



文登教育集团课堂用书
考研数学强化班指定讲义

inner 赢家图书

2011 >>>

考研数学

核心题型

经济类·数学三

—— 始于1996年，每年服务30万考生 ——

陈文灯 主编

- » 陈文灯教授亲自执笔考研核心教材，**文登数学强化班课堂讲义**
- » 本书提出一个观点，**数学也需要记忆**，记定理、公式，背核心题型
- » 本书揭示一个事实，**考数学就是考基础、考题型**，考代表数学本质的核心题型

买正版图书赠**60**元文登网校课程



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

数学问题主要是由各种类型的题(题型)构成的。本书是一本省时、省力、高效的考研数学题型辅导书。它以 20 多年的考研数学试卷为素材,通过分析、归纳,遴选出 170 个核心题型。其内容包括“高等数学题型”、“线性代数题型”和“概率论与数理统计题型”三部分,涵盖《考研数学大纲》(经济类·数学三)的全部内容。书中给出了各类题型的解题方法和技巧,有些方法和技巧是编者独创的,例如,连续函数在闭区间上的有关命题的证明方法、文字不等式的证明方法和各种辅助函数的作法等。这些方法和技巧能大大提高学生的复习效率,化难为简,在考场上常常能直书正确答案,从容过关。

本书适合于参加考研的学生在复习时自学研读,也可以作为考研辅导机构的强化班指定讲义。高等数学的普通学习者和爱好者亦可以阅读,从中可领略数学科学的简约之美和数字运算技巧的奇妙。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学核心题型. 经济类. 数学三/陈文灯主编. -- 北京:
北京航空航天大学出版社, 2010. 4

ISBN 978-7-5124-0031-3

I. ①考… II. ①陈… III. ①高等数学—研究生—入学考试—解题 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 037251 号

考研数学核心题型

[经济类·数学三]

陈文灯 主编

责任编辑 伍 仁

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100191) 发行部电话:010-82317024 传真:010-82328026

http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net

印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:24 字数:614 千字

2010 年 4 月第 1 版 2010 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5124-0031-3 定价:38.00 元

前 言

考研的几门课中,数学是考生公认的最难复习、最难考的一门课。为此,不少学生不得不放弃钟爱的专业,报考不考数学的专业;多数人硬着头皮抱着试试看的态度参加复习考试。数学果真那么可怕,那么难吗?对于原来数学基础不好,又想考高分(135分以上)的考生来说,只要具备两个条件:①比较强的记忆力;②比较强的模仿能力,即可圆“高分梦”。

记忆的作用在于记住重要的概念、理论与定理公式,以及记住计算方法与技巧。没有记住的东西就无模仿可言,可见记忆之重要。一般人都知道学英语需要记忆,单词需要背诵,其实学数学也需要记忆,要在理解的基础上背重要的定理、公式和概念,背核心的题型。

模仿是指对解题方法和技巧的一种描摹或仿效。数学题千千万,如果都用东施效颦的方法,姑且不说做不到,也不会有什么效果。要模仿就应该抓住常考题型进行相似或变异题的训练。无论是以题型为纲进行的数学实践(考研辅导班),还是出版书籍的反馈信息,都证明:抓题型就是抓解题方法和技巧的根本和关键。就是基于这样的考虑,我们才编写了这样一套与《考研数学复习指南》(经济类)相配套的、复习起来省时、省力的考研数学核心题型教材。希望书中的方法和技巧能够在较短的时间里大大提高学生的复习效率,化难为简,从容过关。

本书的特点如下:

① 严格按照《考研数学大纲》的要求,对国内外文献资料,尤其是对20多年来考研试题进行了归纳总结,精选出203个题型。

② 对每个题型进行详尽分析,指出其特点和易混、易错的地方。

③ 书中有许多题型的解题方法和技巧是我们苦心孤诣、冥思苦想出来的,决非市面上其他书籍所共有。

④ 有些题解后有评注,虽然寥寥数语,却可起到画龙点睛、开拓思

路的作用。

⑤ 本书编写属上课讲义的形式,可能更贴近考生。

本书适合于参加研究生入学考试的同学在复习时自学研读,也可作为考研辅导机构的强化班指定讲义。高等数学的普通学习者和爱好者亦可以阅读,并从中领略数学科学的简约之美和数字运算技巧的奇妙。

书中若有不当之处,敬请读者批评指正。

陈文灯

2010年3月

第 1 篇 高等数学题型

第 1 章 极限和连续

● 重要定理、公式和结论

1.1 重要定理

定理 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = A$.

