版权专有　侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

数学10年真题点评.2/陈文灯主编.—北京:北京理工大学出版社,2006.2
(考研白皮书系)
ISBN 7-5640-0712-5

Ⅰ.数...　Ⅱ.陈...　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第007384号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱 / chiefeditor@bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京时代华都印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 10
字　　数 / 243千字
版　　次 / 2006年2月第1版　2006年2月第2次印刷
定　　价 / 15.00元

图书出现印装质量问题,本社负责调换

需要全本请访问 www.ertongbook.com

前　言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届，积累了近百份数学试卷，这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶，也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题，除其内容外，还包含诸多有价值的信息，例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性，为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法，我们将 1997 年～2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题做了精心的解析，编写成《考研数学·10 年真题点评》系列丛书，奉献给广大考研朋友，书中对每道真题通过“分析”、“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明语言给出解题思路；在“详解”中用简捷、新颖方法给出详细解答；在“评注”中简单强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧，这里要特别指出的是，书中对 2004、2005 和 2006 年真题中的解答题，标明了参考的评分标准，使读者明了完整准确解题应有的步骤。

我们希望读者在使用本书时，不要轻易地翻阅真题的答案，只有当百思不得其解时才查阅答案；而且每做完一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注，进行比对和总结。如果能如此下功夫做完最近十年的数学考研真题，读完全书，我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上，在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃，而且在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高，从而更加从容地面对研究生入学考试。

由于成书时间仓促，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者和同仁指正。

编　者

2006 年 1 月

2006 年全国硕士研究生入学统一考试
数学二试题

一、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为_____.

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_____.

(3) 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=$_____.

(4) 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是_____.

(5) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-x\mathrm{e}^y$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$_____.

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$_____.

二、选择题：本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$. Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.　　【　】

(8) 设 $f(x)$ 是奇函数，除 $x=0$ 外处处连续，$x=0$ 是其第一类间断点，则 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是

(A) 连续的奇函数.　　(B) 连续的偶函数.

(C) 在 $x=0$ 间断的奇函数.　　(D) 在 $x=0$ 间断的偶函数.　　【　】

(9) 设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}$，$h'(1)=1$，$g'(1)=2$，则 $g(1)$ 等于

(A) $\ln 3-1$.　　(B) $-\ln 3-1$.

(C) $-\ln 2-1$.　　(D) $\ln 2-1$.　　【　】

(10) 函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y''-y'-2y=3x\mathrm{e}^x$.　　(B) $y''-y'-2y=3\mathrm{e}^x$.

(C) $y''+y'-2y=3x\mathrm{e}^x$.　　(D) $y''+y'-2y=3\mathrm{e}^x$.　　【　】

(11) 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 等于

(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.　　(B) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.　　【　】

(12) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y) \neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.　　【　】

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.　　【　】

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.　　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$.

(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$.　　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.　　【　】

三、解答题：本题共 9 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

试确定常数 A,B,C 的值，使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

(16)(本题满分 10 分)

求 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$.

(17)(本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$，计算二重积分

$$I=\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy.$$

(18)(本题满分 12 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；

(Ⅱ) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(19)(本题满分 10 分)

证明:当 $0<a<b<\pi$ 时,

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

(20)(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(Ⅰ)验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;

(Ⅱ)若 $f(1)=0,f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式.

(21)(本题满分 12 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=4t-t^2,\end{cases}(t\geqslant 0)$,

(Ⅰ)讨论 L 的凹凸性;

(Ⅱ)过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线,求切点 (x_0,y_0),并写出切线的方程;

(Ⅲ)求此切线与 L(对应于 $x\leqslant x_0$ 的部分)及 x 轴所围成的平面图形的面积.

(22)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=-1\end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

(Ⅰ)证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ)求 a,b 的值及方程组的通解.

(23)(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

2005 年全国硕士研究生入学统一考试
数学二试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1)设 $y=(1+\sin x)^x$,则 $\mathrm{d}y\Big|_{x=\pi}=$_____.

(2)曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为_____.

(3)$\displaystyle\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=$_____.

(4)微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为_____.

(5)当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 的等价无穷小,则 $k=$_____.

(6)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量,记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$,那么 $|\boldsymbol{B}|=$_____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7)设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A)处处可导. (B)恰有一个不可导点.

