目 录

第一篇 高等数学

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第一章　函数　极限　连续

一、选择题

1.【解】$f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，因此 $\forall x\in(-\infty,\infty)$ 有 $f(x)=f(-x)$.

$g(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，所以 $\forall x(-\infty,\infty)$ 有 $g(-x)=-g(x)$.

因此 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$f(g(-x))=f(-g(x))=f(g(x))$，所以 $f(g(x))$ 为偶函数.

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$g(f(-x))=g(f(x))$，所以 $g(f(x))$ 为偶函数. 故选[B].

2.【解】对 $\forall\delta>0$ 当 $x\in(0,\delta)$ 时，$|f(x)|=\left|\dfrac{(1-\cos x)(x^2+x+1)}{x^3+x^2}\right|\geqslant\dfrac{x^2(x^2+x+1)}{2(x^3+x^2)}\geqslant\dfrac{x^2+x+1}{2(x+1)}$，而当

$x\in(0,\delta)$，$\delta\to0$ 时，$\dfrac{x^2+x+1}{2(x+1)}\to0$，即 $f(x)\to0$. 因此 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 上有界.

对 $X>0$，$|f(x)|=\left|\dfrac{(1-\cos x)(x^2+x+1)}{x^3+x^2}\right|<2\left|\dfrac{x^2+x+1}{x^3+x^2}\right|$，而在 $x\in(X,+\infty)$ 上，$\left|\dfrac{x^2+x+1}{x^3+x^2}\right|\to1$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界，所以选[D].

3.【解】因为 $g(x)=f(x)+g(x)-f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[(f(x)+g(x))-f(x)]$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ 存在，而由已知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，

但此时与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在矛盾，故 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 必不存在. 所以选[C].

4.【解】① 由 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=a$ 连续.

例如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0;\\-1, & x<0,\end{cases}$ 显然 $|f(x)|=1$. 则 $|f(x)|$ 在 a 处连续，但 $f(x)$ 在 $x=a$ 间断，因此①是错误的.

② 考察例子 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq x_0;\\0, & x=x_0,\end{cases}$ $\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=1=\lim\limits_{h\to0}f(x_0-h)$，但 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，所以②是错误的.

③ 当 $f(x_0)\neq0$ 时，$f(x)g(x)$ 在点 x_0 必不连续. 因为假设 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 连续，又不妨设在点 x_0 的邻域内 $f(x)\neq0$，由于 $f(x)$ 在点 x_0 连续，故 $g(x)=\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)}$ 在点 x_0 也连续与题设矛盾.

但当 $f(x)=0$ 且 $g(x)$ 有定义时，显然 $f(x)g(x)=0$ 在点 x_0 连续. 所以③错误.

④ 不一定连续，例如狄利克雷函数 $f(x)=g(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数};\\0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 在对 $\forall x\in R$ 都不连续，其和 $f(x)+g(x)=\begin{cases}2, & x\text{为有理数};\\0, & x\text{为无理数},\end{cases}$ 对一切 $x\in R$ 也不连续.

但对于例子 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数};\\0, & x\text{为无理数},\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\text{为有理数};\\1, & x\text{为无理数},\end{cases}$ 则 $f(x)+g(x)\equiv1$，对一切 $x\in R$ 都连续.

综上可得选[A].

5.【解】因为当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 均为 $(x-x_0)$ 的同阶无穷小，所以有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=c_1\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{x-x_0}=c_2\neq 0$. 又因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}-\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{x-x_0}=c_1-c_2=c$.

当 $c=c_1-c_2\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-x_0}=c$，则 $f(x)-g(x)$ 为 $x-x_0$ 的同阶无穷小.

当 $c=c_1-c_2=0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-x_0}=c=0$ 时，$f(x)-g(x)$ 是 $x-x_0$ 的高阶无穷小. 因此(A)和(B)均不正确. 又因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)g(x)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{x-x_0}=0\cdot c_2=0$，所以 $f(x)g(x)$ 必是 $x-x_0$ 的高阶无穷小. 故选[C].

6.【解】$x\to 0$ 时，$e^{\tan x-x}-1\sim \tan x-x$.

$$又因为\lim_{x\to x_0}\frac{e^{\tan x}-e^{x}}{x^{n}}=\lim_{x\to 0}e^{x}\frac{e^{\tan x-x}-1}{x^{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-x}-1}{x^{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^{n}}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^{2}x-1}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{2}x}{nx^{n}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}}{nx^{n-1}}\xlongequal{当\ n=3\ 时}\frac{1}{3}.$$

所以 $n=3$，故选[C].

7.【解】方法一：分别分析 A、B、C 项.

(A) 命题是错误的. 因为 $f(x)g(x)$ 在 x 处可能连续也可能不连续. 例如：

$f(x)=g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0;\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 都不连续. 但 $f(x)g(x)\equiv 1$，$(x\in R)$ 在 $x_0=0$ 却是连续的.

又如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0;\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\operatorname{sgn}x$. 它们在 $x_0=0$ 都不连续.

$f(x)g(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ 1, & x<0,\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 也不连续.

[B] 项中由于不能确定 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是否连续，所以不能保证 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$.

[C] 选项，取反例，取 $f(x)=2x^2$，$g(x)=3x^2$，则有 $f(x)<g(x)$.

因当 $x\to 0^+$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0=a$，$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0=b$，所以有 $a=b$，所以 C 项不正确.

故选[D].

方法二：直接证明[D]，因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$，$a<b$.

取 $\delta>0$，$\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}$，对 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ 有 $|f(x)-a|<\dfrac{b-a}{2}$，$|g(x)-b|<\dfrac{b-a}{2}$.

所以有 $f(x)<\dfrac{a+b}{2}$，$g(x)>\dfrac{a+b}{2}$，所以有 $f(x)<g(x)$.

8.【解】先写出选项中各个函数的具体表达式.

对于[A]项：因为在 $x=0$ 附近 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\left|\dfrac{1}{x}\right|$，所以 $\left|x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，故 $\max\{f(x),g(x)\}=1$ 处处连续.

对于[B]项，$\min\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 它在 $x=0$ 也连续.

对于[C]项，$f(x)-g(x)=\begin{cases}1-x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ -1, & x=0,\end{cases}$ 因为 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\sin\dfrac{1}{x}\right)=1\neq f(0)-g(0)=-1$，所以 $x=0$ 为它的间断点.

