\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 收敛.

(D) $\int_1^+\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 收敛,$\int_0^1\dfrac{dx}{x(x+1)}$ 发散.

(10) 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$,下列命题中正确的是 ( )

(A) $f(0)$ 是极大值,$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极小值. (B) $f(0)$ 是极小值,$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极大值.

(C) f (0) 是极大值,f$\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极大值. (D) f (0) 是极小值,f$\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极小值.

(11) 以下四个命题中,正确的是 ( )

(A) 若 f' (x) 在 (0,1) 内连续,则 f (x) 在 (0,1) 内有界.

(B) 若 f (x) 在 (0,1) 内连续,则 f (x) 在 (0,1) 内有界.

(C) 若 f' (x) 在 (0,1) 内有界,则 f (x) 在 (0,1) 内有界.

(D) 若 f (x) 在 (0,1) 内有界,则 f' (x) 在 (0,1) 内有界.

(12) 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵,E 为 n 阶单位矩阵,若 B = E + AB,C = A + CA,则 B - C 为 ( )

(A) E. (B) - E. (C) A. (D) - A.

(13) 设二给随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若随机事件 {X = 0} 与 {X + Y = 1} 相互独立,则 ( )

(A) a = 0.2,b = 0.3. (B) a = 0.1,b = 0.4.

(C) a = 0.3,b = 0.2. (D) a = 0.4,b = 0.1.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$为独立同分布的随机变量列,且均服从参数为 λ ($\lambda>1$) 的指数分布,记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数,则 ( )

(A) $\lim\limits_{n\to}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$. (B) $\lim\limits_{n\to}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

(C) $\lim\limits_{n\to}P\left\{\frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$. (D) $\lim\limits_{n\to}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

三、(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 8 分)

求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$.

(16) (本题满分 8 分)

设 f (u) 具有二阶连续导数,且 $g(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)+yf\left(\frac{x}{y}\right)$,求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}-y^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)$.

(17) (本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

(18 分) (本题满分 9 分)

求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$上的最大值和最小值.

(19)(本题满分 8 分)

设 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续,且 $f(0)=0$,$f'(x)\geqslant 0$,$g'(x)\geqslant 0$. 证明:

对任何 $a\in[0,1]$,有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\,dx+\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx\geqslant f(a)g(1).$$

(20)(本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

$$\left.\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3&=0,\\2x_1+3x_2+5x_3&=0,\\x_1+x_2+ax_3&=0,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

和

$$\left.\begin{aligned}x_1+bx_2+cx_3&=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3&=0\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

同解,求 a,b,c 的值.

(21)(本题满分 13 分)

设 A 为三阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的三维列向量,且满足

$$A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,A\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,A\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(Ⅰ)求矩阵 B,使得 $A(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)B$;

(Ⅱ)求矩阵 A 的特征值;

(Ⅲ)求可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 13 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求:(Ⅰ)(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$,$f_Y(y)$;

(Ⅱ)$Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$;

(Ⅲ)$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

(23)(本题满分 13 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ $(n>2)$ 为独立同分布的随机变量,且均服从 $N(0,1)$,记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,$Y_i=X_i-\bar{X}$,$i=1,2,\cdots,n$. 求:

(Ⅰ)求 Y_i 的方差 DY_i,$i=1,2,\cdots,n$;

(Ⅱ)求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$;

(Ⅲ)$P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}$.

2004 年全国硕士研究生入学统一考试
数学 (四)

一、填空题 (本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x - a}(\cos x - b) = 5$,则 $a =$ _____,$b =$ _____.

(2) 设 $y = \arctan e^x - \ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} =$ _____.

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2} \leqslant x < \dfrac{1}{2}, \\ -1, & x \geqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\,dx =$ _____.

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,$B = P^{-1}AP$,其中 P 为三阶可逆矩阵,则 $B^{2004} - 2A^2 =$ _____.

(5) 设 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ 是实正交矩阵,且 $a_{11} = 1$,$b = (1,0,0)^T$,则线性方程组 $Ax = b$ 的解是_____.

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X > \sqrt{DX}\} =$ _____.

