毛纲源考研数学辅导系列

考研数学(四)
常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源　编著

华中科技大学出版社

前　言

为使考研同学能在较短时间内进行全面复习，提高考研应试能力和水平，作者根据最新数学考试大纲的要求，深入研究了历年来考研试题，结合作者多年来在考研辅导班授课经验，编写了《考研数学（数学四）常考题型及其解题方法技巧归纳》一书．该书自问世以来，历经三次全国统考，其内容每年都覆盖了试题的绝大部分题型，现已重印多次，畅销全国，以其题型全面、方法新颖、技巧独特、适于自学等特点深受全国广大考生的青睐．

本书经过此次修订增加了新增考点的有关内容，同时还纠正了差错，弥补了疏漏，更好地体现了考研数学大纲的思想和要求．

具体体现在以下几点．

首先，本书根据考研数学大纲的要求，将历年来考研数学试题按题型分类，对各类题型的解法进行了归纳总结，使考生能做到举一反三．数学试题是无限的，而题型是有限的，掌握好这些题型及其解题方法与技巧，会减少解题的盲目性，从而提高解题效率，考生的应试能力自然就得到了提高．同时也便于考生掌握考研数学（四）的大部分题型及其解题思路、方法与技巧，因而本书能起到指航引路、预测考向的作用．

本书特别强调对考研数学大纲划定的基本概念、基本定理、基本方法和基本公式的正确理解．为此每一题型在讲解例题前常对上述“四个基本”进行剖析，便于考生理解、记忆，避免常犯错误．

本书另一特点是总结了许多实用快捷的简便算法，这些简便算法新颖、独特，它们是作者多年来教学经验的总结，会大大提高考生的解题速度和准确性，使考生大大节省时间，因而有助于考生应试能力和水平的提高．

本书还注意培养提高综合应用多个知识点解决问题的能力，对综合型题型进行了较多的分析和解说，以期提高考生在这方面的能力．与此同时，注重一题多解，以期开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，能灵活地解决问题．

本书的讲述方法由浅入深，适于自学，选用例题尽量做到精而易终、全而不滥．

为使考生具有扎实的数学基础知识，也为了更好地阅读本书，特向读者推荐一套可以指导你全面、系统、深入复习考研数学的参考书，这就是本人编写的经济类数学学习指导、硕士研究生备考指南丛书：《经济数学（微积分）解题方法技巧归纳（第2版）》、《经济数学（线性代数）解题方法技巧归纳（第2版）》、《经济数学（概率论与数理统计初步）解题方法技巧归纳（第2版）》．这套丛书自出版以来一直受到全国广大读者的一致好评，多次印刷，久销不衰．很多已考取的经济类硕士研究生不少都受益于这套丛书．我在撰写本书时，多处引用了这套丛书的内容和方法，如果能把丛书结合起来学习必将收到事半功倍的效果．

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中错误、疏漏之处在所难免，恳请专家、读者指正．

编者

2007年3月

目　　录

第1篇　微　积　分

第 2 篇　线　性　代　数

第3篇　概　率　论

第1篇　微　积　分

1.1　函　　数

1.1.1　求几类函数的表达式

题型一　已知函数求其反函数的表达式

求反函数的方法是在原函数 $y=f(x)$ 中解出 x，再交换 x 与 y 的位置即得所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$，同时得到 f^{-1} 的定义域即为 f 的值域.

如 $y=f(x)$ 为分段函数，且在各分段区间上都是单调函数，则分别求出各分段区间上的反函数就得到该分段函数的反函数，且 $f(x)$ 的每段的值域就是其反函数的定义域.

例 1[1996 年 2][1]　设函数 $f(x)=\begin{cases} 1-2x^2, & x<-1, \\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2, \\ 12x-16, & x>2. \end{cases}$ 写出 $f(x)$ 的反函数的表达式.

解　(1) 当 $x<-1$ 时，$y=1-2x^2<-1$，在 $y=1-2x^2$ 中解出 x，得到 $x=-\sqrt{(1-y)/2}$，交换 x 与 y 的位置得到反函数为 $y=-\sqrt{(1-x)/2}$，$x<-1$.