对于[D]项,因为$f(x)+g(x)=\begin{cases}1+x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0,\end{cases}$因为$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=1=f(0)$,

故$f(x)+g(x)$在$x=0$连续,故选[C].

9.【解】方法一:需先求极限得出$f(x)$的表达式,因为$f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1;\\ \dfrac{1+x}{2}, & |x|=1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$可知$x=-1,x=1$为函数的分段点,若作出函数的图形则可知$x=1$为$f(x)$的间断点,$x=-1$为$f(x)$的连续点,因此选[B].

方法二:也可利用间断点定义来判定. 由于$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}0=0$. $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(1+x)=0$.

因此$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=0=f(-1)$可知$x=-1$为$f(x)$的连续点. 而$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(1+x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}0=0$,可知$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在. 因此$x=1$为$f(x)$的间断点.

10.【解】因为$f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$,而$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}\xlongequal{\frac{0}{0}\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}=1$,所以知$x=0$为跳跃间断点,因此选[B].

二、填空题

11.【解】因为$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}|x|<1;\\ 0, & \text{当}|x|\geqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & \text{当}|x|\leqslant 1;\\ 1, & \text{当}|x|<1.\end{cases}$所以①:当$|x|\leqslant 1$时,$f(g(x))=f(0)$,

即$f(g(x))=1$;当$|x|>1$时,$f(g(x))=f(1)$,即$f(g(x))=0$. 亦即$f(g(x))=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

② 当$|x|<1$时,$g(f(x))=g(1)$,即$g(f(x))=0$;当$|x|\geqslant 1$时,$g(f(x))=g(0)$,即$g(f(x))=0$,亦即$g(f(x))=\begin{cases}0, & |x|<1;\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$即$g(f(x))=0,(x\in R)$.

12.【解】当$x\geqslant 0$时,$f(x)=-x<0$,所以$f(f(x))=\dfrac{1}{1+x}$;当$x<0$时,$f(x)=\dfrac{1}{1-x}>0$,所以$f(f(x))=-\dfrac{1}{1-x}$.

即$f(f(x))=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0;\\ -\dfrac{1}{1-x}, & x<0.\end{cases}$

13.【解】因为在$[0,1]$上$f(x)=nx(1-x)^n$可取最大值. 设存在点x_0使得$f(x)$在x_0的最大值,所以有$f'(x_0)=0$,即$f'(x_0)=n(1-x_0)^n-n^2x_0(1-x_0)^{n-1}=0$,所以有$x_0=1$或$x_0=\dfrac{1}{n+1}$,

显然$f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)>f(1)$,故$M_n=f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{n+1}\left(1-\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$,

所以$\lim\limits_{n\to\infty}M_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{e}$.

14.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

15.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(1+\cos x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin x}{2\sin 2x\cos 2x\cdot 2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(1+\cos x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sin x}{4\cdot 2\sin x\cos x\cdot\cos 2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(1+\cos x)^{-\frac{1}{2}}}{8\cos x\cdot\cos2x}=\frac{\sqrt{2}}{32}.$$

16.【解】$\lim\limits_{x\to0^+}(1+e^{\frac{1}{x}})^{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\ln(1+x)\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}$.

因为$\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)\cdot\ln(1+e^{\frac{1}{x}})=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}{\frac{1}{\ln(1+x)}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(1+x)[\ln(1+x)]^2e^{\frac{1}{x}}}{x^2(1+e^{\frac{1}{x}})}$

$$=\lim_{x\to0^+}(1+x)\cdot\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^2\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1,$$

所以$\lim\limits_{x\to0^+}(1+e^{\frac{1}{x}})^{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\ln(1+x)\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}=e$.

17.【解】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{x}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{x}{3x+1}\right)^{\left(-\frac{3x+1}{x}\right)\left(\frac{-1}{3x+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{3x+1}}=\dfrac{1}{e}$.

18.【解】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin^2\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x^2\ln(\sin^2\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})}\xrightarrow{\text{令 }t=\frac{1}{x}}\lim\limits_{t\to0}e^{\frac{\ln(\sin^2t+\cos t)}{t^2}}=\lim\limits_{t\to0}e^{\frac{\sin^2t+\cos t-1}{t^2}}$

$$=\lim_{t\to0}e^{\frac{\cos t(1-\cos t)}{t^2}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

19.【解】因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1+e^x}{x+e^x}}{1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+e^x}{x+e^x}=2$,所以原式$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(x+e^x)}=e^2$.

20.【解】$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln(1+\dfrac{3}{x})-\sin\ln(1+\dfrac{1}{x})\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[3\cos\ln(1+\frac{3}{x})\frac{1}{1+\frac{3}{x}}-\cos\ln(1+\frac{1}{x})\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right]=3-1=2.$$

21.【解】因为$y''+(x-1)y'+x^2y=e^x$,所以$y''=-(x-1)y'-x^2y+e^x$.

因为$y(0)=0,y'(0)=1$,所以$y''(0)=2$. 且$y''(x)$在$x=0$处连续.

所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y''(x)}{2}=\dfrac{y''(0)}{2}=1$.

22.【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{-1}^{2}\arctan(nx)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-1}^{2}\arctan(nx)\mathrm{d}(nx)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\arctan nx\cdot(nx)-\int_{-1}^{2}nx\cdot\frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\arctan(nx)\cdot nx\Big|_{-1}^{2}-\int_{-1}^{2}\frac{n^2x}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\arctan nx\cdot(nx)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\frac{1}{1+n^2x^2}\mathrm{d}(1+n^2x^2)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\arctan nx\cdot(nx)-\frac{1}{2}\ln(1+n^2x^2)\Big|_{-1}^{2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[2\arctan2n-\arctan n-\frac{1}{2n}(\ln(1+4n^2)-\ln(1+n^2))\right]=\frac{\pi}{2}.$$

23.【解】因为$\lim\limits_{x\to0}(1-e^{\frac{x}{x-1}})=0$,所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$,可以得出$x=0$是$f(x)$的无穷间断点.

又因为$\lim\limits_{x\to1+0}e^{\frac{x}{x-1}}=+\infty$,$\lim\limits_{x\to1-0}e^{\frac{x}{x-1}}=0$,所以$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=-1$,

可以得出$x=1$是$f(x)$的跳跃间断点.

