

## 冶金工业出版社部分图书推荐

书 名	作 者
分析力学初步	易 中 等著
平板的弯曲、振动和屈曲	王克林 等著
混凝土及砌体结构	王社良 等主编
材料力学	王克林 等主编
结构力学	赵 冬 等主编
土力学地基基础	朝晓雷 主编
AutoCAD2002 计算机辅助设计	王 茹 等主编
现代建筑设备工程	郑庆红 主编
施工企业会计	朱宾梅 主编
施工技术	王士川 等编
建筑工程经济与项目管理	李慧民 主编
建筑施工组织	赵仲琪 主编
轻钢结构	王 燕 等编著
新编建筑工程常用材料手册(第2版)	刘麟瑞 等编
简明建筑结构设计实用手册	王晓鹏 等主编
建筑物的检测、鉴定、加固与改造	张有才 等编著
桩基动力学	雷林源 著
尾矿建材开发	徐惠忠 著
实用建筑结构设计手册	施岚青 主编
建筑钢结构设计手册(上、下)	赵熙元 主编
混凝土结构工程施工及验收手册	周振喜 主编
简明混凝土结构设计手册(第2版)	施岚青 主编
钢筋混凝土结构构造手册(第3版)	郝士信 等主编
建筑装饰工程施工及验收手册	周振喜 主编
冶金建设工程技术	李慧民 主编

# 前 言

本书为高等学校规划教材。为适应教学需要,我们在总结多年教学经验的基础上,依据教育部的“理论力学教学基本要求”(多学时),编写了本教材。在编写过程中,本教材吸收了国内外同类教材的优点,反映了编者多年的教学研究成果和教学体会,同时考虑了高等学校专业整合后土木工程类、机械类专业对多学时理论力学课程的不同要求。本教材力求使概念准确清楚,理论推导简明扼要,突出重点,讲透难点,精选例题,体现“少而精”的原则,着重讲清解题思路与解题方法,以提高读者综合应用理论和分析问题的基本素质。

本教材适用于高等学校土木工程、机械类专业的多学时理论力学课程。

本教材为西安建筑科技大学重点立项教材,由理学院力学教研室组织编写,参加编写工作的有刘新东(编写第1、2、3、4章),张为民(编写第5、6、7、8章),刘俊卿(编写绪论、第9、10、11、12章),刘炜(编写第13、14、15、16、17章),全书由刘俊卿统稿,担任主编。

本教材在编写出版过程中得到了西安建筑科技大学教务处及力学教研室理论力学组的大力支持,在此表示衷心感谢。

由于编者水平所限,书中不妥之处,恳请读者批评指正。

编 者  
2008年7月于西安

# 目 录

0 绪论 .....	1
0.1 理论力学研究的对象、内容 .....	1
0.2 理论力学的研究和学习方法 .....	2
1 基本概念、公理 .....	3
1.1 基本概念 .....	3
1.2 静力学公理 .....	4
1.3 约束和约束反力 .....	7
1.4 受力分析和受力图 .....	10
小结 .....	13
习题 .....	13
2 汇交力系 .....	15
2.1 汇交力系合成的几何法 .....	15
2.2 汇交力系平衡的几何法 .....	16
2.3 汇交力系合成与平衡的解析法 .....	17
小结 .....	21
习题 .....	22
3 力偶理论 .....	24
3.1 力偶、力偶矩矢 .....	24
3.2 平面力偶系的合成与平衡 .....	26
3.3 空间力偶理论 .....	27
小结 .....	29
习题 .....	30
4 平面任意力系 .....	33
4.1 力对点之矩 .....	33
4.2 力线平移定理 .....	34
4.3 平面任意力系向一点的简化 .....	35
4.4 平面任意力系的简化结果、合力矩定理 .....	37
4.5 平面任意力系、平面平行力系的平衡方程 .....	40
4.6 静定与静不定问题、刚体系统的平衡 .....	45
4.7 平面桁架 .....	49

4.8 摩擦	53
小结	58
习题	59
<b>5 空间任意力系</b>	<b>64</b>
5.1 力对点的矩矢和力对轴的矩	64
5.2 空间任意力系向一点的简化	67
5.3 空间任意力系的平衡方程	70
5.4 平行力系中心、重心	72
小结	75
习题	76
<b>6 点的运动</b>	<b>79</b>
6.1 矢量法	79
6.2 直角坐标法	80
6.3 自然法	85
小结	90
习题	91
<b>7 刚体的基本运动</b>	<b>93</b>
7.1 刚体的平动运动	93
7.2 刚体的定轴转动	94
7.3 转动刚体内各点的速度和加速度	95
7.4 转动刚体内点的速度和加速度的矢积表示	98
小结	101
习题	101
<b>8 点的合成运动</b>	<b>104</b>
8.1 合成运动的基本概念	104
8.2 速度合成定理	105
8.3 牵连运动是平动时点的加速度合成定理	110
8.4 牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理	113
小结	117
习题	118
<b>9 刚体的平面运动</b>	<b>120</b>
9.1 刚体平面运动的运动方程	120
9.2 平面运动分解为平动和转动	121
9.3 求平面图形内各点速度的基点法	122
9.4 求平面运动图形内各点速度的瞬心法	125
9.5 用基点法求平面图形内各点的加速度	129

9.6 运动学综合应用举例 .....	132
小结 .....	138
习题 .....	139
<b>10 质点运动微分方程 .....</b>	<b>141</b>
10.1 动力学基本定律 .....	141
10.2 质点运动微分方程 .....	142
10.3 质点动力学的两类基本问题 .....	143
小结 .....	147
习题 .....	148
<b>11 动量定理 .....</b>	<b>151</b>
11.1 动量与冲量 .....	151
11.2 动量定理 .....	153
11.3 质心运动定理 .....	157
小结 .....	160
习题 .....	161
<b>12 动量矩定理 .....</b>	<b>164</b>
12.1 转动惯量、平行轴定理 .....	164
12.2 质点和质点系的动量矩 .....	168
12.3 动量矩定理 .....	170
12.4 刚体绕定轴的转动微分方程 .....	172
12.5 相对质心的动量矩定理、刚体平面运动微分方程 .....	174
小结 .....	176
习题 .....	177
<b>13 动能定理 .....</b>	<b>181</b>
13.1 力的功、功率 .....	181
13.2 动能 .....	184
13.3 动能定理 .....	186
13.4 机械能守恒定理 .....	192
13.5 动力学普遍定理的综合应用 .....	194
小结 .....	197
习题 .....	198
<b>14 达朗伯原理 .....</b>	<b>203</b>
14.1 质点的达朗伯原理 .....	203
14.2 质点系的达朗伯原理 .....	205
14.3 刚体惯性力系的简化 .....	207
14.4 定轴转动刚体轴承的动反力 .....	213