(2) 当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$-1\leqslant y\leqslant 8$. 在 $y=x^3$ 中解出 x，得到 $x=\sqrt[3]{y}$，交换 x 与 y 的位置得到反函数为 $y=\sqrt[3]{x}$，$-1\leqslant x\leqslant 8$.

(3) 当 $x>2$ 时，$y=12x-16>8$，在 $y=12x-16$ 中解出 x，得到 $x=(y+16)/12$，交换 x 与 y 的位置得到反函数为 $y=(x+16)/12$，$x>8$.

综上得到 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式为

$$g(x)=f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{(1-x)/2}, & x<-1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8, \\ (x+16)/12, & x>8. \end{cases}$$

题型二　求分段函数的复合函数

常用代入法或分段代入法求之.

类型(一)　求内、外层函数只有一个是分段函数的复合函数.

---

[1] 例 1[1996 年 2]表示例 1 是 1996 年数学二的考题. 在数学四的往年试题中没有出现过求反函数的题型. 而如今它也是数学四的考点，比较重要，在此特将数学二的这道试题选作例题. 下同.

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 将 $f(x)$ 中及其定义域中的 x 一律用 $g(x)$ 代替得到

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|<1, & \text{解}|g(x)|<1\text{ 即解 }\mathrm{e}^x<1\text{ 得到 }x<0;\\ 0, & |g(x)|=1, & \text{解}|g(x)|=1\text{ 即解 }\mathrm{e}^x=1\text{ 得到 }x=0;\\ -1, & |g(x)|>1. & \text{解}|g(x)|>1\text{ 即解 }\mathrm{e}^x>1\text{ 得到 }x>0.\end{cases}$$

故得到 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$

下面求 $g[f(x)]$. 同样将 $g(x)$ 中及其定义域中的 x 一律用 $f(x)$ 替代得到 $g[f(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}$，而

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\text{故 } g[f(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}^1, & |x|<1,\\ \mathrm{e}^0, & |x|=1,\\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

类型(二) 求内、外层函数都是分段函数的复合函数.

设 $f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\leqslant\varphi_1(x),\\ f_2(x), & x>\varphi_2(x);\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}g_1(x), & x\leqslant\psi_1(x),\\ g_2(x), & x>\psi_2(x).\end{cases}$ 为求 $f[g(x)]$，先将 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 表达式中的所有 x，得到

$$f[g(x)]=\begin{cases}f_1[g(x)], & g(x)\leqslant\varphi_1[g(x)], & ①\\ f_2[g(x)], & g(x)>\varphi_2[g(x)]. & ②\end{cases}$$

再将 $g(x)$ 的分段表达式 $g_1(x)$ 分别代入式①、式②中右端的 $g(x)$，并将所得不等式与 $g_1(x)$ 的自变量的变化范围 $x\leqslant\varphi_1(x)$ 求交. 对 $g(x)$ 的另一分段表达式 $g_2(x)$ 也同样处理，于是得到

$$f[g(x)]=\begin{cases}f_1[g_1(x)], & g_1(x)\leqslant\varphi_1[g_1(x)], & x\leqslant\psi_1(x), & ③\\ f_2[g_1(x)], & g_1(x)>\varphi_2[g_1(x)], & x\leqslant\psi_1(x), & ④\\ f_1[g_2(x)], & g_2(x)\leqslant\varphi_1[g_2(x)], & x>\psi_2(x), & ⑤\\ f_2[g_2(x)], & g_2(x)>\varphi_2[g_2(x)], & x>\psi_2(x). & ⑥\end{cases}$$

分别求解式③、式④、式⑤、式⑥中的不等式组(其中有些不等式组可能无解)，即得复合函数 $f[g(x)]$ 各段自变量的取值范围.

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x<1,\\ x, & x\geqslant1;\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant0.\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解 先将 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 及其定义域表达式中的 x，得到

$$f[g(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}^{g(x)}, & g(x)<1, & ①\\ g(x), & g(x)\geqslant1. & ②\end{cases}$$

再将 $g(x)$ 的分段表达式分别代入式①与式②右端的 $g(x)$，并将所得的不等式与 $g(x)$ 相应段上自变量的取值范围求交，得到

$$f[g(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}^{x+1}, & x+1<1, & x<0, & ③\\ x+1, & x+1\geqslant1, & x<0, & ④\\ \mathrm{e}^{x^2-1}, & x^2-1<1, & x\geqslant0, & ⑤\\ x^2-1, & x^2-1\geqslant1, & x\geqslant0. & ⑥\end{cases}$$

显然式④中不等式组无解，式③、式⑤、式⑥中不等式组的解分别为 $x<0$；$0\leqslant x<\sqrt{2}$；$x\geqslant\sqrt{2}$.