三、解答题

24.【解】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-\sin(x-1)}{\sqrt[3]{2x-x^2}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-\sin(x-1)}{(2x-x^2-1)\cdot\frac{1}{3}}=\lim\limits_{x\to1}3\dfrac{-\ln x+\sin(x-1)}{(x-1)^2}$

$$= \lim_{x\to1}\frac{3}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{x}+\cos(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{3}{2}\frac{x\cos(x-1)-1}{x(x-1)} = \lim_{x\to1}\frac{3}{2}\cdot\frac{\cos(x-1)-x\sin(x-1)}{2x-1} = \frac{3}{2}.$$

25.【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\cos3x}{e^x-1-x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+\sin3x\cdot3\right)}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+3\sin3x}{x}$

$$= \lim_{x\to0}\left[-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3\sin3x}{x}\right] = -1+9 = 8.$$

26.【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}} = \dfrac{\sqrt{4}+1}{1+0} = 3.$

27.【解】$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sqrt{1-\cos^2x}}{x}+\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos^2x}}{x}+\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}+0 = 1.$

28.【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}[(2-\cos x)^x-1] = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}[e^{x\ln(2-\cos x)}-1]$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}[1+x\ln(2-\cos x)-1+o(x\cdot\ln(2-\cos x))] = \lim_{x\to0}\frac{\ln(2-\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

29.【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right] = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left[\left(\dfrac{3+\cos x-1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right] = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x}\cdot\frac{\cos x-1}{3}}{x}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2} = \lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$

30.【解】①:设 $a_j=\max\{a_1,a_2\cdots a_n\}$ 有 $a_j\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \leqslant f(x) = a_j\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\left[\left(\dfrac{a_1}{a_j}\right)^x+\cdots+\left(\dfrac{a_n}{a_j}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}} \leqslant a_j\left(\dfrac{1}{n}\right)\cdot n^{\frac{1}{x}}$

$=a_j$,因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=1$,由夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a_j=\max\{a_1,a_2\cdots a_n\}$.

② 当 $x\to-\infty$ 时,与①同理可证得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a_j=\max\{a_1,a_2\cdots a_n\}$.

③ 由洛必达法则得:

$\lim\limits_{x\to0}\ln f(x) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x} = \dfrac{\ln(a_1a_2a_3\cdots a_n)}{n}$,

于是 $\lim\limits_{x\to0}f(x) = \lim\limits_{x\to0}e^{\ln f(x)} = e^{\frac{\ln(a_1a_2\cdots a_n)}{n}} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

31.【解】因为 $x\to0$ 时,$x^2\to0$,所以由题设得 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx}-2=0$,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx}-2}{x^2} \xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{x\to0}\frac{\frac{a}{2}(1+ax)^{-\frac{1}{2}}+\frac{b}{3}(1+bx)^{-\frac{2}{3}}}{2x} = -\frac{3}{2}.$$

因为 $x\to0$ 时,$2x\to0$,所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a}{2}(1+ax)^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{b}{3}(1+bx)^{-\frac{2}{3}}=0$,所以有 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}=0$. ①

又因原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{a^2}{2}(-\frac{1}{2})(1+ax)^{-\frac{3}{2}}+\frac{b^2}{3}(-\frac{2}{3})(1+bx)^{-\frac{5}{3}}}{2} = -\dfrac{3}{2}$.

所以 $-\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{2b^2}{a}=-3$，即 $\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{2b^2}{9}=3$. ②

所以由①②得 $\dfrac{b^2}{9}+\dfrac{2b^2}{9}=3$，所以 $b^2=9$，所以 $b=\pm 3$. 由题意，$a>0$，所以有 $a=2,b=-3$.

32.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(1+bx+cx^2)-1-ax}{x^4}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(1+bx+cx^2)+e^x(b+2cx)-a}{4x^3}$，所以有 $1+b-a=0$.

又因原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(1+bx+cx^2)+2e^x(b+2cx)+2ce^x}{12x^2}$，所以有 $1+2b+2c=0$，继续洛必达法则原式

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(1+bx+cx^2)+3e^x(b+2cx)+e^x\cdot 2c+4ce^x}{2x}$，所以有 $1+3b+6c=0$.

所以有 $\begin{cases}1+b-a=0,\\1+2b+2c=0,\\1+3b+6c=0,\end{cases}$ 所以解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{3},\\b=-\dfrac{2}{3},\\c=\dfrac{1}{6}.\end{cases}$

33.【解】因为当 $x\to 0$ 时，有 $e^x-1\sim x,(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，于是可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{6}\frac{f(x)\cdot 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\frac{f(x)}{x}=2\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=6.$$

34.【解】若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$. 因为 $f(x)+k=2f(x+1)$，所以 $f(0)+k=2f(1)$.
因为 $f(1)=1^{\sin 1}=1$，所以 $f(0)+k=2$，又因为 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x\ln x}=1$，所以 $1+1=2$，所以 $k=1$.

35.【解】当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=ax^2+bx$；当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{a}{x^{2n-3}}+\dfrac{b}{x^{2n-2}}}{x+\dfrac{1}{x^{2n-1}}}=\dfrac{1}{x}$.

当 $x=1$ 时，$f(1)=\dfrac{1}{2}(1+a+b)$. 当 $x=-1$ 时，$f(-1)=\dfrac{1}{2}(-1+a-b)$.

因 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故 $f(1^-)=f(1^+)=f(1)$，即 $a+b=1=\dfrac{1}{2}(1+a+b)$. ①

又因 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续，故 $a-b=\dfrac{1}{2}(-1+a-b)$. ②

解方程①②得 $a=0,b=1$.

36.【解】因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，所以对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x|<\delta$ 时有 $|f(x)|<\varepsilon$，所以对 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x-x_0)|<\varepsilon$. 由 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 得，$f(x+0)=f(x)+f(0)$，所以 $f(0)=0$.
因为 $0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)$，所以 $f(-x)=-f(x)$. 所以 $|f(x)-f(x_0)|=|f(x)+f(-x_0)|=|f(x-x_0)|<\varepsilon$，所以对 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$ 有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.
即证得 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

第二章　一元函数微分学

一、选择题

1.【解】(A) 项正确. $F(x)$ 为奇函数则 $F(-x)=-F(x)$,

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-F(-(x+\Delta x))+F(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(-x+(-\Delta x))-F(-x)}{-\Delta x}$$

$=F'(-x)$.

(B) 项正确, $F(x)$ 为偶函数, 则 $F(-x)=F(x)$,

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{F(-x-\Delta x)-F(-x)}{-\Delta x}=-F'(-x),\text{即} -F'(x)=F'(-x).$$

(C) 项正确, $F(x+T)=F(x)$, 且 $F'(x)$ 存在, 所以

$$F'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+T+\Delta x)-F(x+T)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x).$$

所以由排除法知 D 项错误.

