版权专有　侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

数学10年真题点评.3/陈文灯主编.—北京:北京理工大学出版社,2006.2

(考研白皮书系)

ISBN　7-5640-0713-3

Ⅰ.数...　Ⅱ.陈...　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第007383号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号

邮　　编 / 100081

电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)

网　　址 / http://www.bitpress.com.cn

电子邮箱 / chiefeditor@bitpress.com.cn

经　　销 / 全国各地新华书店

印　　刷 / 北京时代华都印刷有限公司

开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16

印　　张 / 10.75

字　　数 / 262千字

版　　次 / 2006年2月第1版　2006年2月第2次印刷

定　　价 / 15.00元

图书出现印装质量问题,本社负责调换

需要全本请访问 www.ertongbook.com

前　言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届，积累了近百份数学试卷，这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶，也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题，除其内容外，还包含诸多有价值的信息，例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性。为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法，我们将 1997 年～2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题做了精心的解析，编写成《考研数学·10 年真题点评》系列丛书，奉献给广大考研朋友，书中对每道真题通过“分析”、“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明语言给出解题思路；在“详解”中用简捷、新颖方法给出详细解答；在“评注”中简单强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧。这里要特别指出的是，书中对 2004 和 2005 年真题中的解答题，标明了参考的评分标准，使读者明了完整准确解题应有的步骤。

我们希望读者在使用本书时，不要轻易地翻阅真题的答案，只有当百思不得其解时才查阅答案；而且每做完一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注，进行比对和总结。如果能如此下功夫做完最近十年的数学考研真题，读完全书，我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上，在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃，而且在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高，从而更加从容地面对研究生入学考试。

由于成书时间仓促，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者和同仁指正。

编　者

2006 年 1 月

2006 年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题

一、填空题：1－6 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$_____.

(2)设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，$f(2)=1$，则 $f'''(2)=$_____.

(3)设函数 $f(u)$ 可微，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,2)}=$_____.

(4)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$_____.

(5)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$_____.

(6)设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$ $(-\infty<x<+\infty)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，其样本方差为 S^2，则 $ES^2=$_____.

二、选择题：7－14 小题，每小题 4 分，共 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7)设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.　　【　　】

(8)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在.　　(B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在.

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在.　　(D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.　　【　　】

(9)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.　　【　　】

(10)设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$，$y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程的通解是

(A) $C[y_1(x)-y_2(x)]$.　　(B) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$.

(C) $C[y_1(x)+y_2(x)]$.　　(D) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$.　　【　　】

(11)设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件

$\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是

(A)若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(B)若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C)若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(D)若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$. 【　　】

(12)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是

(A)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(C)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(D)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关. 【　　】

(13)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

(A)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.　　(B)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$.

(C)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$.　　(D)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$. 【　　】

(14)设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$

则必有

(A)$\sigma_1<\sigma_2$.　　(B)$\sigma_1>\sigma_2$.

(C)$\mu_1<\mu_2$.　　(D)$\mu_1>\mu_2$. 【　　】

三、解答题：15－23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 7 分）

设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$，$x>0$，$y>0$，求

(Ⅰ)$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；

(Ⅱ)$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$.

(16)（本题满分 7 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=1$，$x=0$ 所围成的平面区域.

(17)（本题满分 10 分）

证明：当 $0<a<b<\pi$ 时，$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

(18)（本题满分 8 分）

在 xOy 坐标平面上，连续曲线 L 过点 $M(1,0)$，其上任意点 $P(x,y)(x\neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax（常数 $a>0$）.

(Ⅰ)求 L 的方程；

(Ⅱ)当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\dfrac{8}{3}$ 时，确定 a 的值.

(19)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $s(x)$.

(20)(本题满分 13 分)

设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$,问 a 为何值时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关?当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时,求其一个极大线性无关组,并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

(21)(本题满分 13 分)

设 3 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$;

(Ⅲ)求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\left(\boldsymbol{A}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^6$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

令 $Y=X^2$,$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数. 求:

(Ⅰ)Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(Ⅱ)$\mathrm{Cov}(X,Y)$;

(Ⅲ)$F\left(-\dfrac{1}{2},4\right)$.