二、选择题 (本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 函数 $f(x) = \dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界. ( )

(A) $(-1,0)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,2)$ (D) $(2,3)$

(8) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$,$g(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则 ( )

(A) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

(9) 设 $f(x) = |x(1-x)|$,则 ( )

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(B) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且 $(0,0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,0)$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(10) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$,则 (　　)

(A) $F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续.

(B) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,在 $x=0$ 点不可导.

(C) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且满足 $F'(x)=f(x)$.

(D) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,但不一定满足 $F'(x)=f(x)$.

(11) 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f'(a)>0$,$f'(b)<0$,则下列结论中错误的是 (　　)

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)=0$.

(12) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价,则必有 (　　)

(A) 当 $|A|=a\ (a\neq 0)$ 时,$|B|=a$.　　(B) 当 $|A|=a\ (a\neq 0)$ 时,$|B|=-a$.

(C) 当 $|A|\neq 0$ 时,$|B|=0$.　　(D) 当 $|A|=0$ 时,$|B|=0$.

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$,对给定的 $\alpha\in(0,1)$,数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$,若 $P\{|X|<x\}=\alpha$,则 x 等于 (　　)

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$.　　(B) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　　(C) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　　(D) $u_{1-\alpha}$.

(14) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n>1)$ 独立同分布,且其方差为 $\sigma^2>0$. 令随机变量 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,则 (　　)

(A) $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$.　　(B) $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$.

(C) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$.　　(D) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$.

三、解答题 (本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

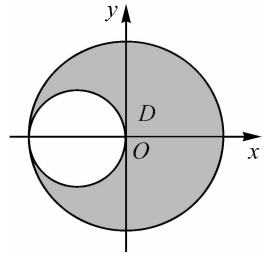
(15) (本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

(16) (本题满分 8 分)

求 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\,d\sigma$,

其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域 (如右图).



(17) (本题满分 8 分)

设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数,且满足

$$f'_u(u,v)+f'_v(u,v)=uv.$$

求 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程,并求通解.

(18) (本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为 $Q=100-5P$,其中价格 $P\in(0,20)$,Q 为需求量.

(Ⅰ) 求需求量对价格的弹性 E_d ($E_d>0$);

需要全本请访问 www.ertongbook.com

(Ⅱ) 推导$\frac{dR}{dP}=Q(1-E_d)$(其中 R 为收益),并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时,降低价格反而使收益增加.

(19)(本题满分 9 分)

设 $F(x)=\begin{cases}e^{2x}, & x\leqslant 0,\\ e^{-2x}, & x>0,\end{cases}$ S 表示夹在 x 轴与曲线 $y=F(x)$ 之间的面积. 对任何 $t>0$,$S_1(t)$ 表示矩形 $-t\leqslant x\leqslant t,0\leqslant y\leqslant F(t)$ 的面积. 求

(Ⅰ) $S(t)=S-S_1(t)$ 的表达式;

(Ⅱ) $S(t)$ 的最小值.

(20)(本题满分 13 分)

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0,\\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1.\end{cases}$$

已知 $(1,-1,1,-1)^T$ 是该方程组的一个解. 试求

(Ⅰ) 方程组的全部解,并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解;

(Ⅱ) 该方程组满足 $x_2=x_3$ 的全部解.

(21)(本题满分 13 分)

设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2,$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征值. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,-3)^T$ 都是 A 的属于特征值 6 的特征向量.

(Ⅰ) 求 A 的另一特征值和对应的特征向量;

(Ⅱ) 求矩阵 A.

(22)(本题满分 13 分)

设 A,B 为两个随机事件,且 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B|A)=\frac{1}{3}$,$P(A|B)=\frac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

求:(Ⅰ) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY};

(Ⅲ) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

(23)(本题满分 13 分)

设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布,在 $X=x\ (0<x<1)$ 的条件下,随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布,求:

(Ⅰ) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度;

(Ⅱ) Y 的概率密度;

(Ⅲ) 概率 $P\{X+Y>1\}$.

2003 年全国硕士研究生入学统一考试
数学 (四)

一、填空题 (本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$ _____.

(2) $\int_{-1}^{1}(|x|+x)e^{-|x|}dx=$ _____.