定理 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

定理 3 (极限的保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

定理 4 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$), 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

定理 5 (单调有界定理) 单调增加有上界 (或单调减少有下界) 数列一定有极限.

定理 6* (夹逼定理) 设在 x_0 的邻域内恒有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A, \quad \text{则} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

定理 7 (无穷大和无穷小的关系) 无穷大的倒数为无穷小; 非零的无穷小的倒数为无穷大.

定理 8 (无穷小的运算性质)

- (1) 有限个无穷小的代数和为无穷小;
- (2) 有限个无穷小的乘积为无穷小;
- (3) 无穷小乘以有界变量为无穷小.

定理 9 设有函数 $f(x), g(x)$, 如果在自变量的同一变化过程中, 有 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$$

上式第二个式子中的两个极限若有一个不存在, 则代数和的极限必不存在; 若两个极限都不存在, 则代数和的极限不一定存在.

加法运算可推广到有限个中去.

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0);$$

(4) $\lim [cf(x)] = c \lim f(x) = cA$, 其中 c 为常数.

定理 10 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上连续.

定理 11 初等函数在其定义域内的区间内连续(因为初等函数中可能有孤立点, 所以是在区间内连续).

推论: 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0)$; 若没有说明 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$, 即极限符号和函数符号不能交换顺序.

定理 12 设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 l , 那么它的任一子序列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛, 且极限也是 $l (n_k \rightarrow \infty)$; 反之不真.

定理 13(洛必达法则)

法则 I $\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$ 设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = 0;$$

(2) $f(x), g(x)$ 在 x_0 的某邻域内可导, 在 x_0 点可除外(在无穷远邻域内可导), 且 $g'(x) \neq 0$;

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在(或为 } \infty),$$

$$\text{则 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

法则 II $\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$ 设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \infty;$$

(2) $f(x), g(x)$ 在 x_0 的邻域内可导, 在 x_0 点可除外(在无穷远邻域内可导), 且 $g'(x) \neq 0$;

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在(或为 } \infty),$$

$$\text{则 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

使用法则时需注意的事项:

(1) 只有 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式才能使用法则;

(2) 每用完一次法则, 要将式子整理化简;

(3) 为简化运算, 经常将法则与等价无穷小结合使用;

(4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在(或 ∞) 不能 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在;

(5) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 极限式中含有 $\sin x, \cos x$ (或 $x \rightarrow 0$ 时, 极限式中含有 $\sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x}$), 则

不能用洛必达法则.

1.2 重要公式

$$\text{公式 1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

若极限式具有如下两个特点:

(1) 是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 这是首要特点, 是本质;

(2) $\sin \square$ 与分数线对面变量 \square 形式一致, 则 $\lim \frac{\sin \square}{\square} = 1$.

$$\text{公式 2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

特点如下:

(1) 是 1^∞ 型极限;

(2) 括号中 1 后的变量(包括符号)与指数幂互为倒数.

公式 3(抓大头准则)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & n < m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

即求 $x \rightarrow \infty$ 的极限时, 抓住起决定性作用的 x 的最高次幂的项, 把其余的项略掉.

公式 4(函数连续的充要条件)

函数在一点 x_0 连续的充要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

公式 5

(1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数趋于 $+\infty$ 的速度由慢到快为 $\ln x, x^\alpha (\alpha > 0), a^x (a > 1), x^x$.

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 通项趋于 $+\infty$ 的速度由慢到快为 $\ln n, n^\alpha (\alpha > 0), a^n (a > 1), n!, n^n$.