2.【解】取 $u=x-t$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x xf(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=1-\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+xf'(x)}{f(x)+f(x)+xf'(x)}$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+f'(x)+xf''(x)}{f'(x)+f'(x)+f'(x)+xf''(x)}=1-\lim_{x\to 0}\frac{3f''+xf'''}{4f''+xf'''}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.\text{故选 C.}$$

3.【解】由题设知 $f''(x)=1-e^{-x}-x[f'(x)]^2$, 这表明 $f''(x)$ 存在, 于是 $f'(x)$ 连续. 由①式即知 $f''(x)$ 连续, 利用洛比达法则可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}-\lim\limits_{x\to 0}[f'(x)]^2=1-0=1$, 且 $f''(0)=0$, 由极限的保号性知 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某空心邻域中与 x 同号, 即当 $x>0$ 时, $f''(x)>0$; 当 $x<0$ 时, $f''(x)<0$, 故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 左侧邻近是凸的, 右侧邻近是凹的. 故选 D.

4.【解】取特殊函数验证: 对于②: 取 $f(x)=1+x$, $g(x)=2-x$, 代入 I_1, I_2, 计算知 $I_1<I_2$, 所以②不正确. 对于④: 取 $f(x)=g(x)=1+x$, 代入 I_1, I_2, 计算知 $I_1>I_2$, 所以④不正确. 故选 B.

5.【解】因为 $x=0$ 是无穷间断点, 故 $x=0$ 是一条铅直渐近线. 又因为 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-(1+x)\right)=0$, 所以直线 $y=1+x$ 是一条斜渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1+x}{1-e^{-x}}=0$, 所以 $y=0$ 是一条水平渐近线. 故[D]项正确.

6.【解】由反例 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0;\\ 2, & x=0;\\ x-1, & x<0\end{cases}$ 可知[A]项不正确. 由反例 $f(x)=|x|$ 可推得[B]项不正确. 由反例 $f(x)=x^2$, $x_0=3$ 推得[C]项不正确. 故选[D].

7.【解】因为 $f'(x_0)=0$, 且 $f''(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}<0$, 所以由保号性知 $\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}<0$. 因此在区间 $(x_0-\delta,x_0]$ 上 $\Delta x<0$, 有 $f'(x_0+\Delta x)>0$, 所以在区间 $(x_0-\delta,x_0]$ 上 $f'(x)>0$, 即 $f(x)$ 严格单调增, 在区间 $[x_0,x_0+\delta)$ 上 $\Delta x>0$, 有 $f'(x_0+\Delta x)<0$, 所以在区间 $[x_0,x_0+\delta)$

上，$f'(x)<0$，即$f(x)$严格单调减. 因此选[C]项.

8. 【解】由反例$f(x)=\sin x, x\in[0,\pi]$推得[A]不正确. 由反例$f(x)=\sin x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$推得[B]不正确.

由反例$f(x)=1$，推得[C]不正确. 因此选[D].

9. 【解】由反例$f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0;\\ -1, & x<0,\end{cases}$可以推得①是不正确的.

因$f'_-(x_0)$与$f'_+(x_0)$均存在，则可推得$f(x_0)$在$x=x_0$处左连续且右连续. 因此$f(x)$在$x=x_0$处必连续. 因$f(x)$在$x=x_0$处连续，且$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$. 即有$f'(x_0)=A$. 因此可得③正确. 所以应选[C].

10. 【解】由可导定义，可证得①②是正确的. 由反例$\varphi(x)=1, a=0$可证得$f(x)=|x-a|\varphi(x)$在$x=a$处不可导，所以③不正确. 由反例$f(x)=|x|, a=0$可证得④不正确. 因此选[A].

11. 【解】方法一：用排除法：①设$f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$，则$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$内有界，且$f'(x)=2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2}$在$(0,+\infty)$内存在，但$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2}\right)$不存在，故排除A.

②设$f(x)=\sin x$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$内有界可导，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，但$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1\neq 0$，故排除C.

③设$f(x)=\cos\sqrt{x}$，则$f'(x)=\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$，$f(x)$在$(0,+\infty)$内有界且可导，但$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\frac{1}{2}\neq 0$，故排除D. 因此选B.

方法二：（反证法）. 由题设$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在. 设$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A>0$，则对于$\varepsilon=\frac{A}{2}>0$，$\exists X>0$，使$x>X$时，$|f'(x)-A|<\varepsilon=\frac{A}{2}$，即$\frac{A}{2}=A-\frac{A}{2}<f'(x)<A+\frac{A}{2}$，所以$f'(x)$有界且大于$\frac{A}{2}$. 在区间$[X,x]$上用拉格朗日中值定理得$f(x)=f(X)+f'(\xi)(x-X)>f(X)+\frac{A}{2}(x-X)$，从而$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，与题设$f(x)$有界矛盾. 同理可证，当$A<0$时也矛盾. 所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

12. 【解】因为$f'(x)$存在，且函数在$x=x_0$处取得极值所以$f'(c)=0$.

由假设方程有$x_0f''(x)=1-e^{x_0}$，所以$f''(c)=\frac{1-e^{-c}}{c}>0$. 因此$f(x)$在$x=x_0$处取得极小值. 因此选[B].

13. 【解】函数$|x|$，$|x-1|$，$|x+1|$分别仅在$x=0, x=1, x=-1$不可导且它们处处连续. 因此只须在这些点考察$f(x)$是否可导，下面按定义考察：

在$x=0$处，$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=(x^2+1)^{\frac{1}{3}}|x^2-1|\cdot\frac{|x|}{x}$，于是

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1\times 1\times\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$，

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1\times 1\times\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$，故$f'_+(0)\neq f'_-(0)$，因此$f(x)$在$x=0$处不可导.

在$x=1$处，$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=(x^2+1)^{\frac{1}{3}}|x^2+x|\cdot\frac{|x-1|}{x-1}$，于是

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2^{\frac{1}{3}}\times 2\times\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=2^{\frac{4}{3}}$，

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2^{\frac{1}{3}}\times 2\times\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1-x}{x-1}=-2^{\frac{4}{3}}$，

故$f'_+(1)\neq f'_-(1)$，因此$f(x)$在$x=1$处不可导.