(C)恰有两个不可导点. (D)至少有三个不可导点. 【 】

(8)设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N",则必有

(A)$F(x)$ 是偶函数$\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数. (B)$F(x)$ 是奇函数$\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C)$F(x)$ 是周期函数$\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数. (D)$F(x)$ 是单调函数$\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数. 【 】

(9)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 确定,则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是

(A)$\dfrac{1}{8}\ln 2+3$. (B)$-\dfrac{1}{8}\ln 2+3$. (C)$-8\ln 2+3$. (D)$8\ln 2+3$.

【 】

(10)设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数,a,b 为常数,则 $\displaystyle\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=$

(A)$ab\pi$. (B)$\dfrac{ab}{2}\pi$. (C)$(a+b)\pi$. (D)$\dfrac{a+b}{2}\pi$. 【 】

(11)设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.　　【　】

(12)设函数 $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则

(A) $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.　　【　】

(13)设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1\neq 0$.　　(B) $\lambda_2\neq 0$.　　(C) $\lambda_1=0$.　　(D) $\lambda_2=0$.　　【　】

(14)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$.　　(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$.　　(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\boldsymbol{B}^*$.

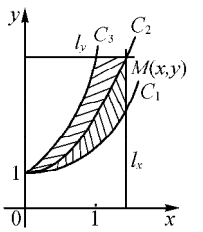
【　】

三、(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 11 分)

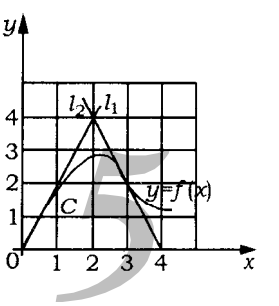
设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

(16)(本题满分 11 分)



如图，C_1 和 C_2 分别是 $y=\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^x)$ 和 $y=\mathrm{e}^x$ 的图像，过点 $(0,1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数的图像. 过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y，记 C_1,C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$；C_2,C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$，求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.

(17)(本题满分 11 分)



如图，曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点 $(3,2)$ 是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线，其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x$.

(18)(本题满分 12 分)

用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$,并求其满足 $y\Big|_{x=0}=1$,$y'\Big|_{x=0}=2$ 的特解.

(19)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$,$f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点 $\eta,\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\xi)=1$.

(20)(本题满分 10 分)

已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$,并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

(21)(本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

(22)(本题满分 9 分)

确定常数 a,使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^T$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^T$,$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^T$,$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^T$ 线性表示,但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(23)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c),a,b,c 不全为零,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$($k$ 为常数),且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的通解.

2004 年全国硕士研究生入学统一考试
数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分. 把答案填在题中横线上.)

(1)设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$,则 $f(x)$的间断点为 $x=$_____.

(2)设函数 $y(x)$由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1,\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$确定,则曲线 $y=y(x)$向上凸的 x 取值范围为_____.

(3)$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=$_____.

(4)设函数 $z=z(x,y)$由方程 $z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$ 确定,则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____.

(5)微分方程 $(y+x^3)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$ 满足 $y\Big|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$ 的特解为_____.

(6)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵,则 $|\boldsymbol{B}|=$_____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7)把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\displaystyle\int_0^x\cot t^2\mathrm{d}t$,$\beta=\displaystyle\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t$,$\gamma=\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A)α,β,γ. (B)α,γ,β. (C)β,α,γ. (D)β,γ,α. 【 】

(8)设 $f(x)=|x(1-x)|$,则

(A)$x=0$ 是 $f(x)$的极值点,但$(0,0)$不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(B)$x=0$ 不是 $f(x)$的极值点,但$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(C)$x=0$ 是 $f(x)$的极值点,且$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(D)$x=0$ 不是 $f(x)$的极值点,$(0,0)$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点. 【 】

(9)$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于

(A)$\displaystyle\int_1^2\ln^2x\mathrm{d}x$. (B)$\displaystyle2\int_1^2\ln x\mathrm{d}x$.

(C)$\displaystyle2\int_1^2\ln(1+x)\mathrm{d}x$. (D)$\displaystyle\int_1^2\ln^2(1+x)\mathrm{d}x$. 【 】

(10)设函数 $f(x)$连续,且 $f'(0)>0$,则存在 $\delta>0$,使得

(A)$f(x)$在$(0,\delta)$内单调增加.

(B)$f(x)$在$(-\delta,0)$内单调减少.

