教 材 编 委 会

出版说明

西安工业大学于1955年建校，是一所中央与地方共建，以陕西省管理为主的全日制普通高等学校。经过50多年的建设与发展，已经成为一所办学水平较高、办学规模较大、学科门类齐全的多科性普通高等学校。

在我国高等教育事业实现跨越式发展的同时，扩大规模和提高质量已成为高等教育发展的两大主题。而教材作为教学内容、教学方法和知识传播的有形载体和基本工具，能够适时地将学校办学水平、培养目标、质量标准等信息传递给学生。“十五”期间，学校立足自身定位，坚持教材建设研究，统一规划，加强管理，资助出版了多部特色教材，这些教材从体系到内容都充分体现了学校的办学定位和办学特色。

2006年，为了适应社会和学校教育事业的发展，学校对办学指导思想进行了重新确定，进一步明确了办学定位、培养目标及服务方向。“十一五”期间，学校将在更新教育理念、提高办学水平、实现快速发展的思想指导下，坚持科学的教育发展观，围绕培养定位、培养模式、专业建设、课程改革等方面做大量的研究、探索和实践，并通过加强科学研究带动学科建设。为使这些教学研究改革及学科建设、科研成果及时得以固化并更好推广，我们将在系统调研、认真审阅的基础上，对已形成专著的研究内容规划整理成为适合教学的教材，并将工程实践中已获得应用的先进技术和内容提炼后纳入新编教材中，突出专业特色及学科建设成果，把教材建设目标和人才培养目标统一起来，从总体上提高人才培养质量，促进教学工作上台阶，促进培养目标的实现。

我校“十一五”规划出版的各学科系列教材，将全面系统地融入教学改革和科学研究的优秀成果，为各学科和专业发展奠定坚实的基础。我们衷心希望这些教材能对广大读者在夯实基础、强化素质、提高能力方面起到积极作用。

西安工业大学
教学工作委员会教材工作分会
2006年7月

前 言

计算机的出现是人类文明史上最重要事件之一，它改变了人类的生活方式与生存条件，并对人类的工作方式甚至思维方式均产生了极其重大与深远的影响. 随着计算机科学的发展，作为研究有限与离散系统的离散数学已成为一门越来越重要的学科，由于计算机本身就是一个离散系统，计算机的许多性质只有在离散的框架下才能得到很好的解释.

离散数学是研究离散量与离散对象之间关系的学科. 所谓离散(descrete)量，是相对实数这种连续(continuous)量而言的，它的主要特征是有限的、可数的，像自然数这样的量即是可数的量. 从人类文明史上来看，人类最早接触并进行研究的就是这种离散量，但随着人类文明的发展，以连续时空为框架的物理学、力学、天文学的发展，促使人们转向连续量的研究. 从17世纪微积分的发明及广泛应用，到19世纪对实数连续统的深入研究并建立了严格的实数理论，这二三百年是一个英雄辈出的时代，是人类文明史册上最辉煌的一页，一大批数学家投入连续数学领域的研究，Fermat (1601—1665)，Newton (1642—1727)，Leibnitz (1646—1716)，Taylor (1685—1731)，Bernoulli(1700—1784)，Euler(1707—1783)，D'Alembert (1717—1783)，Lagrange (1736—1813)，Laplace (1749—1827)，Fourier (1768—1830)，Cauchy(1789—1857)，Dirichlet(1805—1859)，Weierstrass (1815—1897)，Dedekind(1831—1916)，是这个时代的代表人物. 这时，作为连续数学的微积分处于数学上绝对统治的地位，连续数学的研究对Newton力学和 Mexwell 的电磁理论的建立等方面曾作出过重要贡献.

但是，20世纪中期计算机的出现改变了这一切. 随着计算机的广泛应用及发展，逐渐动摇了微积分这种连续数学在数学中的地位，人们的目光不得不转向离散量的研究上. 因为计算机本身就是一个离散系统，它有有限个运算装置，它有有限个存储器，它运行的时间是有限的，计算机的字长是有限的，所以，这些决定了计算机处理的对象只能是有限位的数、有限长的字符串以及由有限个元素构成的系统. 离散化的手段甚至已渗透到连续数学的传统领域，如近几十年发展的有限单元法、离散傅氏变换等，计算机科学与技术的发展加快了离散数学取代连续数学统治地位的步伐.