(3) 设 $a>0$,$f(x)=g(x)=\begin{cases}a, & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$ 而 D 表示全平面,则

$$I=\iint_D f(x)g(y-x)dxdy=_____.$$

(4) 设 A,B 均为 3 阶矩阵,E 为 3 阶单位矩阵,已知 $AB=2A+B$,$B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$,

则 $(A-E)^{-1}=$ _____.

(5) 设 n 维向量 $\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T$,$a<0$,E 为 n 阶单位矩阵.

$$A=E-\alpha\alpha^T,\quad B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T,$$

其中 A 的逆矩阵为 B,则 $a=$ _____.

(6) 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.5,$EX=EY=0$,$EX^2=EY^2=2$,则 $E(X+Y)^2=$ _____.

二、选择题 (本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的圆括号内)

(1) 曲线 $y=x\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ( )

(A) 仅有水平渐近线. (B) 仅有铅直渐近线.

(C) 既有铅直又有水平渐近线. (D) 既有铅直又有斜渐近线.

(2) 设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续,则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的 ( )

(A) 充分必要条件. (B) 必要但非充分条件.

(C) 充分但非必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

(3) 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值,则下列结论正确的是 ( )

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数大于零. (B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数等于零.

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数小于零. (D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数不存在.

(4) 设矩阵

$$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

已知矩阵 A 相似于 B,则秩 (A - 2E) 与秩 (A - E) 之和等于 ( )

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

(5) 对于任意两个事件 A 和 B ( )

(A) 若 $AB \neq \varnothing$,则 A,B 一定独立. (B) 若 $AB \neq \varnothing$,则 A,B 有可能独立.

(C) 若 $AB = \varnothing$,则 A,B 一定独立. (D) 若 $AB = \varnothing$,则 A,B 一定不独立.

(6) 设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布,且它们不相关,则 ( )

(A) X 与 Y 一定独立. (B) (X,Y) 服从二维正态分布.

(C) X 与 Y 未必独立. (D) X + Y 服从一维正态分布.

三、(本题满分 8 分)

设 $f(x) = \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi x} - \frac{1}{\pi (1 - x)}$, $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$,试补充定义 f (0),使得 f (x) 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上连续.

四、(本题满分 8 分)

设 f (u,v) 具有二阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$,又 $g(x,y) = f\left[xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right]$,求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

五、(本题满分 8 分)

计算二重积分

$$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2 + y^2)\, dxdy,$$

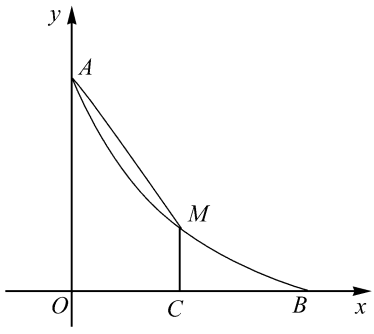
其中积分区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant \pi\}$.

六、(本题满分 9 分)

设 a > 1,$f(t) = a^t - at$ 在 (- , +) 内的驻点为 t (a),问 a 为何值时,t (a) 最小?并求出最小值.

七、(本题满分 9 分)

设 y = f (x) 是第一象限内连接点 A (0,1),B (1,0) 的一段连续曲线,M (x,y) 为该曲线上任意一点,点 C 为 M 在 x 轴上的投影,O 为坐标原点,若梯形 OCMA 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}$,求 f (x) 的表达式.



八、(本题满分 8 分)

设某商品从时刻 0 到时刻 t 的销售量为 $x(t) = kt, t \in [0,T]$, (k > 0),欲在 T 时将数量为 A 的该商品销售完,试求

(1) t 时的商品剩余量,并确定 k 的值;

(2) 在时间段 [0,T] 上的平均剩余量.

九、(本题满分 13 分)

设有向量组 (Ⅰ): $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,3)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,a+2)^T$ 和向量组 (Ⅱ): $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,2,a+3)^T, \boldsymbol{\beta}_2 = (2,1,a+6)^T, \boldsymbol{\beta}_3 = (2,1,a+4)^T$,试问:当 a 为何值时,向量组 (Ⅰ) 与 (Ⅱ) 等价?当 a 为何值时,向量组 (Ⅰ) 与 (Ⅱ) 不等价?

十、(本题满分 13 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ 可逆,向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 A^* 的一个特征向量,λ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 对应的特征值,其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵,试求 a,b 和 λ 的值.