在 $x=-1$ 处，$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=(x^3+1)^{\frac{1}{3}}\cdot|x^2-x|\cdot\frac{|x+1|}{x+1}$，于是

$f'(-1)=\lim\limits_{x\to-1}(x^3+1)^{\frac{1}{3}}|x^2-x|=0$，且 $\frac{|x+1|}{x+1}$ 为有界变量，所以 $f'(-1)=0$，因此 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导，故选 B.

14.【解】若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta xg(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}g(x_0+\Delta x)$ 存在，即 $f'(x_0)$ 存在等价于 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在，故选 C.

15.【解】由极限的保号性知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{|x|}=a,a>0\Rightarrow\frac{f''(x)}{|x|}>0$（在 $x=0$ 的空心邻域），由此 $f''(x)>0$ 的空心邻域，$f'(x)$ 单调增. 又由 $f'(0)=0$，$f'(x)$ 在 $x=0$ 由负变正，由极值第一充分条件，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，即 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值. 故选 A.

16.【解】因为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处未必可导，所以[A] 不正确. 又因为 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内连续，且 $f(a)$ 为极大值. 因此在 $x=a$ 的某邻域内，当 $x\in(a-\delta,a)$ 时，$f(x)<f(a)$，但未必单增. 当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，$f(x)>f(a)$，但未必单减. 因此[B] 不正确.

又因为 $f(a)$ 为极大值，因此对 $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$ 有 $f(x)<f(a)$ 即 $f(x)-f(a)\leqslant0$.

又因为 $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$ 使得 $x-a\leqslant0$ 或 $x-a\geqslant0$，因此 $(f(x)-f(a))(x-a)\leqslant0$ 或 $(f(x)-f(a))(x-a)\geqslant0$，即[C] 不正确. 因此选[D].

二、填空题

17.【解】由拉格朗日中值定理知 $f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$，其中 $a<\xi<x$，则

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f'(a)(x-a)}-\frac{1}{f(x)-f(a)}\right]=\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f'(a)(x-a)}-\frac{1}{f'(\xi)(x-a)}\right]=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\cdot\frac{f'(\xi)-f'(a)}{f'(\xi)f'(a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f'(\xi)-f'(a)}{\xi-a}\cdot\frac{\xi-a}{x-a}}{f'(\xi)f'(a)}=\frac{f''(a)}{[f'(a)]^2}.$$

18.【解】因 $\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^2}=A(A\neq0)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+xf'(x)-\frac{1}{1+x}}{2x}=A(*)$，故有 $\lim\limits_{x\to0}\left[f(x)+xf'(x)-\frac{1}{1+x}\right]=0$，所以 $f(0)-1=0$，即 $f(0)=1$. 又对 $(*)$ 式左边用洛比达法则可

得：$\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)+f'(x)+xf''(x)+\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=A$，即 $2f'(0)=2A-1$，所以 $f'(0)=A-\frac{1}{2}$.

19.【解】目标函数为 $f(x)=d=\frac{|x+y-6|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|x+y-6|}{\sqrt2}$，约束条件为 $x^2+2xy+2y^2-4y=0$.

构造函数 $F(x,y)=\frac{|x+y-6|}{\sqrt2}+\lambda(x^2+2xy+2y^2-4y)$.

$$\text{则 ①}\begin{cases}f'_x=\frac{1}{\sqrt2}+2\lambda(x+y)=0\Rightarrow x+y=-\frac{\sqrt2}{4\lambda},\\ f'_y=\frac{1}{\sqrt2}+\lambda(2x+4y-4)=0\Rightarrow x+2y=-\frac{\sqrt2}{4\lambda}+2,\\ x^2+2xy+2y^2-4y=0\Rightarrow(x+y)^2+(y-2)^2=4.\end{cases}$$

由①得，$\lambda=\pm\frac{1}{4\sqrt2}$，所以有 $x+y=2$ 或 -2，所以有 $d=\frac{|\pm2-6|}{\sqrt2}=2\sqrt2$ 或 $4\sqrt2$，因此最小值为 $2\sqrt2$.

20.【解】$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}})=2.$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2-x+1}-2x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

所以斜渐近线方程为 $y=2x-\frac{1}{2}$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x(x-\sqrt{x^2-x+1})}=0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}\right)=\frac{1}{2}$,所以水平渐近线为 $y=\frac{1}{2}$,无垂直渐近线.

21.【解】对 $x^3+y^3-3axy=0$ 两边对 x 求导得 $3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3ay-3ax\frac{dy}{dx}=0$,所以 $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-ay}{ax-y^2}$,则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\left(2x-a\frac{dy}{dx}\right)(ax-y^2)-\left(a-2y\frac{dy}{dx}\right)(x^2-ay)}{(ax-y^2)^2}$$

$$=\frac{\left(2x-a\cdot\frac{x^2-ay}{ax-y^2}\right)(ax-y^2)-\left(a-2y\cdot\frac{x^2-ay}{ax-y^2}\right)(x^2-ay)}{(ax-y^2)^2}$$

$$=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}.$$

22.【解】由莱布尼茨公式 $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^iu^{(i)}v^{(n-i)}$ 则 $f^{(2n+1)}(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}C_{2n+1}^i(x^2)^{(i)}(\sin ax)^{(2n+1-i)}$.

又因为 $(\sin ax)^{(2n+1-i)}=\sin(ax+\frac{(2n+1-i)\pi}{2})a^{2n+1-i}$,

所以 $f^{(2n+1)}(x)=x^2\sin(ax+\frac{(2n+1)\pi}{2})a^{2n+1}+C_{2n+1}^1 2x\sin(ax+\frac{2n\pi}{2})a^{2n}$

$$+C_{2n+1}^2 2\cdot\sin(ax+\frac{(2n-1)\pi}{2})a^{2n-1},$$

所以 $f^{(2n+1)}(0)=2a^{2n-1}C_{2n+1}^2\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}=2n(2n+1)(-1)^{n+1}a^{2n-1}$.

23.【解】因为 $f'(x)=f^2(x)$,所以 $f''(x)=2f(x)f'(x)=2f^3(x)$,$f'''(x)=3\times2\times f^2(x)f'(x)=3\times2\times1f^4(x)$,$f^{(4)}(x)=4\times3\times2\times1\times f^5(x)$,… 所以由归纳法得 $f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$,所以 $f^{(n)}(0)=n!f^{n+1}(0)=n!2^{n+1}$.

三、解答题

24.【解】因 $f(x)=x^2+\frac{2}{x^2}$,所以 $y'=2x-\frac{4}{x^3}=\frac{2x^4-4}{x^3}$,令 $y'=0$,则 $\frac{2x^4-4}{x^3}=0$,所以 $x=\pm\sqrt[4]{2}$.