因而
$$f[g(x)]=\begin{cases} e^{x+1}, & x<0, \\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}, \\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}. \end{cases} \tag{7}$$

题型三　利用函数概念求两类函数表达式

设 $f[\varphi(x)]=\psi(x)$，**其中** $\psi(x)$ **为已知函数．常利用函数概念，求解两类函数的表达式：一是已知** f **求函数（中间变量）**φ **的表达式，二是已知** φ **求** f **的表达式．**

类型（一）　已知 $f[\varphi(x)]=\psi(x)$ **和** $f(x)$，**求** $\varphi(x)$ **的表达式．**

因 f **已知，如存在反函数，则** $\varphi(x)=f^{-1}[\psi(x)]$．

例 4［1992 **年** 4］　**已知** $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$，**则** $\varphi(x)=$______**的定义域为**______．

解　**按照复合函数的定义，从** $f(x)$ **的表达式可得复合函数** $f[\varphi(x)]$ **的一般形式：**$f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)$．**将它与题设的** $f[\varphi(x)]$ **的表达式比较即得** $\sin[\varphi(x)]=f[\varphi(x)]=1-x^2$．

因正弦函数存在反函数，故得到 $\varphi(x)$ **的表达式：**$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$．**其定义域为** $D=\{x\,|\,|1-x^2|\leqslant 1\}=\{x\,|\,0\leqslant x^2\leqslant 2\}=\{x\,|\,|x|\leqslant\sqrt{2}\}$，**即** $\varphi(x)$ **的定义域为闭区间**$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$．

类型（二）　已知 $f[\varphi(x)]=\psi(x)$ **和** $\varphi(x)$，**求** $f(x)$ **的表达式．**

若 $\varphi(x)$ **存在反函数，常令** $t=\varphi(x)$，**则** $x=\varphi^{-1}(t)$，**从而** $f(t)=\psi[\varphi^{-1}(t)]$．

例 5　**已知** $f(x+1/x)=x^2+1/x^2$，**求** $f(x)$．

解　**令** $t=x+1/x$，**由** $x^2+1/x^2=(x+1/x)^2-2$ **即得** $f(t)=t^2-2$，**即** $f(x)=x^2-2$．

1.1.2　判别（证明）几类函数的奇偶性

题型一　判别经四则运算后的函数的奇偶性

命题 1.1.2.1　（1）**奇函数乘（除）偶函数＝奇函数；**（2）**奇函数乘（除）奇函数＝偶函数；**（3）**偶函数乘（除）偶函数＝偶函数；**（4）**奇函数加（减）奇函数＝奇函数；**（5）**偶函数加（减）偶函数＝偶函数；**（6）**不恒为零的偶函数（奇函数）加减不恒为零的奇函数（偶函数）为非奇非偶函数；**（7）**偶（奇）函数乘以非奇非偶函数，一般不再是偶（奇）函数．**

例 1［1987 **年** 2］　$f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$**是（　　）函数．**

（A）**有界函数**　　（B）**单调函数**　　（C）**周期函数**　　（D）**偶函数**

解　**显然** $|x\sin x|$ **为偶函数，**$e^{\cos x}$ **也为偶函数，由命题** 1.1.2.1 **知其乘积** $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ **亦为偶函数．仅**（D）**入选．**