目前，离散数学已成为计算机科学与技术的理论基础，是计算机与计算科学专业的一门重要的专业基础课. 离散数学作为计算机科学的基础，它在

可计算性与计算复杂性理论、算法与数据结构、程序设计语言、数值与符号计算、操作系统、软件工程、数据库与信息检索系统、人工智能、网络、计算机图形学、编码理论、密码学以及人机通信等各领域中都有着广泛的应用.

本书可作为高等院校面向21世纪的信息计算专业和计算机专业离散数学课程教材.全书共五篇,内容包括数理逻辑、集合论、数论、代数系统与图论,其中部分章节(标有“*”号的部分)视需要可作为选学内容,另外,根据专业与课时的具体情况,第三篇数论部分可以全部或部分略去不讲.通过本书的学习,使学生掌握离散数学的基本概念和理论,一方面为学习计算机与计算科学方面的后续课程,如数据结构、编译系统、操作系统、数据库原理、编码理论、密码学和人工智能等提供了必要的数学基础;另一方面,通过学习离散数学,培养和提高学生的抽象思维和逻辑推理能力,从而提高分析和解决实际问题的技能.全书还配备了大量的习题,可供教学参考与训练.

抽象思维能力和逻辑推理能力的培养是大学教育的重要任务,在培养学生的这两种能力方面,离散数学的学习起着十分重要的作用.为使学生得到良好的训练,并且有助于数学素质、数学修养、数学情感和数学审美情绪的培养,需要加强离散数学的教学.

本书的特色是,一方面突出理论的系统性、完备性、深入性及语言的通俗易懂性(便于读者自学);另一方面,着眼于加强抽象思维能力、逻辑推理能力的训练以及分析问题、解决问题技能的培养.对信息计算专业来说,离散数学中有一些内容需要加强,主要体现在:为了后面更好地学习编码及组合理论,对半群、群、环、域等代数系统增强了深度,并添加了数论方面的知识,以便为学习密码学打好一定基础.另外,集合论是现代数学与计算机科学的基础,是各门数学的精确严谨而又简便的语言,它在许多学科都有极其广泛的应用,集合论对逻辑思维能力、逻辑推理能力的培养有着重要意义,同时现代集合论对人类思想领域产生过深远的影响,因此本书加强了集合论的内容,深入浅出地介绍了现代集合论的知识.

本书的出版得到了西安工业大学教务处,教材科及数理系的支持,得到我的同事李玉清老师的帮助,在此表示衷心的感谢.

由于作者水平有限,错误在所难免,敬请批评指正.

编　者

2006年7月

离散处理是企图用个别元素,例如海滩上沙粒或数字1,2,3等等来解释自然现象.计算机是离散的机器,处理个别的、可数的事物,……反之,自17世纪微积分发明以来一直占上风的连续数学则认为,自然现象可以理解为一种光滑的不断的流动,例如落体运动或行星环绕太阳的运动.

微积分是连续处理的工具,而计算机正威胁着要把它从显赫地位上赶走.

——L. Dembart(摘自《计算机时代使微积分的宝座摇摇欲坠——离散数学赢得宠爱》)

的确,数学教育的目的与其说是让学生掌握一种可用来解决实际问题的工具,不如说应该是增强学生的才能,并提供一种对其他学科也适用的推理方法.

——Magnus.Philip

目 录

第一篇 数理逻辑

第二篇 集合论

第三篇 数 论

第四篇 代数系统

第五篇　图　论

我们需要的是，它能使人们的推理不依赖于对推理过程中命题含义的内容的思考，正像近代数学使得广义的计算也可以不依赖于对计算中出现的符号和含义的内容的思考.

——G. W. Leibnitz

逻辑更数学化，数学更逻辑化，结果在二者之间不能划出一个界限.

——Bertrand Russell

第一篇　数理逻辑

逻辑学是一门研究人类思维形式及思维规律的科学，概念是思维的基本单位，通过概念对事物是否具有某种属性或关系进行肯定，就是判断；由一个或几个判断推出另一个判断，就是推理. 数学和其他学科广泛采用推理从已有的结论得到新的结论. 数理逻辑是用数学方法研究推理的一门学问，它研究推理的规律及推理的有效性.