所以 $x\in(-\infty,-\sqrt[4]{2})\cup(\sqrt[4]{2},+\infty)$ 有 $f'(x)>0$ 所以单增区间为 $(-\infty,-\sqrt[4]{2})$ 和 $(\sqrt[4]{2},+\infty)$.

对 $\forall x\in(-\sqrt[4]{2},\sqrt[4]{2})$ 有 $f'(x)<0$,所以单减区间为 $(-\sqrt[4]{2},0)$ 和 $(0,\sqrt[4]{2})$.

极值点为 $x=\pm\sqrt[4]{2}$,所以 $f(\pm\sqrt[4]{2})=\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$,所以极大值为 $f(-\sqrt[4]{2})=2\sqrt{2}$,极小值为 $f(\sqrt[4]{2})=\sqrt[4]{2}$.

对于 $f''(x)=\frac{24}{x^4}>0$,所以 $f(x)$ 为下凹函数,不存在拐点.

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(x^2+\frac{2}{x^2})=\infty$,则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的铅直渐近线.

25.【解】设切点横坐标为 x_0,则纵坐标为 $1-x_0^2$,即切点坐标为 $(x_0,1-x_0^2)$.

切线在切点斜率为 $y'|_{x=x_0}=-2x|_{x=x_0}=-2x_0$,所以切线方程为 $\frac{y-(1-x_0^2)}{x-x_0}=-2x_0$,即

$y=-2x_0x+x_0^2+1$. 所以该切线与 x 轴交点为 $\left(\dfrac{x_0^2+1}{2x_0},0\right)$，与 y 轴交点为 $(0,x_0^2+1)$.

所以三角形面积为 $S=\dfrac{(x_0^2+1)^2}{4x_0}$.

现取函数 $S(x)=\dfrac{(x^2+1)^2}{4x}$ 的最小值，$S'(x)=\dfrac{2(x^2+1)8x^2-4(x^2+1)^2}{(4x)^2}$

$$=\frac{16x^4+16x^2-4x^4-8x^2-4}{16x^2}=\frac{6x^4+4x^2-2}{8x^2}=0\text{，即 }6x^4+4x^2-2=0.$$

所以 $(6x^2-2)(x^2+1)=0$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$（舍去）.

故三角形面积取最小值时有 $x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $y=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$. 所以切点坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

26.【解】$F(x)=\int_0^{x^2}tf(x^2-t)\mathrm{d}t\xlongequal{u=x^2-t}\int_0^{x^2}(x^2-u)f(u)\mathrm{d}u=x^2\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u-\int_0^{x^2}uf(u)\mathrm{d}u$.

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u-\int_0^{x^2}uf(u)\mathrm{d}u}{x^n}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u}{nx^{n-2}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4xf(x^2)}{n\cdot(n-2)\cdot x^{n-3}}=\lim_{x\to0}\frac{4f(x^2)}{n\cdot(n-2)\cdot x^{n-4}}=\lim_{x\to0}\frac{8xf'(x^2)}{n\cdot(n-2)\cdot(n-4)x^{n-5}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{8f'(x^2)}{n\cdot(n-2)\cdot(n-4)x^{n-6}}.$$

由已知 $f'(0)=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^n}$ 存在得 $n=6$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8}{6\cdot4\cdot2}=\dfrac{1}{6}$.

27.【解】设过曲线上点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，因切线交 x 轴于 $(u,0)$，所以 $u=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，又点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线上任交点，所以 $u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

取 $f(u)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶泰勒展开式，有

$$f(u)=f(0)+f'(0)u+\frac{f''(\eta)}{2!}u^2,\quad 0<\eta<u,$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,\quad 0<\xi<x.$$

因 $f(0)=f'(0)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\dfrac{f''(\eta)}{2}u^2}{u\cdot\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u\cdot f''(\eta)}{x\cdot f''(\xi)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u}{x}$.

由 $u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{f(x)}{xf'(x)}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{xf'(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf''(x)}{xf''(x)+f'(x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{f''(x)+\dfrac{f'(x)}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}f''(x)}{\lim\limits_{x\to0}f''(x)+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}}=\frac{1}{2}.$$

28.【解】取 $y=1+\dfrac{\Delta x}{x}$，则由 $f(xy)=f(x)+f(y)+(x-1)(y-1)$ 得

$$f\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]=f(x)+f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)+(x-1)\left(1+\frac{\Delta x}{x}-1\right),$$

即 $f(x+\Delta x)=f(x)+f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)+\dfrac{(x-1)\Delta x}{x}$，则 $f(x+\Delta x)-f(x)=f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)+\dfrac{(x-1)\Delta x}{x}$.

所以有 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}\dfrac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}+1-\dfrac{1}{x}$.

因为$f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)$，所以$f(1)=0$，所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-1}=f'(1)=a$.

所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}+1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}a+1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{a-1}{x}+1$,

所以$f'(x)=\dfrac{a-1}{x}+1$.

29.【证明】证法一：设函数$f(x)=\ln x$.

由拉格朗日中值定理知：至少存在一点$\xi\in(a,b)$使$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}=\dfrac{1}{\xi}$.

由于$0<a<\xi<b$，故$\dfrac{1}{\xi}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$，从而$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$.

证法二：设$f(x)=(x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a)$，$(x>a>0)$.

因为$f'(x)=2x(\ln x-\ln a)+(x^2+a^2)\dfrac{1}{x}-2a=2x(\ln x-\ln a)+\dfrac{(x-a)^2}{x}>0$.

故$x>a$时，$f(x)$单调增加.

又$f(a)=0$，所以当$x>a$时，$f(x)>f(a)=0$，即$(x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a)>0$，从而当$b>a>0$时，有$(a^2+b^2)(\ln b-\ln a)-2a(b-a)>0$，即$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$.

30.【证明】分析一：令$\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，易知$\varphi(1)=0$，由于$\varphi'(x)=2x\ln x-x+2-\dfrac{1}{x}$，令$\varphi'(x)=0$得$x=1$. 因为$\varphi''(x)=2\ln x+1+\dfrac{1}{x^2}$，$\varphi''(1)=2>0$，所以函数在$x=1$处取得最小值. 又$\varphi'''(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x^3}$，当$0<x<1$时，$\varphi'''(x)<0$；当$1<x<+\infty$时，$\varphi'''(x)>0$，且$\varphi''(1)=2>0$.