(3) 常用数列极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0), \text{ 特例为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0 (|p| < 1); \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 (k > 0); \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

(4) 常用函数极限:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

注: 若 $x \rightarrow \infty$ 的极限式中含有 $a^x (a > 0, a \neq 1)$, 特别是 e^x , 或 $\arctan x$, 或 $\operatorname{arccot} x$, 或 $|x|$ (或 $x \rightarrow 0$ 时, 极限式中含 $e^{\frac{1}{x}}$, 或 $\arctan \frac{1}{x}$, 或 $\operatorname{arccot} \frac{1}{x}$, 或 $|x|$), 一定分别求出 $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ (或 $x \rightarrow 0^+, x \rightarrow 0^-$) 时的极限, 若两者相等, 则 $x \rightarrow \infty$ (或 $x \rightarrow 0$) 时的极限存在, 否则不存在.

例 2 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 进行排列,使后者是前者的高阶无穷小,正确的排列次序为().

(A) α, β, γ (B) α, γ, β (C) β, α, γ (D) β, γ, α

分析: 用定义做时,一般用洛必达法则,即对分子、分母求导,所以也可以先求导,然后再比较.
解:

$$\alpha' = \cos x^2 \rightarrow 1 (x \rightarrow 0^+), \quad \beta' = 2x \tan x \sim 2x^2 (x \rightarrow 0^+)$$

$$\gamma' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x^{\frac{3}{2}} \sim \frac{1}{2}x (x \rightarrow 0^+)$$

由于当 $x \rightarrow 0^+$ 时, x 的次数越高,根据题意,排列越靠后;又根据洛必达法则,函数的排列次序和导函数的排列次序是相同的,故(B)为正确选项.

例 3 设 $f(x) = 2x - \sin x - \sin x \cos x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 x 的()阶无穷小.

解:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} (n \text{ 待定}) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x - \sin x \cos x}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \cos x - \cos 2x}{nx^{n-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2 \sin 2x}{n(n-1)x^{n-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 4 \cos 2x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} \end{aligned}$$

最后一个极限式中,当 $x \rightarrow 0$ 时,分子的极限为 5,若此极限存在,则必须 $n=3$.

注: 三角函数一般通过积化和差或倍角公式进行降阶.

题型 2 求未定式函数极限

1. 求 $\frac{0}{0}$ 型未定式函数极限

若 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 称为 $\frac{0}{0}$ 型未定式函数极限.

思路启迪: (1) 通过因式分解或根式有理化, 消去使分母为零的因式, 再用极限运算法则或连续函数的性质求解.

所谓根式有理化, 是指极限式中含有 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ (或 $a \pm \sqrt{b}$), 在求极限之前先用它们的共轭根式 $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ (或 $a \mp \sqrt{b}$) 分别乘以分子、分母, 使其“0”因子呈现出来的一种运算.

(2) 利用等价无穷小代换.

(3) 利用洛必达法则求极限(这是求 $\frac{0}{0}$ 型极限最有效的方法, 但是要注意使用条件).

(4) 若前三种方法无法求得极限, 可考虑用变量代换(通常是作倒代换, 令 $x = \frac{1}{t}$ 或 $x = \frac{1}{t^2}$).

(5) 利用泰勒公式求极限.

例 4 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1+x) - x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x-1})}{\arcsin \sqrt[3]{x-1}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left(3 \sin t + t^2 \cos \frac{1}{t} \right) dt}{(1 + \cos x) \int_0^x \ln(1+t) dt}.$$

解: (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{x(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})}$ (根式有理化)

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x(1 - \cos \sqrt{x})} \quad (\text{等价无穷小代换 } 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{[x \ln(1+x) - x^2](\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \quad (\text{根式有理化})$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x) - x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{1+x} - 1} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot (1+x) = -\frac{1}{2}$$

(3) 因为当 $x \rightarrow 1$ 时, $\sqrt[3]{x-1} \rightarrow 0$, 所以 $\ln(1 + \sqrt[3]{x-1}) \sim \sqrt[3]{x-1}$, $\arcsin \sqrt[3]{x-1} \sim \sqrt[3]{x-1}$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x-1})}{\arcsin \sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}} = 1$$

$$(4) \text{原极限} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left(3 \sin t + t^2 \cos \frac{1}{t} \right) dt}{\int_0^x \ln(1+t) dt}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{\ln(1+x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin x}{x} + x \cos \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} (3 + 0) = \frac{3}{2}$$

注: 等价无穷小代换可简化求极限的过程, 但是用得不得法可出大错. 一般讲, 乘除运算时尽管用; 加减运算时不宜用, 此时常改用泰勒公式.