17 世纪德国数学家 Leibnitz 首先提出了用一种普遍的科学语言建立思维演算，以便用计算代替思维并完成推理过程，因此他被称为数理逻辑的创始人. 此后英国数学家 Boole 于 1847 年出版《逻辑的数学分析》一书发展了命题代数. 再后来，由德国数学家 Frege 于 1879 年出版了《表意符号》，引入了量词、约束变元等概念，发展了谓词逻辑. 1930 年数学家 Gödel 的完备性定理的证明，使数理逻辑的基础得到完善. Peano，De Morgen，Russell 都对数理逻辑的发展作出了贡献.

数理逻辑包括五个主要部分：逻辑演算、证明论、公理化集合论、模型论及递归论. 本篇仅介绍数理逻辑的基础部分——逻辑演算，它包括命题逻辑和谓词逻辑.

数理逻辑与计算机科学有着密切关系，程序设计方法学、计算机的逻辑设计、定理的自动证明都是以数理逻辑作为基础的.

第 1 章　命题逻辑

1.1　命题与联结词

一、命题

用数学方法研究推理是数理逻辑的主要任务，由一个或几个判断得到一个新的判断就是推理. 推理是一种思维活动，它离不开语言. 判断的语言形式是命题，如果该判断是正确的，则命题是真命题，否则称为假命题. 考察下面的句子：

(1) 北京是中国的首都.

(2) 西安是陕西省的省会.

(3) 拿破仑是法国人.

(4) $2+3=4$.

(5) 中国是欧洲的一个国家.

(6) 不小于 6 的偶数均可表示为两个奇素数的和.

(7) 请将窗子打开！

(8) 你是中学生吗？

(9) $x+3=5$

(10) 我正在说谎.

显然(1) ～ (6) 各句均是对某种事物是否具有某种属性或关系进行了肯定，因此它们均是命题. 其中(1) ～ (3) 是真命题；(4)、(5) 是假命题；(6) 是著名的哥德巴赫(Goldbach)猜想，虽然它的真假目前还不能肯定，但它仍是一个命题. (7)、(8) 没有对任何事物是否具有某种属性或关系进行肯定，它们一个是祈使句，一个是疑问句，因此都不是命题. 由此可见，只有陈述句才可能是命题. 另外，(9) 虽是一个陈述句，但句子中含有一个不确定的变元 x，因此它不是命题. (10) 也是一个陈述句，但它不能分辨出真假，它的真或假均能导致矛盾(语义悖论).

命题是具有真假之分的陈述句. 即命题有一个所谓**真值**，真命题的真值为“真”，假命题的真值为“假”，分别用符号 T 和 F 表示.

上面的命题均是一些简单的陈述句，这些命题称为**原子命题**. 原子命题是不能由更简单的命题构成，它们是不可再分的. 另外，还有一些命题，它们是由原子命题通过一些逻辑词构成的. 考察下面的命题：

(1) 如果天下雨，则地上湿.

(2) 西安不是陕西省的省会.

(3) 今天是星期一或星期二.

(4) Newton 既是一个伟大的数学家，又是一个伟大的物理学家.

（5）三角形两边相等当且仅当它们对角相等.

（6）幸福的家庭都是相似的，但不幸的家庭各有各的不幸.

这里（1）是由两个命题“天下雨”与“地上湿”通过逻辑词“如果……，则……”构成的；（2）是由命题“西安是陕西省的省会”加上逻辑词“不”构成的；（3）是由命题“今天是星期一”与“今天是星期二”加上逻辑词“或”构成的；（4）是由命题“Newton 是一个伟大的数学家”与“Newton 是一个伟大的物理学家”通过逻辑词“既……，又……”构成的；（5）是由命题“三角形两边相等”与“它们对角相等”通过逻辑词“当且仅当”构成的；（6）是由命题“幸福的家庭都是相似的”与“不幸的家庭各有各的不幸”通过“但”这个逻辑词构成的. 总之，上面这些命题均可由更简单的命题构成，即它们均是可再分的. 称上面这些命题为**复合命题**.

二、符号语言与联结词

数理逻辑是用数学方法研究推理的一门学问. 所谓数学方法就是采用一种**符号语言**的方法，它是自然语言的抽象. 这种符号语言有着严格的语法结构和精确的定义，而避免自然语言由于叙述不确切，给人们正确理解带来困难. 另外，数理逻辑和传统逻辑一样研究的仅仅是推理的形式规律，而和推理的内容无关，采用符号语言抽象掉了推理的具体内容，而着眼于推理的形式. 这种符号语言是描述推理过程的，是数理逻辑研究的对象，又称为**目标语言**，而将研究这种目标语言所用的自然语言称为**元语言**，它是比目标语言更高层的一种语言.