从而推知$x\in(0,+\infty)$时，$\varphi''(x)>0$. 所以曲线$y=\varphi(x)$为上凹的. 函数$\varphi(x)$在$x=1$处取得的极小值即为函数的最小值.

故对一切$x\in(0,+\infty)$，$\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=0$，即$(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geqslant 0$，所以$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

分析二：由证法1已知$\varphi(1)=0$，$\varphi'(1)=0$，$\varphi''(1)=2$.

当$0<x<1$时，$\varphi'''(x)<0$，当$1<x<+\infty$时，$\varphi'''(x)>0$.

将$\varphi(x)$在$x=1$处展开成泰勒公式

$\varphi(x)=\varphi(1)+\varphi'(1)(x-1)+\dfrac{1}{2!}\varphi''(1)(x-1)^2+\dfrac{\varphi'''(\xi)}{3!}(x-1)^3=(x-1)^2+\dfrac{1}{6}\varphi'''(\xi)(x-1)^3$.

当$0<x<1$时，$x<\xi<1$；当$1<x<+\infty$时，$1<\xi<x$. 所以当$x>0$时，$\varphi(x)\geqslant 0$.

分析三：设$\varphi(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$，所以$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$（当$x>0$），

$\varphi(1)=0$，所以当$0<x<1$时，$\varphi(x)<0$；当$1<x<+\infty$时，$\varphi(x)>0$. 于是当$x>0$时，$(x^2-1)\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geqslant 0$，即$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

31.【证明】设$f(x)=\ln^2 x-\dfrac{1}{e}x$，所以$f'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2}{e}$，$f''(x)=2\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

令$f''(x)=0$则$\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$，所以有$x=e$. 当$x>e$时$f''(x)>0$；$x<e$时$f''(x)<0$，所以$f'(x)$在$x=e$时，取最大值. 所以对$\forall x>0$有$f'(0)<0$，所以对任意x有$f(x)$为减函数.

所以$\ln^2 b-\dfrac{b}{e}<\ln^2 a-\dfrac{a}{e}$，即$\ln^2 b-\ln^2 a<\dfrac{1}{e}(b-a)$.

32.【证明】$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$，所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，又因为$f(x)$连续，所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$.

$x>0$时，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2$，所以$f'(0)=2$. 又因为$f''(x)<0$，所以$f'(x)$递减.

所以有当$\xi>0$时，$f'(\xi)\leq f'(0)$，即$f'(\xi)\leq2$. 即$f'(\xi)x\leq2x$有$f(x)-f(0)\leq2x$，所以有$f(x)\leq2x$.

$x<0$时，取$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，所以$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，取$H(x)=xf'(x)-f(x)$.

有$H'(x)=f''(x)+f'(x)-f'(x)=f''(x)<0$，所以$H(x)$递减，又因为$H(0)=0$，所以$x<0$时，$H(x)>0$即$g'(x)>0$，所以$g(x)$递增. 又因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$，所以2为$g(x)$的最小值，$\frac{f(x)}{x}\geq2$，

所以$f(x)\leq2x(x<0)$，故$f(x)\leq2x$.

33.【证明】令$f(x)=(x-4)e^{\frac{x}{2}}-(x-2)e^x+2$，所以有$f(x)=[(x-2)e^{\frac{x}{2}}+2](-e^{\frac{x}{2}}+1)$. 取$g(x)=(x-2)e^{\frac{x}{2}}+2$，所以$g'(x)=e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}>0,(x>0)$，所以$g(x)$为单调递增的.

又因为$g(0)=0$，所以$g(x)>g(0)=0(x>0)$，又因为$x>0$，所以$-e^{\frac{x}{2}}+1<0$.

所以$f(x)=[(x-2)e^{\frac{x}{2}}+2](-e^{\frac{x}{2}}+1)<0$，所以$(x-4)e^{\frac{x}{2}}-(x-2)e^x+2<0$.

34.【证明】由中值定理，存在$\xi\in(0,x)$使得$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$，因为$f'(x)\geq k>0$，所以即有$f'(\xi)\geq k$，所以$f(x)\geq f(0)+kx$. 因为$x\to\infty$所以存在足够大的x_0使$f(x_0)>0$. 又因为$f(0)<0$，所以由介值定理可得存在$\xi\in(0,x_0)\subset(0,+\infty)$使$f(\xi)=0$，又因为$f'(x)\geq0$，所以$f(x)$为单调递增函数. 所以在$(0,+\infty)$上存在唯一$\xi$使$f(\xi)=0$.

35.【解】问题等价于方程$\ln^4x-4\ln x+4x-k=0$有几个不同实根问题.

令$\varphi(x)=\ln^4x-4\ln x+4x-k$，则$\varphi'(x)=\frac{4(\ln^3x-1+x)}{x}$，令$\varphi'(x)=0$得唯一驻点$x=1$.

当$0<x<1$时，$\varphi'(x)<0$，即$\varphi(x)$单调减少；当$x>1$时，$\varphi'(x)>0$，即$\varphi(x)$单调增加.

故$\varphi(1)=4-k$为函数$\varphi(x)$的最小值.

当$k<4$时，$\varphi(1)=4-k>0$，$\varphi(x)=0$无实根，两曲线无交点；

当$k=4$时，$\varphi(1)=0$，$\varphi(x)=0$有唯一实根，两曲线有唯一交点；

当$k>4$时，$\varphi(1)<0$，且$\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}[\ln x(\ln^3x-4)+4x-k]=+\infty$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln x(\ln^3x-4)+4x-k]=+\infty$.

故$\varphi(x)=0$有两实根分别位于$(0,1)$与$(1,+\infty)$内，即两曲线有两个交点.

36.【解】令$f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1$，$f'(x)=k-\frac{2}{x^3}$. 若$k\leq0$，则$f'(x)<0$，而$f(0^+)=+\infty$，$f(+\infty)<0$，所以当$x>0$时$f(x)=0$存在且仅有一个根；若$k>0$，由$f'(x)=0$解得唯一驻点$x_0=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$，又因$f''(x)>0$，故$f(x_0)=3(\frac{k}{2})^{\frac{2}{3}}-1$为最小值. 当$3(\frac{k}{2})^{\frac{2}{3}}>1$，即当$k>\frac{2\sqrt{3}}{9}$时，$f(x)>0$，$f(x)$无零点. 当$k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$时，$f(x)$存在唯一零点. 故当$k\leq0$或$k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$时，方程$kx+\frac{1}{x^2}=1$有且仅有一个根.