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

解: 首先用洛必达法则计算.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}}{100x^{99}} = \frac{1}{50} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{102}}$$

极限形式比原先还要复杂,可见用洛必达法则行不通.

遇到 $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 这种形式,一般作倒代换. 本题中令 $t = \frac{1}{x^2}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow +\infty$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{50}}{e^t} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t^{49}}{e^t} = \cdots = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50!}{e^t} = 0 \quad (\text{连续用洛必达法则})$$

例 6 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos \sqrt{x}}.$$

分析: 当 $\frac{0}{0}$ 型未定式呈现 $\frac{f_1(x) - g_1(x)}{f_2(x) - g_2(x)}$ 或 $\frac{x^k}{f_2(x) - g_2(x)}$ 或 $\frac{f_1(x) - g_1(x)}{x^k}$ 的形式, 且用洛必达法则求解较复杂或不可用时, 则考虑用泰勒公式求解. 一般用泰勒公式展开到相互抵消后的一项.

$$\text{解: (1) } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) x^2 + o(x^2), \quad \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) x^2 + o(x^2)$$

$$\text{故原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}.$$

$$(2) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) x^2 + o(x^2)$$

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4!}x^2 + o(x^2)$$

$$\text{故原极限} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4!}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{1}{8} - \frac{1}{4!} + \frac{o(x^2)}{x^2}} = -3.$$

注: 七个常见的泰勒展开式如下(必须熟记):

$$(1) e^u = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \cdots + \frac{1}{n!}u^n + o(u^n);$$

$$(2) \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(u^{2n+2});$$

$$(3) \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + o(u^{2n+1});$$

$$(4) \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n} + o(u^n);$$

$$(5) \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o(u^n);$$

$$(6) \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \cdots + (-1)^n u^n + o(u^n);$$

$$(7) (1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n + o(u^n).$$

2. 求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型函数极限

若 $\lim f(x) = \infty, \lim g(x) = \infty$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 称为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式函数极限.

思路启迪: (1) 用抓大头准则, 即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & n < m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

即求 $x \rightarrow \infty$ 的极限时, 抓住起决定性作用的 x 的最高次幂的项, 而把其余的项略掉.

(2) 利用洛必达法则.

(3) 利用变量代换化为 $\frac{0}{0}$ 型.

例 7 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x-1)(2x+1)}{5x^3+2x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x^2+3}}{2x - \sqrt{2x^4-1}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^2 e^{t^2} dt}{x e^{x^2}}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + e^{-x}}{3e^x + 2e^{2x}}.$$

解: (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x-1)(2x+1)}{5x^3+2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2}{5x^3} = 0.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x^2+3}}{2x - \sqrt{2x^4-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}}}{\frac{2}{x} - \sqrt{2 - \frac{1}{x^4}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(3) \text{原极限} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^2 e^{t^2} dt}{x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+2x^2} = \frac{1}{2}.$$

(4) 若一直用洛必达法则, 则越来越复杂, 得不出结果.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + e^{-x}}{3e^x + 2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x} - e^{-x}}{3e^x + 4e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{2x} + e^{-x}}{3e^x + 8e^{2x}} = \dots$$

经观察, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 分子、分母中的大头为 e^{2x} , 故分子、分母同除以 e^{2x} , 可得

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-3x}}{3e^{-x} + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-3x})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^{-x} + 2)} = \frac{1}{2}$$

3. 求 $\infty-\infty$ 型函数极限

思路启迪: (1) 通分或根式有理化将其化成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型;

(2) 利用倒代换 $x = \frac{1}{t^k}$ (常数 $k > 0$).