在命题逻辑中，常用单个字母 P，Q 等表示原子命题，它是具体命题的抽象. 因为在研究推理时，关心的仅是 P，Q 取什么真值，不涉及它所代表命题的具体内容. 由于 P，Q 可独立地取不同的真值（或者说，P，Q 可以代表任意的具体命题），因此又称 P，Q 为**命题变元**或**原子变元**. 给原子变元取某一真值，也称给原子变元**指派**了某一真值.

上面用自然语言所表达的较复杂的命题中出现的如“非”“或”“且”“若……，则……”“当且仅当”这样的逻辑词，反映了这些复杂命题的内部结构，它的作用十分重要. 因此数理逻辑采用符号来代替这些词，上述逻辑词对应的符号分别是“$\neg$”“$\vee$”“$\wedge$”“$\rightarrow$”“$\rightleftharpoons$”，称为**联结词**，不过后者较前者有着更为精确的含义，这些联结词分别称为否定、析取、合取、条件和双条件联结词. 下面分别介绍.

1. 否定联结词 $\neg$

设 P 是一个命题，则否定式 $\neg P$ 是一个复合命题，读作“非 P”，表示命题 P 的否定. 显然当 P 是真命题时，$\neg P$ 是一个假命题；反之，P 是假命题时，$\neg P$ 是一个真命题. P 与 $\neg P$ 真值对应关系如表 1.1 所示.

表 1.1

P	$\neg P$
T	F
F	T

在传统逻辑中，P 称为**正判断**，而 $\neg P$ 称为**负判断**. 如果用 P 表示“张华是大学生”，则 $\neg P$ 表示“张华不是大学生”.

2. 析取联结词 $\vee$

设 P,Q 是任意两个命题，则析取式 $P\vee Q$ 是一个复合命题，读作"P 或 Q". 显然 P 与 Q 中只要有一个是真命题，$P\vee Q$ 即为真命题，即当且仅当 P,Q 同时为假时，$P\vee Q$ 才为假. P,Q 与 $P\vee Q$ 真值对应关系如表 1.2 所示.

表 1.2

P	Q	$P\vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$P\vee Q$ 表示一个选言判断，如果用 P,Q 分别表示"张华是大学生""李平是大学生"两个命题，则 $P\vee Q$ 表示"张华是大学生或李平是大学生"这一个新的命题.

在实际情况中，自然语言中的"或"，有"可兼或"与"不可兼或"之分."张华是大学生或李平是大学生"中的"或"是"可兼或"；"今天是星期一或今天是星期二"中的"或"是"不可兼或"，这是因为"今天是星期一"和"今天是星期二"同时为真时，导致矛盾. 显然析取联结词 $\vee$ 表示的是"可兼或"，关于"不可兼或"后面还要介绍.

3. 合取联结词 $\wedge$

设 P,Q 是任意两个命题，则合取式 $P\wedge Q$ 是一个复合命题，读作"P 且 Q". 显然 P 与 Q 中只要有一个是假命题，$P\wedge Q$ 即为假命题，即当且仅当 P,Q 同时为真时，$P\wedge Q$ 才为真. P,Q 与 $P\wedge Q$ 真值对应关系如表 1.3 所示.

表 1.3

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

$P\wedge Q$ 表示一个联言判断，如果用 P,Q 分别表示"张华是大学生""李平是大学生"两个命题，则 $P\wedge Q$ 表示"张华是大学生且李平也是大学生"这一个新的命题.

4. 条件联结词 $\rightarrow$

设 P,Q 是任意两个命题，则条件式 $P\rightarrow Q$ 是一个复合命题，读作"如果 P，则 Q"，P,Q 分别称为条件式 $P\rightarrow Q$ 的前件与后件. 显然当 P 为真命题，而 Q 为假命题时，$P\rightarrow Q$ 是一个假命题，但是当 P 为假时，无论此时 Q 是真命题还是假命题，$P\rightarrow Q$ 的真假好像无法判断. 但实际中，将 P 为假这种情况一律规定 $P\rightarrow Q$ 为真是合理的，这称为"善意推定"，例如命题"如果 $2+3=4$，则太阳从东边出来"和"如果 $2+3=4$，则太阳从西边出来"，均认为是真命题. 考虑数学中的一个例子，"如果 $x>2$，则 $x+1\geqslant 3$"，显然这个命题对任意实数 x 均是成立的，但当 x 分别取值 3,2,1 时，

上面命题分别为"如果 $3>2$,则 $3+1\geqslant 3$""如果 $2>2$,则 $2+1\geqslant 3$""如果 $1>2$,则 $1+1\geqslant 3$",由此可见,当且仅当 P 为真,Q 为假时,$P\rightarrow Q$ 才为假,其余情况均为真.