(C)对任意的$x\in(0,\delta)$有$f(x)>f(0)$.

(D)对任意的$x\in(-\delta,0)$有$f(x)>f(0)$. 【 】

(11)微分方程$y''+y=x^2+1+\sin x$的特解形式可设为

(A)$y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.

(B)$y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.

(C)$y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$.

(D)$y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$. 【 】

(12)设函数$f(u)$连续,区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$,则$\iint\limits_D f(xy)\,dx\,dy$等于

(A)$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)\,dy$.

(B)$2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\,dx$.

(C)$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\,dr$.

(D)$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\,r\,dr$. 【 】

(13)设A是3阶方阵,将A的第1列与第2列交换得B,再把B的第2列加到第3列得C,则满足$AQ=C$的可逆矩阵Q为

(A)$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$.

(B)$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(C)$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$.

(D)$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

【 】

(14)设A,B为满足$AB=0$的任意两个非零矩阵,则必有

(A)A的列向量组线性相关,B的行向量组线性相关.

(B)A的列向量组线性相关,B的列向量组线性相关.

(C)A的行向量组线性相关,B的行向量组线性相关.

(D)A的行向量组线性相关,B的列向量组线性相关. 【 】

三、解答题(本题共9小题,满分94分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分10分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

(16)(本题满分10分)

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,在区间$[0,2]$上,$f(x)=x(x^2-4)$,若对任意的x都满足$f(x)=kf(x+2)$,其中k为常数.

(Ⅰ)写出$f(x)$在$[-2,0)$上的表达式;

(Ⅱ)问k为何值时,$f(x)$在$x=0$处可导.

(17)(本题满分11分)

设$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt$,

(Ⅰ)证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数；

(Ⅱ)求 $f(x)$ 的值域.

(18)(本题满分 12 分)

曲线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0$，$x=t(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体，其体积为 $V(t)$，侧面积为 $S(t)$，在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(Ⅰ)求 $\dfrac{S(t)}{V(t)}$ 的值；

(Ⅱ) 计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$.

(19)(本题满分 12 分)

设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

(20)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0\times10^6$). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？(注：kg 表示千克，km/h 表示千米/小时.)

(21)(本题满分 10 分)

设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，其中 f 具有连续二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(22)(本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

(23)(本题满分 9 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

需要全本请访问 www.ertongbook.com

2003 年全国硕士研究生入学统一考试
数学二试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1)若 $x\to 0$ 时,$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小,则 $a=$_____.

(2)设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程是_____.

(3)$y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是_____.

(4)设曲线的极坐标方程为 $\rho=e^{a\theta}(a>0)$,则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为_____.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量,$\boldsymbol{\alpha}^T$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=$_____.

(6)设三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$_____.

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.　　【　】

(2)设 $a_n=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 等于

(A)$(1+e)^{\frac{3}{2}}+1$.　　(B)$(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$.

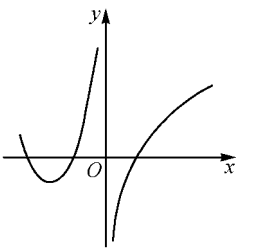
(C)$(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$.　　(D)$(1+e)^{\frac{3}{2}}-1$.　　【　】

(3)已知 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的解,则 $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的表达式为

(A)$-\dfrac{y^2}{x^2}$.　　(B)$\dfrac{y^2}{x^2}$.

(C)$-\dfrac{x^2}{y^2}$.　　(D)$\dfrac{x^2}{y^2}$.　　【　】

(4)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则 $f(x)$ 有



(A)一个极小值点和两个极大值点.

(B)两个极小值点和一个极大值点.

(C)两个极小值点和两个极大值点.

(D)三个极小值点和一个极大值点. 【 】

(5)设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x$, $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$,则

(A)$I_1>I_2>1$. (B)$1>I_1>I_2$.

(C)$I_2>I_1>1$. (D)$1>I_2>I_1$. 【 】

(6)设向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则

(A)当 $r<s$ 时,向量组Ⅱ必线性相关.

(B)当 $r>s$ 时,向量组Ⅱ必线性相关.

(C)当 $r<s$ 时,向量组Ⅰ必线性相关.

(D)当 $r>s$ 时,向量组Ⅰ必线性相关. 【 】

三、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$

问 a 为何值时,$f(x)$在 $x=0$ 处连续;a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点?