例8 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x - 1}).$$

解: (1) 遇到 $\tan x$ 或 $\cot x$ 时, 一般先将它们化为正、余弦的形式.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{x} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \quad (\text{因式分解降幂简化计算}) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \left(\frac{0}{0} \right) \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$(2) I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2 - 3x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x + x} = 3 \quad (\text{抓大头准则})$$

例9 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^3 \ln \frac{x+1}{x-1} - 2x^2 \right).$$

解: (1) 遇到题中含 $\frac{1}{x}$ 时, 要想到倒代换. 令 $\frac{1}{x} = t$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2t} \cdot \frac{1}{1+t} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) I &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\ln \frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x} \right) \stackrel{\text{令 } t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t) - \ln(1-t) - 2t}{t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} - 2}{3t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2}{3t^2(1-t^2)} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

4. 求 $0 \cdot \infty$ 型未定式函数极限

思路启迪: 一般通过将“0”或“ ∞ ”项下放(放到分母的位置上)转化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$

型, 然后再用洛必达法则或抓大头准则.

设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty$, 则

$$\lim f(x)g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

一般来讲, 简单函数下放, 复杂函数不下放! 特别是对数函数和反三角函数 $\arcsin x, \arctan x$ 等不下放.

例 10 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 4x^2 \right) \cdot x^2$.

解:
$$I = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan 4x^2}{x^{-2}} \left(\frac{0}{0} \right) \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{8x}{1+(4x^2)^2}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4}{1+16x^4} = \frac{1}{4} \quad (\text{抓大头准则})$$

例 11 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$.

分析: 本题中含根式, 先对根式进行有理化处理.

解:
$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} [(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) - (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \cdot \left[\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{-2}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1} \right) \left(\sqrt{1} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right)} = -\frac{1}{4}$$

5. 求 $0^0, \infty^0, 1^\infty$ 型函数极限

思路启迪: 利用对数恒等式 $x = e^{\ln x}$ 化为 $0 \cdot \infty$ 型. 对于 $1^\infty = e^A$ 型极限, 一般有如下两种情形:

(I) 设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty$, 则有

$$I = \lim [1 \pm f(x)]^{g(x)} (1^\infty)$$

$$= e^{\lim g(x) \ln [1 \pm f(x)]} = e^{\pm \lim f(x) g(x)} \quad (\ln [1 \pm f(x)] \sim \pm f(x))$$

结论: $A =$ 括号中 1 后的函数与指数幂乘积的极限.

(II) 设 $\lim f(x) = 1, \lim g(x) = \infty$, 则有

$$I = \lim f(x)^{g(x)} (1^\infty)$$

$$= e^{\lim g(x) \ln [1 + (f(x) - 1)]} = e^{\lim [f(x) - 1] g(x)}$$

结论: $A = \lim [f(x) - 1] g(x)$.

例 12 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 3x)^{\frac{1}{\tan x}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}.$$

解: 这类题结合等价无穷小代换可事半功倍.

$$(1) \text{ 属于 (I) } . A = \lim_{x \rightarrow 0} (-\sin 3x) \frac{1}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-3x) \frac{1}{x} = -3, \text{ 故 } I = e^{-3}.$$

$$(2) \text{ 属于 (II) } . A = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \frac{1}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} x^2 \right) \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}, \text{ 故 } I = e^{-\frac{1}{2}}.$$

注：此种题型常出现在填空题中，不考查解题步骤，利用题中技巧可快速准确地得到答案。

例 13 计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2} \right)^x \quad (a_1 > 0, a_2 > 0).$$

解：(1) 属于(II). $A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} - 1 \right) \cdot \frac{x+1}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6}{3x+2} \cdot \frac{x+1}{3} = -\frac{2}{3}$, 故 $I = e^{-\frac{2}{3}}$.

(2) 题中含有两个参数 a_1, a_2 , 需讨论.

当 $a_1 < a_2$ 时, $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x = 0$; 当 $a_1 > a_2$ 时, $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x = +\infty$; 当 $a_1 = a_2$ 时, 极限

属于 1^∞ 型.

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2} - 1 \right) x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a_1 - a_2)x + b_1 - b_2}{a_2x + b_2} \cdot x = \frac{b_1 - b_2}{a_2}$$

故 $I = e^{\frac{b_1 - b_2}{a_2}}$.

例 14 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 且满足 $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$, 求 $f(x)$.

解：显然 $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$ 为 $1^\infty = e^A$ 型极限, 所以有

$$A = \frac{1}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)}{f(x)} - 1 \right] \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{hx} \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{x}{f(x)} f'(x)$$

于是得 $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2}$, 两边积分得 $\ln f(x) = -\frac{1}{x} + \ln C$, 即 $f(x) = Ce^{-\frac{1}{x}}$, 两边取 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限可得 $C = 1$, 故 $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

例 15 设 $f''(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$.