P,Q 与 $P\rightarrow Q$ 真值对应关系如表 1.4 所示.

表 1.4

P	Q	$P\rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$P\rightarrow Q$ 表示一个假言判断,如果用 P,Q 分别表示"今天下雨""李平在家读书"两个命题,则 $P\rightarrow Q$ 表示"如果今天下雨,则李平在家读书"这一个新的命题.

5. 双条件联结词 $\rightleftharpoons$

设 P,Q 是任意两个命题,则双条件式 $P\rightleftharpoons Q$ 是一个复合命题,读作"P 当且仅当 Q",P 与 Q 同时为真或同时为假时,$P\rightleftharpoons Q$ 才是一个真命题. P,Q 与 $P\rightleftharpoons Q$ 真值对应关系如表 1.5 所示.

表 1.5

P	Q	$P\rightleftharpoons Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$P\rightleftharpoons Q$ 表示一个**等值判断**,如果用 P,Q 分别表示"张华学习英语""李平学习英语"两个命题,则 $P\rightleftharpoons Q$ 表示"张华学习英语当且仅当李平学习英语"这一个新的命题.

联结词反映了 $\neg P,P\vee Q,P\wedge Q,P\rightarrow Q,P\rightleftharpoons Q$ 这些复合命题的逻辑结构. 上述由单个符号 P,Q 表示原子命题(或原子变元),构成式中含有联结词的命题称为**复合命题**.

命题逻辑是以原子命题为最小单位的数理逻辑. 原子命题在命题逻辑中是不可再分的,在命题逻辑中不须考虑原子命题的内部结构. 但是命题逻辑在实际应用中受到很大的局限,有时需要深入到原子命题的内部,了解它的内部结构,这就是谓词逻辑的任务,将在后面介绍.

由联结词构成的复合命题其真值由构成它的原子命题(或原子变元)的真值唯一确定. $\neg P,P\vee Q,P\wedge Q,P\rightarrow Q,P\rightleftharpoons Q$ 的真值由 P,Q 的真值确定,见表 1.6.

表 1.6

P	Q	$\neg P$	$P\vee Q$	$P\wedge Q$	$P\rightarrow Q$	$P\rightleftharpoons Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

这里除否定联结词 $\neg$ 称为**一元联结词**外，其他联结词 $\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\rightleftharpoons$ 均称为**二元联结词**. 它们的作用类似于运算符的作用，运算对象为{T,F}，上表也可看做这些作为运算符的联结词的定义.

1.2　命题公式与命题的等值

一、命题公式

联结词和原子命题一起构成目标语言中的新命题，构成的新命题再与联结词一起还可构成更为复杂的命题，如 $(P \wedge Q) \rightarrow (\neg R)$. 为了避免二义性，有时还是需要加上技术性的符号括号.

严格说在这些目标语言中用符号串表示的命题，不是真正意义下的命题，仅能称为**命题函数**或**命题公式**，简称为**公式**. 由于它的真值并不确定，仅当出现在公式中的命题变元(或原子变元)指派了确定的真值后，它本身的真值才能确定，因此命题公式仅是实际命题的抽象. 一个命题公式代表了具有同一逻辑结构的所有命题，另外，也并不是任意的符号串都能表示目标语言中的命题公式，如 $(P \wedge) \rightarrow (\neg R \rightarrow)$，$(+Q = \wedge) \rightarrow\rightarrow (\neg R \rightarrow$ 均是没有意义的式子. 在命题逻辑中，作为精确目标语言的命题公式有着严格的语法定义.

命题逻辑的**合式公式(Wff)**的形成规则为：

(1) 单个字母 P，Q 等表示的原子公式是合式公式；

(2) 如果 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式；

(3) 如果 A，B 是合式公式，则 $(A \vee B)$，$(A \wedge B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \rightleftharpoons B)$ 也均是合式公式；

(4) 当且仅当能够有限次应用(1)～(3)所得到的包含命题变元，联结词和括号的符号串是**合式公式**. 合式公式也简称为**公式**.