(23)(本题满分 13 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数,求:

(1)θ 的矩估计;

(2)θ 的最大似然估计.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

2005 年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1)**极限** $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$_____.

(2)**微分方程** $xy'+y=0$ **满足初始条件** $y(1)=2$ **的特解为**=_____.

(3)**设二元函数** $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$,**则** $dz|_{(1,0)}=$_____.

(4)**设行向量组** $(2,1,1,1),(2,1,a,a),(3,2,1,a),(4,3,2,1)$ **线性相关,且** $a\neq 1$,**则** $a=$_____.

(5)**从数** $1,2,3,4$ **中任取一个数,记为** X,**再从** $1,\cdots,X$ **中任取一个数,记为** Y,**则** $P\{Y=2\}=$_____.

(6)**设二维随机变量** (X,Y) **的概率分布为**

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若随机事件 $\{X=0\}$ **与** $\{X+Y=1\}$ **相互独立,则** $a=$_____,$b=$_____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的圆括号内.)

(7)**当** a **取下列哪个值时,函数** $f(x)=2x^3-9x^2+12-a$ **恰有两个不同的零点.**

(A)2. (B)4. (C)6. (D)8. 【 】

(8)**设** $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, $I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\,d\sigma$, $I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\,d\sigma$,**其中** $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,**则**

(A) $I_3>I_2>I_1$. (B) $I_1>I_2>I_3$.

(C) $I_2>I_1>I_3$. (D) $I_3>I_1>I_2$. 【 】

(9)**设** $a_n>0$, $n=1,2,\cdots$,**若** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **发散,** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ **收敛,则下列结论正确的是**

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ **收敛,** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ **发散.** (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ **收敛,** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ **发散.**

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ **收敛.** (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ **收敛.** 【 】

(10)**设** $f(x)=x\sin x+\cos x$,**下列命题中正确的是**

(A) $f(0)$ **是极大值,** $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ **是极小值.** (B) $f(0)$ **是极小值,** $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ **是极大值.**

(C)$f(0)$是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极大值. (D)$f(0)$是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极小值. 【 】

(11)以下四个命题中，正确的是

(A)若 $f'(x)$在$(0,1)$内连续，则 $f(x)$在$(0,1)$内有界.

(B)若 $f(x)$在$(0,1)$内连续，则 $f(x)$在$(0,1)$内有界.

(C)若 $f'(x)$在$(0,1)$内有界，则 $f(x)$在$(0,1)$内有界.

(D)若 $f(x)$在$(0,1)$内有界，则 $f'(x)$在$(0,1)$内有界. 【 】

(12)设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵. 若 a_{11}，a_{12}，a_{13}为三个相等的正数，则 a_{11}为

(A)$\frac{\sqrt{3}}{3}$. (B)3. (C)$\frac{1}{3}$. (D)$\sqrt{3}$. 【 】

(13)设 λ_1，λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充分必要条件是

(A)$\lambda_1=0$. (B)$\lambda_2=0$.

(C)$\lambda_1\neq 0$. (D)$\lambda_2\neq 0$. 【 】

(14)设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知. 现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值 $\bar{x}=20(\mathrm{cm})$，样本标准差 $s=1(\mathrm{cm})$，则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是

(A)$\left(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$. (B)$\left(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$.

(C)$\left(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$. (D)$\left(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$. 【 】

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$.

(16)(本题满分 8 分)

设 $f(u)$具有二阶连续导数，且 $g(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)+yf\left(\frac{x}{y}\right)$，求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(17)(本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

(18 分)(本题满分 9 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$ 在区间$(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

(19)(本题满分 8 分)

设 $f(x)$，$g(x)$在$[0,1]$上的导数连续，且 $f(0)=0$，$f'(x)\geqslant 0$，$g'(x)\geqslant 0$. 证明：

对任何 $a\in[0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1).$$

(20)(本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=0,\\ 2x_1+3x_2+5x_3&=0,\\ x_1+x_2+ax_3&=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

和

$$\left.\begin{aligned} x_1+bx_2+cx_3&=0,\\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3&=0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

同解，求 a、b、c 的值.