分析: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]}{x}} = e^3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]}{x} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

解：由题设 $3 = A = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{f(x)}{x} \right] \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + f(x)}{x^2}$. 于是可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 + f(x)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

又由洛必达法则可得

$$3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + f'(x)}{2x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} [2x + f'(x)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$$

继续用洛必达法则可得

$$3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f''(x)}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} [2 + f''(x)] = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 4 \Rightarrow f''(0) = 4$$

易知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$ 为 1^∞ 型, 所以

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} \right] \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2} = 2$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^2$.

例 16 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1+x^2)]^{e^{x^2}-1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}.$$

解: (1) 此题属于 0^0 型未定式, 利用对数恒等式转换.

$$\begin{aligned} I &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} (e^{x^2}-1) \ln[\ln(1+x^2)]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x^2} \quad (e^{x^2}-1 \sim x^2, \ln(1+x^2) \sim x^2) \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x^2}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2x)}{-2x^3}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} x^2} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

(2) 此题属于 ∞^0 型未定式, 利用对数恒等式转换.

$$I = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(x + \sqrt{1+x^2})} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = e^0 = 1$$

6. 求 $0 \cdot$ 有界量类型函数极限

思路启迪: 利用无穷小与有界量的乘积仍为无穷小的结论.

例 17 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{2}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1}.$$

解: (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, x 是无穷小量, $\left| \sin \frac{2}{x} \right| \leq 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{2}{x} = 0$.

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$, 且 $|\cos x| \leq 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cos x}{x^2+1} = 0$.

题型 3 求分段函数在分界点的极限

思路启迪: 当分界点两侧的函数表达式相同时, 利用定义; 当分界点两侧的函数表达式不相同, 要分别求函数在该点处的左、右极限. 若左、右极限相等, 则极限存在, 否则不存在, 即若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的两侧表达式不

同, 为 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x > x_0 \\ f(x_0), & x = x_0 \\ f_2(x), & x < x_0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_1(x)$ 时, 极限存

在, 否则不存在.

例 18 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+1}-1} & (a>0), \quad -1 < x < 0 \\ \frac{(m-1)x-m}{x^2-x-1} & (m \neq 0), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

试问 a 为何值时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

解:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(m-1)x-m}{x^2-x-1} = m$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{x^2+a^2}-a)(\sqrt{x^2+a^2}+a)(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+a^2}+a)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+a^2}+a)} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}
 \end{aligned}$$

故当 $f_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 即 $a = \frac{1}{m}$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

题型 4 极限式中常数的确定

思路启迪: 没有固定模式, 需观察极限式, 结合各类极限的求法和极限的运算法则进行计算. 如果是分式极限, 则有以下结论:

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ (k 为常数), 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ (k 为常数), 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (∞), 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ (∞).

例 19 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax + b \right) = 3$, 求常数 a, b .

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax + b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 + (b-a)x + 1 + b}{x+1} = 3$, 由抓大头准则可得 $1-a=0$, $b-a=3$, 故 $a=1, b=4$.

例 20 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2} = c$, 且 $c \neq 0$, 求常数 a, b , 使得当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim ax^b$.

解: 由极限式可得, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} f(x) = 0$, 故当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)} - 1 \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} f(x)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}f(x)}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} f(x)}{x^2} = c$$

即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x^3} = c$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim 2cx^3$, 故 $a=2c, b=3$.

例 21 设 $f(x)$ 是多项式, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-8x^8}{2x^2+3x+1} = 4$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 8$, 求 $f(x)$.

解: 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-8x^8}{2x^2+3x+1} = 4$ 及抓大头准则可设 $f(x) = 8x^8 + 8x^2 + ax + b$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 8$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow b = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^8 + 8x^2 + ax}{x} = 8 \Rightarrow a = 8$$

故 $f(x) = 8x^8 + 8x^2 + 8x$.

例 22 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有一阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0$, 若

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(h) + bf(2h) - f(0)}{h} = 0$$

试确定 a, b 的值.