题型二　判别自变量带相反符号的两同名函数的代数和的奇偶性

命题 1.1.2.2　**设** $f(x)$ **为定义在**$[-a,a]$（a **可以为无穷）上非常数的任意函数，则**

（1）$f(x)+f(-x)$**为偶函数；**　　（2）$f(x)-f(-x)$［**或** $f(-x)-f(x)$］**为奇函数．**

即自变量带相反符号且为非常数的两同名函数之和为偶函数，之差为奇函数．

例 2　**设** $f(x)$ **与** $g(x)$ **为非常数的任意函数，试判断下列函数的奇偶性：**

（1）$f(x)+f(-x)+g(x)+g(-x)$；　　（2）$f(x)-f(-x)+g(x)+g(-x)$；

（3）$f(x)-f(-x)-g(x)+g(-x)$；　　（4）$f(x)+f(-x)-g(x)-g(-x)$．

解　（1）**因** $f(x)+f(-x)$，$g(x)+g(-x)$ **均为偶函数，其和必为偶函数．**

（2）**因** $f(x)-f(-x)$ **为奇函数，**$g(x)+g(-x)$ **为偶函数，其和为非奇非偶函数．**

（3）**因** $f(x)-f(-x)$，$g(x)-g(-x)$ **均为奇函数，其差为奇函数．**

(4) 因 $f(x)+f(-x)$, $g(x)+g(-x)$ 均为偶函数，其差为偶函数.

例 3 判别函数 $y=x^3+e^x-e^{-x}$ 的奇偶性.

解 因 e^x-e^{-x} 为自变量带相反符号且为非常数的两同名函数之差的函数，故为奇函数，又 x^3 显然也为奇函数，由命题 1.1.2.1 知两奇函数之和 $y=x^3+e^x-e^{-x}$ 仍为奇函数.

题型三 判别复合函数的奇偶性

命题 1.1.2.3 (1) 若函数 $y=f(t)$, $t=g(x)$ 的奇偶性不同，则其复合函数 $y=f[g(x)]$ 必为偶函数；若奇偶性相同，则其复合函数 $y=f[g(x)]$ 与外层函数 $f(x)$ 具有相同的奇偶性.

(2) f 不具有奇偶性时，一般 $f(g_0)$, $f(g_e)$, $g_0(f)$, $g_e(f)$, $f(f)$ 不具有奇偶性，其中 g_0 为奇函数，g_e 为偶函数.

例 4 设 f 为偶函数，g 为奇函数，试考察下列函数的奇偶性：

(1) $f(g)$; (2) $g(f)$; (3) $g(g)$; (4) $f(f)$.

解 因 f 为偶函数，g 为奇函数，f, g 的奇偶性不同，故 $f(g)$ 与 $g(f)$ 均为偶函数.

而 $g(g)$ 为奇函数，因 g 为奇函数. 而 f 为偶函数，故 $f(f)$ 为偶函数.

例 5 讨论 $y=xf(x^2)$ 的奇偶性.

解 当 f 为奇(偶)函数时，x^2 为偶函数，由命题 1.1.2.3(1) 知 $f(x^2)$ 为偶函数，而 x 为奇函数，由命题 1.1.2.1(1) 知 $xf(x^2)$ 为奇函数.

当 f 不具有奇偶性时，由命题 1.1.2.3(2)，知 $f(x^2)$ 不具有奇偶性，故 $xf(x^2)$ 也不具有奇偶性.

题型四 判别原函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的奇偶性

命题 1.1.2.4 设 $f(x)$ 是连续的奇(偶)函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶(奇)函数，即连续奇(偶)函数的一个原函数为偶(奇)函数.

证 (1) $f(x)$ 为奇函数时，下证 $F(-x)=F(x)$，即证 $F(x)$ 为偶函数. 事实上，

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal[\text{(负代换)}]{t=-u} \int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)=\int_0^x [-f(-u)]\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x)$$

或 $$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} \int_0^{-x}[-f(-u)]\mathrm{d}u=\int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u=F(-x).$$

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时，同法可证 $F(-x)=-F(x)$. 因而 $F(x)$ 为奇函数.

例 6[2002 年 2,4] 设函数 $f(x)$ 连续，则在下列变上限定积分定义的函数中，必为偶函数的是(　　).

(A) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$ (B) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$ (C) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$ (D) $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

解一 仅(A)入选. 令 $F(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$，用定义证明 $F(x)$ 为偶函数. 事实上

$$\begin{aligned}F(-x)&=\int_0^{-x} t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} \int_0^x -u[f(-u)+f(u)]\mathrm{d}(-u)\\&=\int_0^x u[f(u)+f(-u)]\mathrm{d}u=F(x).\end{aligned}$$

解二 由命题 1.1.2.4 知(A)中函数为偶函数，因为 $t[f(t)+f(-t)]$ 为奇函数；而(B)中函数为奇函数，因为 $t[f(t)-f(-t)]$ 为偶函数；(C)中函数不具有奇偶性，因 f 不具有奇偶性，虽然 t^2 为偶函数；而 $f^2(t)$ 无法断定其奇偶性，因而(D)中函数不一定是偶函数.