(21)(本题满分 13 分)

设 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶、n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵.

(Ⅰ)计算 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{\mathrm{n}}\end{pmatrix}$；

(Ⅱ)利用(Ⅰ)的结果判断矩阵 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是否为正定矩阵，并证明你的结论.

(22)(本题满分 13 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1,0<x<1,0<y<2x,\\ 0,\text{其他}.\end{cases}$$

求：(Ⅰ)(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

(Ⅱ)$Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

(Ⅲ)$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

(23)(本题满分 13 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其样本均值为 $\overline{X}$. 记 $Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1,2,\cdots,n$.

(Ⅰ)求 Y_i 的方差 $\boldsymbol{D}Y_i$，$i=1,2,\cdots,n$；

(Ⅱ)求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{cov}(Y_1,Y_n)$；

(Ⅲ)若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，求常数 c.

2004 年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1)若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$_____,$b=$_____.

(2)函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 确定,其中函数 $g(y)$ 可微,且 $g(y)\neq 0$,则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$_____.

(3)设 $f(x)=\begin{cases}xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ -1, & x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\,dx=$_____.

(4)二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为_____.

(5)设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$_____.

(6)设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$,总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本,则 $E\left[\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=$_____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7)函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

(A)$(-1,0)$ (B)$(0,1)$ (C)$(1,2)$ (D)$(2,3)$ 【 】

(8)设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$ 则

(A)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.

(B)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C)$x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D)$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关. 【 】

(9)设 $f(x)=|x(1-x)|$,则

(A)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B)$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D)$x=0$ 不是 $f(x)$的极值点,$(0,0)$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点. 【 】

(10)设有以下命题:

①若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

②若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 收敛.

③若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

④若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛.

则以上命题中正确的是

(A)①② (B)②③ (C)③④ (D)①④ 【 】

(11)设 $f'(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f'(a)>0$,$f'(b)<0$,则下列结论中错误的是

(A)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)>f(a)$.

(B)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)>f(b)$.

(C)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f'(x_0)=0$.

(D)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)=0$. 【 】

(12)设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,则必有

(A)当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq0)$时,$|\boldsymbol{B}|=a$. (B)当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq0)$时,$|\boldsymbol{B}|=-a$.

(C)当 $|\boldsymbol{A}|\neq0$ 时,$|\boldsymbol{B}|=0$. (D)当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时,$|\boldsymbol{B}|=0$. 【 】

(13)设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$,若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的互不相等的解,则对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

(A)不存在. (B)仅含一个非零解向量.

(C)含有两个线性无关的解向量. (D)含有三个线性无关的解向量. 【 】

(14)设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$,对给定的 $\alpha\in(0,1)$,数 u_α 满足 $\boldsymbol{P}\{X>u_\alpha\}=\alpha$,若 $\boldsymbol{P}\{|X|<x\}=\alpha$,则 x 等于

(A)$u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B)$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C)$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D)$u_{1-\alpha}$. 【 】

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

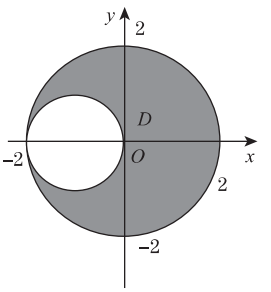
(15)(本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

(16)(本题满分 8 分)

求 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$,

其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和$(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域(如右图).



(17)(本题满分 8 分)

设 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上连续,且满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t, x \in [a,b),$$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t,$$

证明： $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x.$

(18)(**本题满分 9 分**)

设某商品的需求函数为 $Q=100-5P$，其中价格 $P\in(0,20)$，Q 为需求量.