---

小结	216
习题	216
<b>15 虚位移原理及其应用</b>	<b>219</b>
15.1 约束及其分类	219
15.2 虚位移与自由度	221
15.3 虚位移原理	224
15.4 虚位移原理的应用	225
15.5 广义坐标形式的虚位移原理	229
小结	231
习题	232
<b>16 动力学普遍方程与拉格朗日方程</b>	<b>235</b>
16.1 动力学普遍方程	235
16.2 拉格朗日方程	237
小结	243
习题	243
<b>17 振动基本理论</b>	<b>247</b>
17.1 单自由度系统的自由振动	247
17.2 计算固有频率的能量法	251
17.3 单自由度系统有阻尼自由振动	253
17.4 单自由度系统无阻尼受迫振动	255
17.5 单自由度系统的有阻尼受迫振动	258
小结	260
习题	261
<b>参考文献</b>	<b>263</b>

# 0 绪 论

## 0.1 理论力学研究的对象、内容

### 0.1.1 理论力学是研究物体机械运动一般规律的科学

物体在空间的位置随时间的改变,称为机械运动(mechanical motion)。机械运动是人们生活和生产实践中最常见的一种运动。平衡(equilibrium)是机械运动的特殊情况。

所谓物体是物质点在三维空间中占有确定大小、形状和空间位置的连续分布。物质点是包含有真实客观存在的物质,且宏观上相对足够小、微观上相对足够大的物质实体(例:氢原子的体积约为 $10^{-24}\text{cm}^3$ 。那么 $10^{-12}\text{cm}^3$ 的空间内将包含足够多的氢原子。 $10^{-24}\text{cm}^3$ 是微观尺度,因此微观尺度相对 $10^{-12}\text{cm}^3$ 足够小。在对氢原子的集合进行物理性质的宏观表象进行分析时, $10^{-12}\text{cm}^3$ 就被看作是一个物质点)。这样的物质实体被称为物质点。在应用物质点这一抽象概念时应当注意:

(1)只有分析研究物体的宏观物理现象时才能应用物质点。

(2)物质点与几何点的区别。物质点是一个确实存在的物质实体,具有一定的大小、形状;而几何点是没有大小和形状的几何抽象。当分析研究物体的宏观物理现象时,物质点可以作为几何点。

质点(particle):当物体的大小、形状在物体的整个机械运动的分析研究中对其自身的机械运动规律的影响可以略去不计时,则物体可以直接抽象成为一个物质点,且在其机械运动的分析研究中将其视为一个几何点。由于质点是被抽象成单一物质点的物体,因此不存在所谓物质点之间的相对位置改变。质点的机械运动特点是:质点只有空间位置的改变,对被抽象为质点的物体没有形状和大小的属性。应当注意的是对质点不存在相对位置的改变,质点可以看作是一类特殊的刚体,但不同质点间可以存在相对位置的变化。

质点系(system of particle):由有限个或无限个质点构成的集合。质点及在其机械运动过程中,质点系集合中的各质点间将发生相对位置改变。

刚体(rigid body):由两个或两个以上离散质点、无限多个物质点连续分布而构成的物质点的集合。在其机械运动过程中,各离散质点或连续分布的物质点之间的无相对的位置改变,或无相对大小和形状的改变,称为单一刚体或简称刚体。

刚体系(system of rigid body, rigid body system):由若干个单一刚体构成的集合。在刚体的机械运动过程中,刚体集合中的各刚体的相对位置发生改变。

### 0.1.2 理论力学研究的内容

理论力学研究物体(质点、质点系、刚体、刚体系)在三维空间中位置随时间改变的一般规律。具体研究的内容包含三部分:

(1)静力学(statics)。主要研究物体的受力分析方法,以及力系的简化方法。同时研究受力物体平衡时作用力所应满足的条件,即平衡条件。

(2)运动学(kinematics)。不考虑引起运动的物理原因,研究机械运动的几何特征。

(3)动力学(dynamics)。研究受力刚体的运动几何特征与作用力之间的关系,即研究受力物体的运动与作用力之间的关系。

### 0.1.3 理论力学研究的范围

以伽利略和牛顿总结的经典力学基本定律(classical mechanics)为基础,分析研究速度远小于光速(不考虑相对论效应)的宏观刚体(物体)(不考虑量子效应)的机械运动。

伽利略的力学相对性原理(两种提法):

(1)力学定律在所有惯性参考系中都等价的,具有相同的形式。

(2)在任何一个惯性参考系中,都不能通过任何力学试验来确定这个参考系是处于静止或匀速直线运动状态。

惯性参考系(inertia reference system):牛顿运动定律成立的参考系。参考系(体):被作为目标的物体的机械运动是通过选定的物体或无相对运动的物体群作为参考而被显示的。这些物体或无相对运动的物体群称为参考系(体)。

## 0.2 理论力学的研究和学习方法

以观察、实践和实验为基础;经过抽象化建立基本概念、公理、定律;通过逻辑推理、数学演绎得出定理和结论;解决问题、发展、验证理论。

### 0.2.1 抽象化方法

透过表象,抽取本质的过程和方法。建立能够基本反映问题最本质的性质的模型。

### 0.2.2 公理化方法

对抽象化方法得到的模型基本性质(无需质疑的)进行理论描述形成基本概念或公理。并以此为基础通过逻辑推理和数学演绎得到定理和与之相关的数学描述表达式,从而形成完整的理论系统。