十一、(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & \text{若 } x\in[1,8],\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

F(x) 是 X 的分布函数,求随机变量 Y=F(X) 的分布函数.

十二、(本题满分 13 分)

对于任意两个事件 A 和 B,$0<P(A)<1$,$0<P(B)<1$,

$$\rho=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\bar{A})P(\bar{B})}}$$

称做事件 A 和 B 的相关系数.

(1) 证明事件 A 和 B 独立的充分必要条件是其相关系数等于零;

(2) 利用随机变量相关系数的基本性质,证明 $|\rho|\leqslant 1$.

2002 年全国硕士研究生入学统一考试
数学 (四)

一、填空题 (本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,把答案填在题中横线上.)

(1) 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$,则 $\lim\limits_{n\to} \ln\left[\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)}\right]^n =$ _____.

(2) 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$,则 $\int xf'(x)\,dx =$ _____.

(3) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,$B = A^2 - 3A + 2E$,则 $B^{-1} =$ _____.

(4) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (\alpha, 0, c)$,$\boldsymbol{\alpha}_2 = (b, c, 0)$,$\boldsymbol{\alpha}_3 = (0, a, b)$ 线性无关,则 a, b, c 必满足关系式_____.

(5) 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

概率 X \ Y	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 X 和 Y 的相关系数 $\rho =$ _____.

二、选择题 (本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的圆括号内)

(1) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义,在开区间 (a, b) 内可导,则 ( )

(A) 当 $f(a) f(b) < 0$ 时,存在 $\xi \in (a, b)$,使 $f(\xi) = 0$.

(B) 对任何 $\xi \in (a, b)$,有 $\lim\limits_{x\to\xi} [f(x) - f(\xi)] = 0$.

(C) 当 $f(a) = f(b)$ 时,存在 $\xi \in (a, b)$,使 $f'(\xi) = 0$.

(D) 存在 $\xi \in (a, b)$,使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

(2) 设函数 $f(x)$ 连续,则在下列变上限定积分定义的函数中,必为偶函数的是 ( )

(A) $\int_0^x t[f(t) + f(-t)]\,dt$.　　(B) $\int_0^x t[f(t) - f(-t)]\,dt$.

(C) $\int_0^x f(t^2)\,dt$.　　(D) $\int_0^x f^2(t)\,dt$.

(3) A, B 为 n 阶矩阵 A^*, B^* 分别为 A, B 对应的伴随矩阵. 分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$,则 C 的伴随矩阵 $C^* =$ ( )

(A) $\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$.

(4) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量,它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$,分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$,则 ( )

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(C) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(5) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$,则根据列维-林德伯格 (Levy-Lindberg) 中心极限定理,当 n 充分大时,S_n 近似服从正态分布,只要 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ ( )

(A) 有相同的数学期望. (B) 有相同的方差.

(C) 服从同一指数分布. (D) 服从同一离散型分布.

三、(本题满分 5 分)

求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,dt\right]du}{x(1-\cos x)}$$

四、(本题满分 7 分)

设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数,且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定,求 du.

五、(本题满分 6 分)

设 $f(\sin^2 x)=\frac{x}{\sin x}$,求 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\,dx$.

六、(本题满分 7 分)

设闭区域 $D:x^2+y^2\leqslant y,x\geqslant 0$. $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数,且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D(u,v)\,dudv.$$

求 $f(x,y)$.

七、(本题满分 7 分)

设某商品需求量 Q 是价格 p 的单调减少函数:$Q=Q(p)$,其需求弹性 $\eta=\frac{2p^2}{192-p^2}>0$.

(1) 设 R 为总收益函数,证明 $\frac{dR}{dp}=Q(1-\eta)$.

(2) 求 $p=6$ 时,总收益对价格的弹性,并说明其经济意义.

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $g(x)>0$. 利用闭区间上连续函数性质,证明存在一点 $\xi\in[a,b]$,使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

九、(本题满分 8 分)

设四元齐次线性方程组 (Ⅰ) 为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0.\end{cases}$$

且已知另一四元齐次线性方程组 (Ⅱ) 的一个基础解系为

需要全本请访问 www.ertongbook.com