例 7[1999 年 3,4] 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则下列选项中正确的是(　　).

(A) 当 $f(x)$是奇函数时,$F(x)$必为偶函数　　(B) 当 $f(x)$是偶函数时,$F(x)$必为奇函数

(C) 当 $f(x)$是周期函数时,$F(x)$必为周期函数

(D) 当 $f(x)$是单调增函数时,$F(x)$必为单调增函数

解　$f(x)$的无穷多个原函数可写成 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,其中$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为$f(x)$的一个原函数.当$f(x)$为奇(偶)函数时,它是偶(奇)函数;又因C(常数)为偶函数,故偶函数之和还是偶函数.因而当$f(x)$为奇函数时,它的所有原函数即$F(x)$为偶函数.(A)入选.但若 $f(x)$为偶函数时,$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$为奇函数,但 C 为偶函数,因而 $F(x)$为非奇非偶函数.下举反例说明选项(B),(C),(D)均不对.

取偶函数 $f(x)=x^2$,则 $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C$ 不是奇函数($C\neq0$).(B)不对.

取 $f(x)=\cos x+1$,该函数为周期函数,则 $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x+x+C$ 不是周期函数,(C)也不对. 取 $f(x)=x$,$f(x)$为单调增函数($-\infty<x<+\infty$),但 $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+C$不是单调函数,当然也不是单调增函数,(D)也不对. 仅(A)入选.

题型五　判别含子函数 $f(x)=a^{kx}\pm1/a^{kx}\mp1$ 的函数的奇偶性

常利用下述命题判别之.

命题 1.1.2.5　函数 $f(x)=\dfrac{a^{kx}\pm1}{a^{kx}\mp1}$ ($k>0,a>0,a\neq1$)为奇函数.

例 8　已知 $F(x)$为奇函数,则函数 $y=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$($a>0,a\neq1$)为(　　).

(A) 偶函数　　(B) 奇函数　　(C) 既是奇函数又是偶函数　　(D) 非奇非偶函数

解　由命题 1.1.2.5 知函数

$$y=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^x+1}{a^x-1}\right)$$

为奇函数,而 $F(x)$又为奇函数,故 y 为偶函数. 仅(A)入选.

1.1.3　奇、偶函数的几个性质的应用

可导的奇、偶函数的性质常用的有下述几条.

命题 1.1.3.1　(1) 若 $f(x)$为奇(偶)函数,则 $f'(x)$为偶(奇)函数,$f''(x)$为奇(偶)函数.

(2) 若 $f(x)$为奇(偶)函数,则 $f(x)$在对称区间内取值绝对值相同符号相反(符号也相同).

(3) 偶函数在对称区间内单调性相反,而凹向相同,且拐点关于 y 轴对称. 而奇函数则相反:在对称区间内单调性相同,凹向相反,且拐点关于原点对称.

(4) 可导的偶函数 $f(x)$,有 $f'(0)=0$,而可导的奇函数 $f(x)$,则有 $f(0)=0$.

例 1[1997 年 3,4]　若函数 $f(-x)=f(x)$($-\infty<x<+\infty$),在$(-\infty,0)$内 $f'(x)>0$ 且$f''(x)<0$,则在$(0,+\infty)$内有(　　).

(A) $f'(x)>0,f''(x)<0$　　(B) $f'(x)>0,f''(x)>0$

(C) $f'(x)<0,f''(x)<0$　　(D) $f'(x)<0,f''(x)>0$

解一　所给函数 $f(x)$显然为偶函数,因此 $f'(x)$是奇函数,$f''(x)=[f'(x)]'$是偶函数.奇函数$f'(x)$在对称区间内取值绝对值相同,但符号相反,故由 $f'(x)>0,x\in(-\infty,0)$知,$f'(x)<0,x\in(0,+\infty)$;又偶函数 $f''(x)$在对称区间内的凹向相同,则由 $f''(x)<0,x\in(-\infty,0)$知,$f''(x)<0,x$