### 0.2.3 理论力学的学习目的和方法

理论力学作为工科院校各相关专业的、理论性较强的一门技术基础课(理论力学是研究力学中最普遍的基本规律),它是许多与各工科专业密切相关的课程(材料力学、结构力学、机械原理、弹塑性理论等)的基础和前提。理论力学的学习为解工程实际问题提供了必要的基础,同时基本掌握抽象化方法这一科学研究方法,提高全面分析问题、综合应用理论、灵活求解问题的能力。

学习方法是真正地掌握抽象化方法。要求做到:理解概念、记住结论、掌握方法、灵活应用。

# 1 基本概念、公理

## 1.1 基本概念

### 1.1.1 平衡

平衡是物体机械运动的一种特殊形式或称为机械运动的特殊状态,即物体相对于惯性参考系处于静止或做匀速直线运动的状态。工程实际中,一般取固连于地球的参考系作为惯性参考系。这样,平衡是指物体相对于地球静止或做匀速直线运动。

### 1.1.2 力的概念

力(force)是物体间的相互机械作用,这种作用使物体的运动状态发生改变,或使物体产生变形。力使物体改变运动状态的效应称为力的运动效应(外效应),使物体产生变形的效应称为力的变形效应(内效应)。

实践证明力对物体作用的效应取决于力的三要素(three elements of force),即力的大小、方向和作用点。力的方向包含方位和指向两个意思,如铅直向下,水平向右等。作用点指的是力在物体上的作用位置。

力既具有大小和方向,而又服从矢量的平行四边形法则,所以力是矢量。对力矢量,除了大小、方向外,还必须明确力的作用点。因此,力矢量是固定作用点的矢量,也称为固定矢量(fixed vector)或约束矢量。力矢量可以用一条有向线段来表示:线段的长度按一定比例代表力的大小,线段的方位和箭头表示力的方向,线段的起点或终点表示力的作用点。过力的作用点沿力的方向引出的直线,称为力的作用线。在分析过程中力矢量的符号用黑体(粗写体)表示(如  $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{G}$  等);而非黑体(如  $F$ 、 $G$  等)则表示其对应的力矢量的大小。或表示为

$$F = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}} \quad (1-1)$$

在国际单位制(SI)中,力的单位是牛(N)或千牛(kN)。

一般说来,力的作用位置并不是一个点而是有一定大小的一个范围。当作用范围小到可以不计其大小时,就抽象成为一个点,这个点就是力的作用点。这种作用于一点的力则称为集中力。而在某一直线(或曲线)段上的每一点作用的大小、方向连续分布的力,称为线分布力;在某一有限平面(或曲面)上的每一点作用的大小、方向连续分布的力,称为面分布力,如水对池壁的压力;在某一有限三维区域上的每一点作用的大小、方向连续分布的力,称为体分布力,如重力。

作用在物体上的一组(群)力的集合,称为力系(system of force)。

在一定条件下,刚体受到力系作用时可以保持运动状态不变,即处于平衡状态。作用在刚体(或在刚化公理的条件下的形变体)上,且使刚体处于平衡状态的力系,称为平衡力系。刚体处于平衡状态时,作用在刚体上的力系所满足的条件,称为平衡条件。静力学中研究刚体的平衡规律,就是研究作用于刚体的力系的平衡条件。

力系的简化是静力学研究的基本问题中的一个。所谓力系的简化,就是指将作用于刚体的复杂力系用一个简单力系等效代换。通过简化不仅探求力系的平衡条件,而且为动力学的研究

打下基础。

总之,力系的简化和力系的平衡是静力学研究的两个基本问题。

## 1.2 静力学公理

公理是人们在长期生活和生产实践中长期积累的经验总结,并经过实践的反复检验,被确认在确定的条件下符合客观实际的最普遍、最一般的规律。

### 公理 1 力的平行四边形法则

作用在同一物体上、同一点的两个力,其对于物体的作用可等效为一个合力( Resultant)。该合力的作用点也在该点,合力的大小和方向,由这两个方向为边构成的平行四边形的对角线确定,如图 1-1 所示。

平行四边形法则的矢量表示式为

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \quad (1-2)$$

该公理给出了最简单力系的简化规律。公理中的结论适用于物体,当然也适用于刚体。

### 公理 2 二力平衡公理

作用在同一刚体上的两个力,使刚体保持平衡的必要与充分条件是:两力的大小相等、方向相反、作用线在同一直线上。如图 1-2(a) 所示,用矢量表示为

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 \quad (1-3)$$

二力平衡公理阐明了作用于刚体上最简单力系的平衡条件。它是推证平衡条件的基础。需要指出的是:

(1) 二力平衡公理对刚体来说是必要且充分的条件,对变形体则是必要条件,而不是充分条件。例如,软绳的两端受到等值、反向、共线的两力拉伸时处于平衡;但如改为受压,则即使两力仍等值、反向、共线,软绳也将弯曲而不能平衡。

(2) 保持刚体平衡的两个力  $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$  必须作用在同一刚体上。若两个力不是作用在同一刚体上,则尽管两个力满足大小相等、方向相反、作用线在同一直线上,刚体的平衡将可能破坏。如图 1-2(b) 所示。

工程上将只受到两个力作用处于平衡状态的构件称为二力构件(或称为二力杆)。找出二力构件,对于刚体,特别是刚体系统的静力学分析,常常是非常方便的。

在确定一刚体是否是二力构件时应注意:

(1) 刚体必须处于平衡状态。当刚体在两点上受力作用,此时刚体并不一定处于平衡状态。因此不能认为刚体上作用两个力时,该刚体就是二力构件。

(2) 刚体上只有两点处受到力。也就是说二力构件上并不是只能作用两个力。二力构件上可作用三个或更多的力,只要所有这些作用力都作用在刚体上的两个点上。

(3) 二力构件上作用的力可以是主动力也可以是被动力(约束反力)。

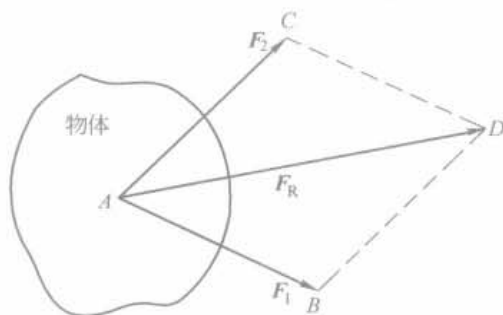


图 1-1

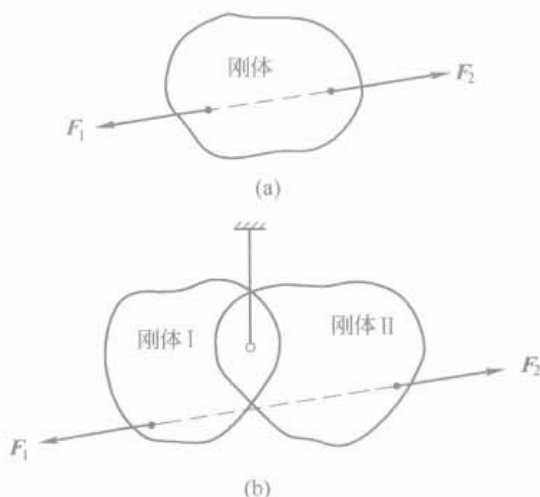


图 1-2

二力构件的受力特点:

作用在二力构件上两点处的合力(作用点相同的力可由平行四边形法则确定其合力)等值、共线、反向。

### 公理3 加减平衡力系公理

在作用于刚体的已知力系中加上或减去任一个平衡力系,并不改变原力系对刚体的效应。

加减平衡力系公理是研究力系等效变换的重要依据,但必须注意,此公理也只适用于刚体而不适用于变形体。对于实际物体,在它所受的已知力系中加上(或减去)任一平衡力系后,力系对物体的外效应不变,但内效应一般将有所不同。

应用二力平衡公理和加减平衡力系公理可导出一个重要推论:

#### 推论1 力的可传性(transmissibility of force)

作用在刚体上的力可沿其作用线移至刚体的任一点,而不改变该力对刚体的作用效果。

**证明:**如图1-3(a)所示,设力 $F$ 作用于刚体上的 $A$ 点,点 $B$ 是力 $F$ 作用线上的任意一点。在点 $B$ 加上等值、反向、共线的一对力 $F_1$ 和 $F_2$ ,并使 $F_1 = -F_2 = F$ ,如图1-3(b)所示。显然, $F_1$ 和 $F_2$ 是平衡力系。根据加减平衡力系公理,添加这一对力并不改变力 $F$ 对刚体的效应,即力 $F$ 与 $(F, F_1, F_2)$ 构成新的新力系等效。另一方面, $F$ 和 $F_2$ 等值、反向、共线,由二力平衡公理可知, $F$ 、 $F_2$ 构成平衡力系。由加减平衡力系公理,在刚体上减去 $F, F_2$ 构成平衡力系而不改变其效应,如图1-3(c)所示。即力系 $(F, F_1, F_2)$ 与力 $F_1$ 等效。于是,作用在刚体上 $A$ 点的力 $F$ 与作用在刚体上 $B$ 点的力 $F_1$ 等效。图1-3(a)、(c)说明,力 $F$ 可沿其作用线移至刚体的任一点 $B$ 。

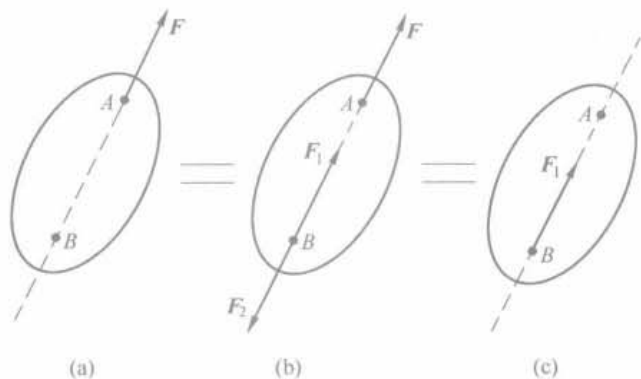


图 1-3

由力的可传性推论可知,力对刚体的效应与力的作用点在作用线上的位置无关。因此,力的三要素中的作用点这一要素,可放松为沿力的作用线所在直线上的任意一点。或者说力的三要素对刚体而言为:大小、方向、力的作用线。这种被约束了作用线的既有大小,又有方向的矢量称为滑动矢量。因此,作用在刚体上的力矢是滑动(动)矢量(Sliding vector)。

利用力的平行四边形定律、二力平衡公理和加减平衡力系公理可导出另一重要推论:

#### 推论2 三力平衡汇交定理

作用于刚体上的三个力使得刚体处于平衡状态时,若其中两个力的作用线汇交于一点,则这三个力必在同一平面内,且第三个力的作用线必通过前二力的作用线的汇交点。

**证明:**如图1-4(a)所示,设在刚体的 $A, B, C$ 三点上分别作用力 $F_1, F_2$ 和 $F_3$ ,且刚体在这三个力作用下处于平衡。若 $F_1$ 和 $F_2$ 的作用线汇交于 $O$ 点,根据刚体上力的可传性,将此二力沿其作用线移至汇交点 $O$ 处,然后根据力的平行四边形法则,将其合成 $F_{R12}$ ,如图1-4(b)所示,则 $F_{R12}$ 和 $F_3$ 平衡。由二力平衡公理可知, $F_{R12}$ 和 $F_3$ 必在同一直线上,即力 $F_3$ 的作用线也通过汇交点 $O$ ,且与力 $F_1, F_2$ 共面。