(Ⅰ)求需求量对价格的弹性 $E_d(E_d>0)$；

(Ⅱ)推导 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-E_d)$(其中 R 为收益)，并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加.

(19)(**本题满分 9 分**)

设级数 $\dfrac{x^4}{2\cdot 4}+\dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$

的和函数为 $S(x)$. 求：

(Ⅰ)$S(x)$所满足的一阶微分方程；(Ⅱ)$S(x)$的表达式.

(20)(**本题满分 13 分**)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+2,-3a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-\boldsymbol{b}-2,\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,3,-3)^{\mathrm{T}}$. 试讨论当 a，b 为何值时，

(Ⅰ)$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

(Ⅲ)$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

(21)(**本题满分 13 分**)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

(22)(**本题满分 13 分**)

设 A，B 为两个随机事件，且 $\boldsymbol{P}(A)=\dfrac{1}{4}$，$\boldsymbol{P}(B|A)=\dfrac{1}{3}$，$\boldsymbol{P}(A|B)=\dfrac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

求：(Ⅰ)二维随机变量(X,Y)的概率分布；

(Ⅱ)X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}；

(Ⅲ)$Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

(23)(**本题满分 13 分**)

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha,\\ 0, & x\leqslant\alpha,\end{cases}$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

其中参数 $\alpha>0,\beta>1$. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，

（Ⅰ）当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的矩估计量；

（Ⅱ）当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的最大似然估计量；

（Ⅲ）当 $\beta=2$ 时，求未知参数 α 的最大似然估计量.

2003 年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1)设 $f(x)=\begin{cases} x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & \text{若 } x\neq 0, \\ 0, & \text{若 } x=0, \end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续,则 λ 的取值范围是_____.

(2)已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切,则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$_____.

(3)设 $a>0$,$f(x)=g(x)=\begin{cases} a, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 而 D 表示全平面,则

$$I=\iint_D f(x)g(y-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\text{_____}.$$

(4)设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$,$a<0$;$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,矩阵

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$,则 $a=$_____.

(5)设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9,若 $Z=X-0.4$,则 Y 与 Z 的相关系数为_____.

(6)设总体 X 服从参数为 2 的指数分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,则当 $n\to\infty$ 时,$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于_____.

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数,且 $f'(0)$ 存在,则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

(A)在 $x=0$ 处左极限不存在. (B)有跳跃间断点 $x=0$.

(C)在 $x=0$ 处右极限不存在. (D)有可去间断点 $x=0$. 【 】

(2)设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值,则下列结论正确的是

(A)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零.

(B)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

(C)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零.

(D)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在. 【 】

(3)设 $p_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$,$q_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$,$n=1,2,\cdots$,则下列命题正确的是

(A)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(B)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(C)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定.

(D)若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定. 【 】

(4)设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩等于 1,则必有

(A)$a=b$ 或 $a+2b=0$. (B)$a=b$ 或 $a+2b\neq 0$.

(C)$a\neq b$ 且 $a+2b=0$. (D)$a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$. 【 】

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维向量,下列结论不正确的是

(A)若对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2,+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(B)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s.

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关. 【 】

(6)将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$,$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$,$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$,$A_4=\{$正面出现两次$\}$,则事件

(A)A_1,A_2,A_3 相互独立. (B)A_2,A_3,A_4 相互独立.

(C)A_1,A_2,A_3 两两独立. (D)A_2,A_3,A_4 两两独立. 【 】

三、(本题满分 8 分)

设 $$f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)},x\in\left[\frac{1}{2},1\right),$$

试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续.

四、(本题满分 8 分)

设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$,又 $g(x,y)=f\left[xy,\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]$,求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

五、(本题满分 8 分)

计算二重积分

$$I=\iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\pi\}$.