规定了联结词 $\neg$ 有最高的优先级，联结词 $\vee$，$\wedge$ 比联结词 $\rightarrow$，$\rightleftharpoons$ 有较高的优先级，并约定公式最外层括号省去，公式 $((P \wedge Q) \rightarrow (\neg R))$ 可简写成为 $P \wedge Q \rightarrow \neg R$.

如 $((P \rightarrow Q) \rightarrow \neg R) \wedge S$，$((P \vee Q) \wedge P) \rightarrow Q$ 是一些合式公式，它们均可由形成规则产生，但是 $(P \rightarrow) \wedge S$，$P \rightarrow Q) \rightarrow \vee S$ 不是合式公式，它们不可能由形成规则产生.

二、公式的真值表

将公式中出现的所有原子变元的指派全部列出，对应的公式真值也就全部确定. 将原子变元的所有指派与相应得到的公式真值汇集成表称为**真值表**. 在命题逻辑中，真值表的作用十分重要，现举例说明.

例 1.1　构造公式 $\neg P \vee Q$ 的真值表.

解　真值表见表 1.7.

表　1.7

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

例 1.2 构造公式$(\neg P \vee Q) \wedge (Q \rightarrow P)$的真值表.

解 真值表见表 1.8.

表 1.8

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$Q \rightarrow P$	$(\neg P \vee Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T

例 1.3 构造公式$(\neg P \vee Q) \rightleftharpoons (P \rightarrow Q)$的真值表.

解 真值表见表 1.9.

表 1.9

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$(\neg P \vee Q) \rightleftharpoons (P \rightarrow Q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

例 1.4 构造公式$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \wedge Q)$的真值表.

解 真值表见表 1.10.

表 1.10

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \wedge Q$	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \wedge Q)$
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F	F

例 1.5 构造公式$(P \rightarrow Q) \wedge (P \wedge Q)$的真值表.

解 真值表见表 1.11.

表 1.11

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$P \wedge R$	$(P \rightarrow Q) \wedge (P \wedge R)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F
F	F	F	T	F	F

从真值表可看到，由 2 个原子变元构成的命题公式共有 4 种可能的真值指派，由 3 个原子变元构成的命题公式共有 8 种可能的真值指派．一般说来，由 n 个原子变元构成的命题公式共有 2^n 种可能的真值指派，即由 n 个原子变元构成的命题公式其真值表除表头外应有 2^n 行．

有一类公式，如例 1.3 中的公式，无论命题变元指派什么真值，该类公式真值恒为 T；另一类公式，如例 1.4 中的公式，无论命题变元指派什么真值，该类公式真值恒为 F．这两类公式分别代表逻辑常量 T 和 F．

三、命题公式的等值

如果两个命题公式，无论它们所含原子变元指派什么值，其真值均相等，则称这两个命题公式逻辑等值，或简称为**等值**．将命题公式 A，B 等值记为 $A \Leftrightarrow B$．

显然命题公式的等值关系具有自反、对称和传递等性质，即对任意公式 A，有 $A \Leftrightarrow A$；如果 $A \Leftrightarrow B$，则 $B \Leftrightarrow A$；如果 $A \Leftrightarrow B$，$B \Leftrightarrow C$，则有 $A \Leftrightarrow C$．

从表 1.12 可看出，无论原子变元 P，Q 指派什么真值，公式 $\neg P \vee Q$ 与 $P \rightarrow Q$ 真值均相等，即真值表的最后两列真值完全相同，故 $P \rightarrow Q$ 和 $\neg P \vee Q$ 等值，记为 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \rightarrow Q$．

表　1.12

P	Q	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

欲证明两个命题公式等值，可将两个公式中出现的所有原子变元的指派全部列出，考察每种指派两个公式的真值是否相同，如果全部相同，则两个公式等值；否则不等值．从真值表 1.13 可看到，无论原子变元 P，Q 指派什么真值，公式 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ 与 $P \rightleftharpoons Q$ 真值完全相同，即真值表最后两列完全相同，故 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow P \rightleftharpoons Q$．

表　1.13

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	$P \rightleftharpoons Q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

表 1.14 给出一些常用的等值式．