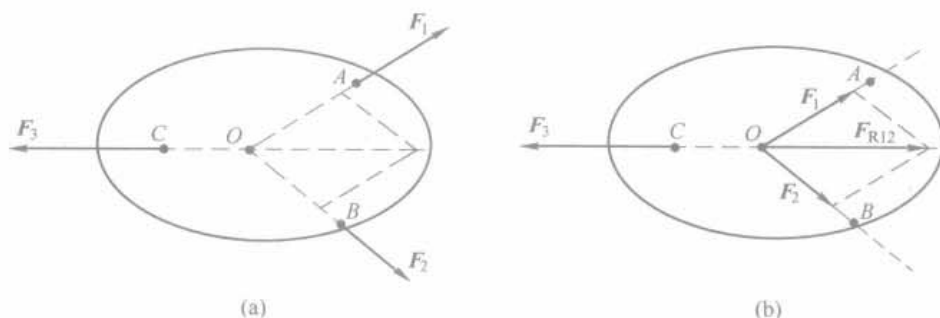


图 1-4

应当指出,三力平衡汇交定理的条件是必要条件,不是充分条件。同时它也是确定力的作用线的方法之一,即如果刚体在三个力作用下处于平衡,且已知其中两个力的作用线汇交于一点,则第三力的作用点与该汇交点连线必为第三个力的作用线。

**公理 4 作用与反作用定律**

两物体相互作用时,作用力和反作用力总是同时存在,两力大小相等、方向相反,沿同一直线,分别作用在两个相互作用的物体上。

作用与反作用定律概括了物体之间相互作用的关系,表明作用力和反作用力总是成对出现的。在分析若干个物体所组成的系统的受力情况时,借助作用与反作用定律,可以从一个物体的受力分析过渡到相邻物体的受力分析。如图 1-5 所示,C 铰处  $F_C$  与  $F'_C$  为一对作用力与反作用力。

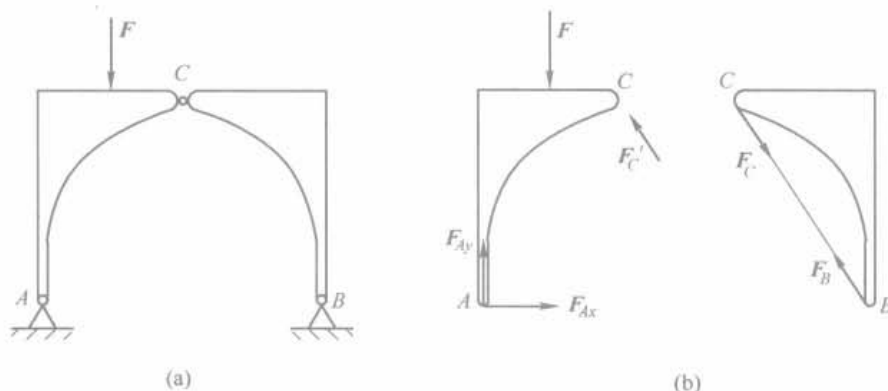


图 1-5

应当指出,作用力与反作用力虽然是等值、反向、共线,但它不作用于同一刚体上,因此作用力与反作用力不是一对平衡力。作用与反作用定律不但适用于刚体,还适用于变形体,不但适用于静力学,还适用于动力学。

**公理 5 刚化原理**

若变形体在某一力系作用下处于平衡,则将此变形体刚化为刚体,其平衡状态保持不变。

由物质点在三维空间连续分布的,具有确定大小和形状的物质实体,在受到其他物体作用时,其大小和形状将发生变化,这种物质实体称为变形体。所谓变形体的刚化就是将在力系作用下已发生变形的处于平衡状态的变形体视为刚体。

如图 1-6 所示一可变形的弹簧。图 1-6(a) 为未受力(系)作用时的初始(自然)状态(该状态

下不能进行刚化)。图 1-6(b) 为沿弹簧长度方向施加的力尚未达到最终值的中间状态。该状态时构成弹簧的各物质点上存在有运动加速度不为零的物质点, 即弹簧并未处于平衡状态, 因此不能进行刚化。图 1-6(c) 中弹簧长度方向施加的力已达到最终值。此时弹簧处于平衡状态。刚化原理中刚化是对图 1-6(c) 中的弹簧进行的。

这一公理表明: 对于变形体, 将其刚化后, 其平衡状态不会破坏; 但对于刚体, 若刚体处于平衡状态, 将刚体视为变形体后, 其平衡状态将无法继续保持。如刚性杆在等值、反向、共线的一对压力作用下将处于平衡。若将刚性杆视为变形绳索, 显然其平衡状态不能继续保持。即刚体的平衡条件是变形体平衡的必要条件, 但不是充分条件。

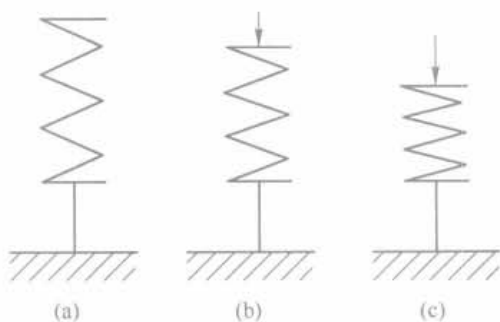


图 1-6

### 1.3 约束和约束反力

我们所遇到的物体, 有的不受什么限制可以在空间自由运动, 如在空中自由飞行的飞机、火箭等, 称为**自由体** (free body); 相反有的则受到一定限制而使其沿某些方向的运动成为不可能, 这样的物体称为**非自由体**或受约束体。如用绳子悬挂而不能下落的重物, 支承于墙上而静止不动的屋架等都是非自由体。对非自由体的某些运动 (或位移) 起限制作用的周围物体 (或条件) 称为**约束** (constraint)。例如, 绳索对于所悬挂的重物和墙对于所支承的屋架都构成了约束。

**约束**阻碍着物体的位移 (运动), 起到改变物体运动状态的作用, 该作用实际上就是力, 这种力称为**约束反力** (constraint reaction)。约束反力的方向总是与该约束所能阻碍的非自由体的位移方向相反。约束反力的特征是它的大小无法预先确定, 因此约束反力是未知力。它的大小与被约束物体的运动状态和作用其上的其他力有关, 应当通过力学规律 (包括平衡条件) 的分析计算才能确定。静力学的主要内容之一就是**通过平衡条件求解静力学问题的约束反力**。