四、(本题满分 9 分)

设函数 $y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=1+2t^2,\\ y=\int_1^{1+2\ln t}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\mathrm{d}u\end{cases}(t>1)$所确定,求$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=9}$.

五、(本题满分 9 分)

计算不定积分 $\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

六、(本题满分 12 分)

设函数 $y=y(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶导数,且 $y'\neq0$,$x=x(y)$是 $y=y(x)$的反函数.

(1)试将 $x=x(y)$所满足的微分方程$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$满足的微分方程;

(2)求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$,$y'(0)=\frac{3}{2}$的解.

七、(本题满分 12 分)

讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4x$ 的交点个数.

八、(本题满分 12 分)

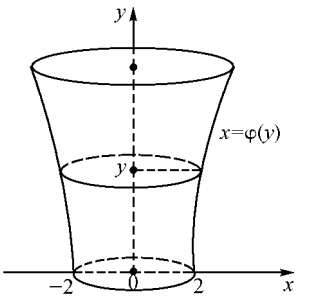
设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$，其上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 的方程；

(2)已知曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 l，试用 l 表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长 s.

九、(本题满分 10 分)

有一平底容器，其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)(y\geqslant 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面(如图)，容器的底面圆的半径为 2m，根据设计要求，当以 $3\text{m}^3/\text{min}$ 的速率向容器注入液体时，液面的面积将以 $\pi\text{m}^2/\text{min}$ 的速率均匀扩大(假设注入液体前，容器内无液体).



(1)根据 t 时刻液面的面积，写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式；

(2)求曲线 $x=\varphi(y)$ 的方程.

(注：m 表示长度单位米，min 表示时间单位分.)

十、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$. 若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：

(1)在 (a,b) 内 $f(x)>0$；

(2)在 (a,b) 内存点 ξ，使 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$；

(3)在 (a,b) 内存在与(2)中 ξ 相异的点 η，使

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

十一、(本题满分 10 分)

若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，试确定常数 a 的值；并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

十二、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1:ax+2by+3c=0,$$
$$l_2:bx+2cy+3a=0,$$
$$l_3:cx+2ay+3b=0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

2002 年全国硕士研究生入学统一考试
数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分. 把答案填在题中横线上.)

(1)设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$_____.

(2)位于曲线 $y=xe^{-x}(0\leqslant x<+\infty)$ 下方,x 轴上方的无界图形的面积是_____.

(3)微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是_____.

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right]=$_____.

(5)矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}$ 的非零特征值是_____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)设函数 $f(u)$ 可导,$y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时,相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1,则 $f'(1)=$

(A)-1. (B)0.1. (C)1. (D)0.5.

(2)设函数 $f(x)$ 连续,则下列函数中,必为偶函数的是 【 】

(A)$\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$. (B)$\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$.

(C)$\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$. (D)$\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$. 【 】

(3)设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解,则当 $x\to 0$ 时,函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

(A)不存在. (B)等于 1. (C)等于 2. (D)等于 3. 【 】

(4)设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导,则

(A)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(C)当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

(D)当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$. 【 】

(5)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$

线性表示，则对于任意常数 k，必有

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.　　【　　】

三、(本题满分 6 分)

已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$，求该曲线上对应于 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

四、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\begin{cases}2x+\frac{3}{2}x^2,-1\leqslant x<0,\\ \frac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2},0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 求函数 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

五、(本题满分 7 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$$

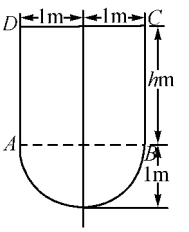
求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分)

求微分方程 $x\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$ 的一个解 $y=y(x)$，使得由曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1,x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

七、(本题满分 7 分)

某闸门的形状与大小如图所示，其中直线 l 为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 $5:4$，闸门矩形部分的高 h 应为多少 m(米)？



八、(本题满分 8 分)

设 $0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

九、(本题满分 8 分)

设 $0<a<b$，证明不等式　$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

十、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内具有二阶连续导数，且 $f(0)\neq 0,f'(0)\neq 0,f''(0)\neq 0$. 证明：

存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得当 $h\to 0$ 时，$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

十一、(本题满分 6 分)

已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵.

(1)证明：矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆；

(2)若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

十二、(本题满分 6 分)

已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求直线方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

需要全本请访问 www.ertongbook.com