六、(本题满分 9 分)

求幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}(|x|<1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

七、(本题满分 9 分)

设 $F(x)=f(x)g(x)$,其中函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件:

$$f'(x)=g(x),g'(x)=f(x),\text{且 } f(0)=0,f(x)+g(x)=2\mathrm{e}^x.$$

(1)求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(2)求出 $F(x)$ 的表达式.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$在$[0,3]$上连续,在$(0,3)$内可导,且 $f(0)+f(1)+f(2)=3,f(3)=1$ 试证必存在 $\xi\in(0,3)$,使 $f'(\xi)=0$.

九、(本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \qquad\vdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$. 试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足何种关系时,

(1)方程组仅有零解;

(2)方程组有非零解. 在有非零解时,求此方程组的一个基础解系.

十、(本题满分 13 分)

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0),$$

其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1,特征值之积为 -12.

(1)求 a,b 的值.

(2)利用正交变换将二次型 f 化为标准形,并写出所用的正交变换的对应的正交矩阵.

十一、(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & \text{若 } x\in[1,8],\\ 0, & \text{其他;}\end{cases}$$

$F(x)$是 X 的分布函数,求随机变量 $Y=F(X)$的分布函数.

十二、(本题满分 13 分)

设随机变量 X 与 Y 独立,其中 X 的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix},$$

而 Y 的概率密度为 $f(y)$,求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$.

2002 年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分. 把答案填在题中横线上)

(1)设常数 $a\neq\frac{1}{2}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$_____.

(2)交换积分次序:$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x=$_____.

(3)设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$,三维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,1,1)^T$. 已知 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,则 $a=$_____.

(4)设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

概率 X \ Y	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 X^2 和 Y^2 的协方差 $\mathrm{cov}(X^2,Y^2)=$_____.

(5)设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x-\theta)}, & \text{若 } x\geqslant\theta,\\ 0, & \text{若 } x<\theta;\end{cases}$$

而 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,则未知参数 θ 的矩估计量为_____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义,在开区间 (a,b) 内可导,则

(A)当 $f(a)f(b)<0$ 时,存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

(B)对任何 $\xi\in(a,b)$,有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$.

(C)当 $f(a)=f(b)$ 时,存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f'(\xi)=0$.

(D)存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. 【 】

(2)设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}x^n$ 的收敛半径为

(A)5. (B)$\frac{\sqrt{5}}{3}$. (C)$\frac{1}{3}$. (D)$\frac{1}{5}$. 【 】

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

(A)当 $n>m$ 时仅有零解. (B)当 $n>m$ 时必有非零解.

(C)当 $m>n$ 时仅有零解. (D)当 $m>n$ 时必有非零解. 【 】

(4)设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵. 已知 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量,则矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是

(A)$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ (B)$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$. (C)$\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$. (D)$(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$. 【 】

(5)设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布,则

(A)$X+Y$ 服从正态分布. (B)X^2+Y^2 服从 χ^2 分布.

(C)X^3 和 Y^2 都服从 χ^2 分布. (D)X^2/Y^2 服从 F 分布. 【 】

三、(本题满分 5 分)

求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}.$$

四、(本题满分 7 分)

设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续编导数,且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定,求 $\mathrm{d}u$.

五、(本题满分 6 分)

设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$,求 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

六、(本题满分 7 分)

设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域;D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0,x=a$ 所围成的平区域,其中 $0<a<2$.

(1)试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1;D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2;

(2)问当 a 为何值时,V_1+V_2 取得最大值?试求此最大值.

七、(本题满分 7 分)

(1)验证函数 $y(x)=1+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^9}{9!}+\cdots+\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程

$$y''+y'+y=e^x;$$

(2)利用(1)的结果求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $g(x)>0$. 利用闭区间上连续函数性质,证明存在一点 $\xi\in[a,b]$,使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

九、(本题满分 8 分)

设齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\ \quad\vdots\\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0,\end{cases}$$

其中 $a\neq 0,b\neq 0,n\geqslant 2$. 试讨论 a,b 为何值时,方程组仅有零解、有无穷多组解?在有无穷多组解时,求出全部解,并且基础解系表示全部解.

需要全本请访问 www.ertongbook.com