与约束反力不同的其他力, 如重力, 机车牵引力, 风力, 电磁力等, 它们的大小和方向是预先已知或可以测定的, 这类力称为**主动力**。主动力能主动引起物体运动或使物体有运动趋势。约束反力是由主动力引起的、被动产生的, 所以它是一种被动力。

工程中大部分研究对象都是非自由体, 它们所受的约束是多种多样的, 其约束力的形式也是多种多样的, 因此在理论力学中, 将物体所受约束理想化, 得到几种在工程中常见的约束类型。下面介绍这些约束类型, 并分析其约束反力的特性。

#### 1.3.1 柔索 (绳) 约束

柔索 (绳) 约束包括绳索、胶带、链条等, 它只能承受拉力, 而不能抵抗压力和弯曲。当物体受到柔索的约束时, 柔索只能限制物体沿柔索伸长方向的位移。因此, 柔索的约束反力必定沿柔索背离物体, 恒为拉力。图 1-7(a) 所示为柔绳悬挂一重物。根据柔索约束的约束反力特性, 可知柔绳作用于重物的力是沿柔绳的拉力  $F_T$ 。同理, 可以确定机械传动中胶带作用于带轮的约束反力都是沿胶带的拉力, 如图 1-7(b) 所示。

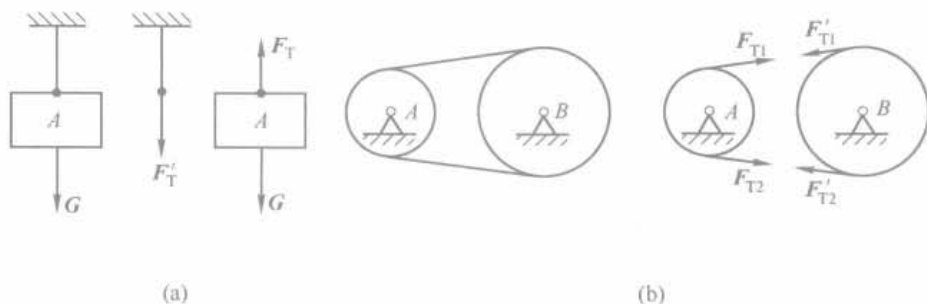


图 1-7

### 1.3.2 光滑接触面约束

若两物体接触面之间的摩擦可以忽略时,认为接触面是光滑的,这种约束称为光滑接触面约束。此约束不能限制物体沿接触点公切面的位移,只能阻碍物体沿接触点的公法线的位移。因此,光滑表面接触约束的约束反力必通过接触点,方向沿接触面在该点的公法线,指向被约束的物体为压力。如图 1-8(a)中, B 圆盘对 A 圆盘作用的约束反力为  $F_{NAB}$ , A 圆盘对 B 圆盘作用的约束反力为  $F'_{NAB}$ ,  $F_{NAB}$  和  $F'_{NAB}$  为一对作用和反作用力,且  $F_{NAB} = F'_{NAB}$ ; 如图 1-8 (b) 中的约束反力  $F_{NC}$ ; 如图 1-8(c) 中的约束反力  $F_{NA}$ 、 $F_{NB}$  和  $F_{ND}$ 。

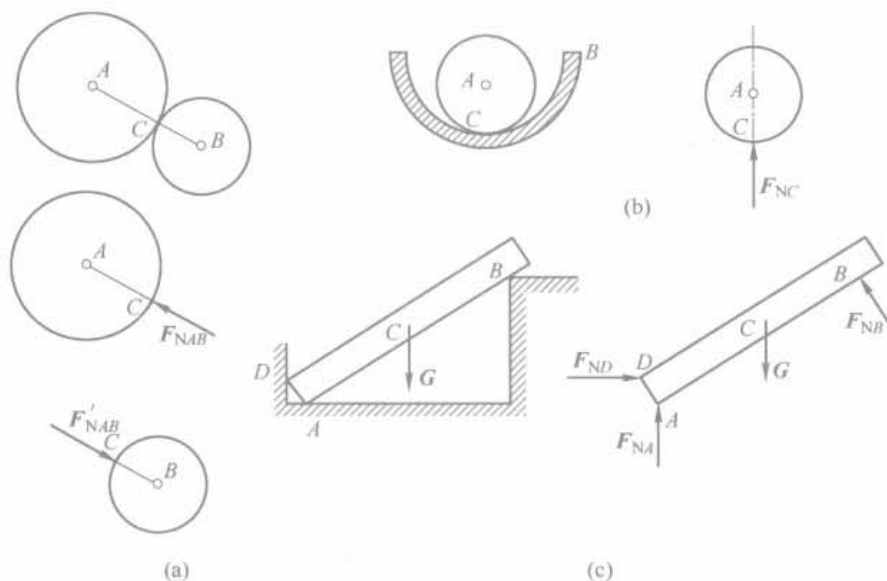


图 1-8

### 1.3.3 光滑圆柱形铰链约束和固定铰支座约束

#### 1.3.3.1 光滑圆柱形铰链约束

如图 1-9(a)所示,将两个具有直径相同圆孔的物体 A、B,用同样直径的圆柱体销子相连接,形成的装置称圆柱形铰链。若圆孔间的摩擦忽略不计,即为光滑圆柱形铰链,简称中间铰链。图 1-9(b)为中间铰链的简图。光滑圆柱形铰链约束限制了物体沿圆孔的径向的运动,但它不能阻止物体绕圆孔的转动。略去摩擦,物体 A、B 与圆柱体销子实际为光滑接触面约束,其约束反力  $F_N$  必沿接触点公法线指向被约束的物体,如图 1-9(c)所示。但接触点的位置无法预先确定,因

而约束反力  $F_N$  的方向也不能预先确定。因此,在受力分析时,光滑圆柱形铰链约束的约束反力通常用通过轴心的两个大小未知的正交分力  $F_x$  和  $F_y$  表示,如图 1-9(d) 所示。两分力的指向可以任意假定,其真实性可根据计算结果来判定。

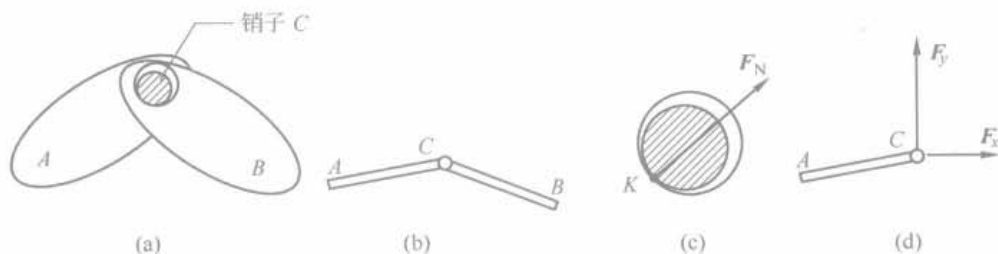


图 1-9

### 1.3.3.2 固定铰支座约束

将光滑圆柱形铰链约束中的一个物体固定在不动的支承平面上,形成的装置称为固定铰支座,如图 1-10(a) 所示,其简图为图 1-10(b) 所示,其约束反力的特性与光滑圆柱形铰链一样用两个大小未知的正交分力  $F_x$  和  $F_y$  表示,如图 1-10(c) 所示。

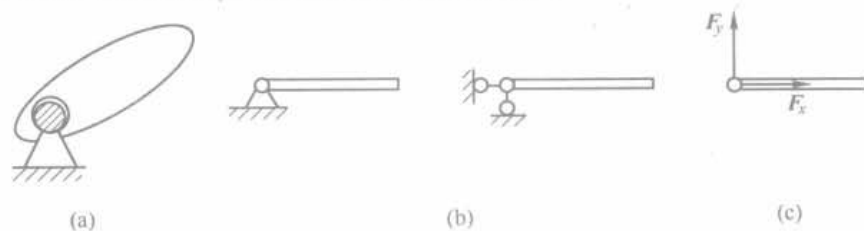


图 1-10

机械中常见的向心轴承(径向轴承)可理解为光滑圆柱形铰链约束中的两个物体都被固定在支承不动的平面上,而销子成为轴是被约束的物体的一种约束,因此,其约束反力的特性与光滑圆柱形铰链约束的约束反力类似,如图 1-11 所示。

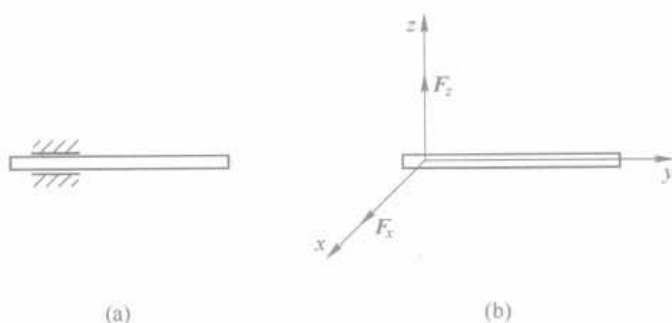


图 1-11

### 1.3.4 可动铰支座约束

在铰链支座与支承平面之间装上辊轴,就构成图 1-12(a) 所示的辊轴支座,也称为可动铰支座,其简图如图 1-12(b) 所示。这类约束的特点是不能限制物体沿支承面的运动,而只限制垂直于支承面方向的运动。所以可动铰支座的约束反力必垂直于支承面,且通过铰链中心,指向待定,如图 1-12(c) 所示。

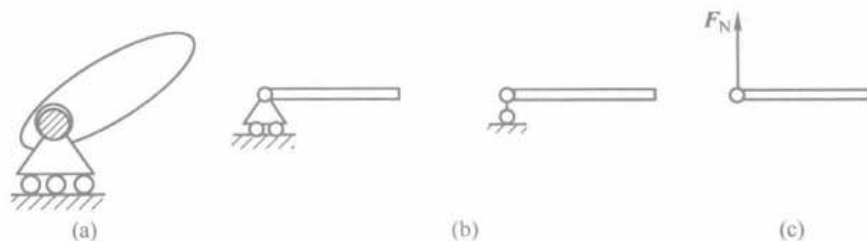


图 1-12

### 1.3.5 链杆约束

通过二力构件两端的铰链约束将两物体连接的约束称为链杆约束,其简图同图 1-12(b)的后者。由二力构件的受力可知,链杆约束所施加的约束反力作用线在连接二力构件两端铰链中心的连线上,其方向待定,如图 1-12(c)所示。

### 1.3.6 球形铰链支座约束和止推轴承

将固结于物体一端的球体置于球窝形的支座中,就形成了球铰链约束,如图 1-13(a)所示,其简图如图 1-13(b)所示。这种约束限制了物体在任何方向的移动,但不能限制物体绕球心的转动。因此,其约束反力是通过球心,方向待定的空间力,通常用三个正交的分力  $F_x$ 、 $F_y$  和  $F_z$  表示,如图 1-13(c)所示。

止推轴承与径向轴承不同,它除了限制轴的径向位移外,还限制了轴沿轴向的位移,因而,其约束反力与球形铰链类似,通常用三个正交的分力  $F_x$ 、 $F_y$  和  $F_z$  表示,如图 1-13(d)所示。

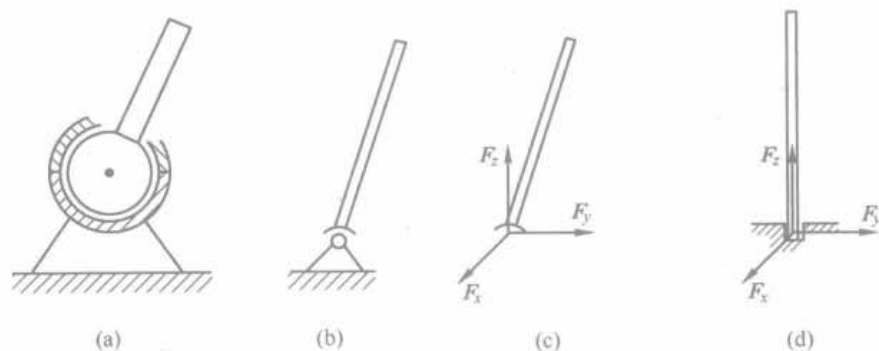


图 1-13

## 1.4 受力和受力图

在求解力学问题时,首先要根据问题的已知条件和待求量,从系统中选择某一物体作为依据研究对象,并分析该物体受到哪些力的作用,每个力的作用位置如何,力的方向如何,这个过程称对物体进行受力分析。将研究对象从周围物体中分离出来,并画出其简图,称画分离体。画有分离体及其所受全部力的简图,称为受力图(free body diagram)。

下面通过举例说明受力分析的过程及受力图的画法。

**例 1-1** 水平梁  $AB$  受均匀分布的荷载  $q$  (N/m) 的作用,梁的  $A$  端为固定铰支座, $B$  端为滚动铰支座,如图 1-14(a)所示,试画出梁  $AB$  的受力图。

**解** (1)取水平梁  $AB$  为研究对象,将它从周围物体中分离出来,并画分离体图。

(2) 水平梁  $AB$  所受的主动力为均匀分布荷载  $q$ , 约束反力为固定铰支座  $A$  处的正交分力  $F_{Ax}$  和  $F_{Ay}$ , 可动铰支座  $B$  处的法向约束反力  $F_{NB}$ 。

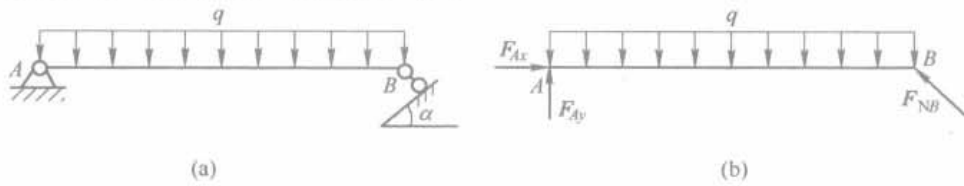


图 1-14

(3) 画梁  $AB$  的受力图, 如图 1-14(b) 所示。其中  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$  和  $F_{NB}$  的指向是假定的。

**例 1-2** 支架由水平梁  $AB$  和斜杆  $CD$  组成, 如图 1-15(a) 所示, 其上放置一重为  $G$  的电动机。  $A$ 、 $C$  处为固定铰支座,  $B$  处为铰链连接, 不计各杆的自重和各处的摩擦。试画出水平杆  $AB$  (含电动机)、斜杆  $CD$  以及整体的受力图。

**解** (1) 取斜杆  $CD$  为研究对象, 由于杆  $CD$  只在  $C$  端和  $D$  端受有约束反力  $F_C$  和  $F_D$  作用而处于平衡, 其中间没有任何受力的作用, 因此, 杆  $CD$  为二力杆,  $F_C$  和  $F_D$  的作用线必在  $C$  点和  $D$  点的连线上。由经验可判断出杆  $CD$  受压力, 受力如图 1-15(b) 所示。一般情况下,  $F_C$  和  $F_D$  的指向不能预先确定, 可先假设杆受拉或受压。若根据平衡方程求得的力为正值, 说明原假设力的指向是正确的, 若为负值, 则说明实际杆受力与原假设指向相反。

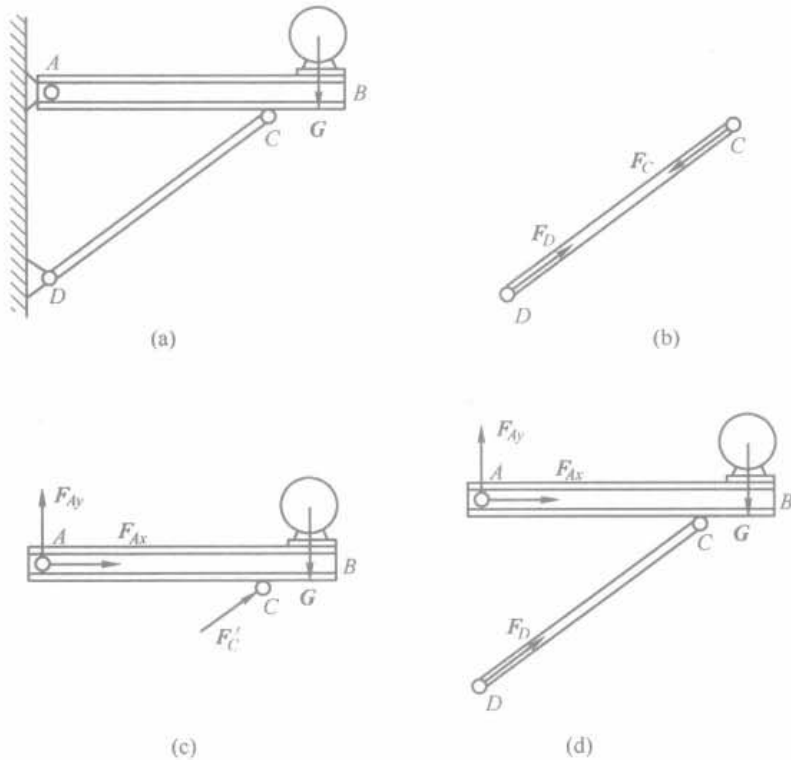


图 1-15

(2) 取电动机和水平梁  $AB$  为研究对象, 所受的主动力为电动机的重力  $G$ , 固定铰支座  $A$  处的约束反力由于方向未知, 用两个正交分力  $F_{Ax}$  和  $F_{Ay}$  表示, 铰链  $C$  处的约束反力由作用力与反作用力可知, 为  $F'_C = -F_C$ , 受力如图 1-15(c) 所示。

(3) 取整体为研究对象, 铰链  $C$  处所受的力互为作用力与反作用力, 即  $F'_C = -F_C$ , 成对地作用在整个系统上, 称为内力。内力对系统的作用效应相互抵消, 因此可以除去, 并不影响整个系