37.【解】考察函数$F(x)=e^{f(x)}\arctan x$，所以有$F(1)=e^{f(1)}\arctan1$，因为$f(1)=0$，所以$F(1)=\frac{\pi}{4}$.

又因为$\int_0^{\frac{2}{\pi}}e^{f(x)}\arctan x=\frac{1}{2}$，所以由积分中值定理在$(0,1)$上存在一点$x_1$使$e^{f(x_1)}\arctan x_1=\frac{\pi}{4}$，即$F(x_1)=\frac{\pi}{4}$. 因此由罗尔中值定理在$(x,1)$内存在$\xi$，使得$f'(\xi)=0$.

又因为$f'(\xi)=\frac{e^{f(\xi)}}{1+\xi^2}[(1+\xi^2)\arctan\xi\cdot f'(\xi)+1]=0$，因$\frac{e^{f(\xi)}}{1+\xi^2}\neq0$，

所以$(1+\xi^2)\arctan\xi\cdot f'(\xi)+1=0$，即$(1+\xi^2)\arctan\xi\cdot f'(\xi)=-1$.

38.【解】因为$f(x)$在$[a,b]$上一阶可导，$f'(a)\cdot f'(b)>0$不妨令$f'(a)>0$，$f'(b)>0$，并设$f(a)=f(b)=M$，因为$f'(a)>0$，$f'(b)>0$，所以存在$\delta>0$使$f(x)$在$(a,a+\delta)$，$(b-\delta,b)$内单调增加，即存在$x_1\in(a,a+\delta)$，$x_2\in(b-\delta,b)$使$f(x_1)>f(a)=M$，$f(x_2)<f(b)=M$，故由连续函数介值定理知，必存在$c\in(x_1,x_2)$使$f(c)=M$，即$f(a)=f(c)=f(b)$，又由罗尔定理知存在$\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$使$f'(\xi_1)=0=f'(\xi_2)$再次应用罗尔定理有存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$使$f''(\xi)=0$，得证.

39.【解】设直线方程为$g(x)=ax+b$，$f(x)$与$g(x)$的交点设为x_1,x_2,x_3不妨设$x_1<x_2<x_3$.
取$F(x)=f(x)-g(x)$，则$F(x_1)=F(x_2)=F(x_3)=0$. 且$F(x)$二阶可导，所以在(x_1,x_2)内至少存在一点ξ_1使$f'(\xi_1)=0$. 在(x_2,x_3)内至少存在一点ξ_2使$f'(\xi_2)=0$. 又因$F(x)$二阶可导，所以在(ξ_1,ξ_2)内至少存在一点ξ使$f''(\xi)=0$.

40.【解】反证法. 假设不存在点ξ介于$f(x)$的两个零点之间，使$g(\xi)=0$. 即对任何$x\in[a,b]$，$g(x)\neq0$.
构造函数$F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则$F'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.
因为$f(x)$在(a,b)内有2个零点，设为x_1,x_2，即$f(x_1)=f(x_2)=0$，所以$F(x_1)=F(x_2)=0$. 则在(x_1,x_2)内至少存在一点ξ使$f'(\xi)=0$. 但对任何$x\in(a,b)$，$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq0$，即$f'(x)\neq0$，所以有$f'(\xi)\neq0$因此矛盾，所以假设不成立. 所以至少存在一点ξ介于$f'(x)$的两个零点之间使$g(\xi)=0$.

41.【解】构造函数$\varphi(x)=f(x)e^{g(x)}$，则$\varphi'(x)=e^{g(x)}[f'(x)+f(x)g'(x)]$.
假设$f(x)$在(a,b)存在两个零点设为x_1,x_2即$f(x_1)=f(x_2)=0$，则有$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$.
则至少存在一点$\xi\in(x_1,x_2)$，使得$\varphi'(\xi)=0$. 因为$f'(x)+f(x)g'(x)\neq0$，所以对任意$x\in(a,b)$有$\varphi'(x)\neq0$，因此产生矛盾即假设不成立.
所以$f(x)$在(a,b)上至少存在一点零点.（特例：构造函数$\varphi(x)=f(x)e^x$）.

42.【解】因为$f(0)=f(1)=0$，$M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant1}f(x)>0$，$f(x)$在$[0,1]$上连续，所以在$(0,1)$上，某一点$x_0$可使得$f(x_0)=M$，所以$f'(x_0)=0$. 又因为$f(x_0)-f(0)=f'(\xi_1)(x_0-0)(0<\xi<1)$，且$f(0)=0$，所以$f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}=\dfrac{M}{x_0}>M$，所以在$(0,1)$内至少存在一点$\xi$使得$f'(\xi)=M$.
同理可证：在$(0,1)$上存在点η，使得$f'(\eta)=M$.

43.【解】因$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$，所以等式左端$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x+f(x)+xf'(x)}{3x^2}$，所以$\lim\limits_{x\to0}[\cos x+f(x)-xf'(x)]=0$，
即$1+f(0)=0$，故$f(0)=-1$. 又因原式左端$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x+f'(x)+f'(x)+xf''(x)}{6x}=0$，所以
$\lim\limits_{x\to0}[-\sin x+2f'(x)+xf''(x)]=0$，即$f'(0)=0$. 又$\lim\limits_{x\to0}-\dfrac{\sin x}{6x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2f'(x)}{6x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{6}=0$，即
$-\dfrac{1}{6}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2f''(x)}{6}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{6}=0$，所以$-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}f''(0)+\dfrac{1}{6}f''(0)=0$，故$f''(0)=\dfrac{1}{3}$.
注：本题也可将$\sin x$与$f(x)$用佩亚诺余项泰勒公式展开至$o(x^3)$再计算便得，此法更方便.

44.【证明】因$f(x)$在$[a,b]$上存在二阶导数，所以$f(x)$在$[a,b]$上可取最值. 不妨设在x_0点有最小值$f(x_0)=M$，所有$f'(x_0)=0$. 又由泰勒展开式得，存在点$\xi\in[a,b]$有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x_0-x)^2=f(x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2,$$

两端分别从a到b积分有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x_0)\mathrm{d}x+\int_a^b\dfrac{f''(\xi)}{2}\mathrm{d}x\cdot\int_a^b(x-x_0)^2\mathrm{d}x$

由题设知$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，可知$f(x)$在$[a,b]$上既有正值又有负值，即$f(x_0)<0$.

而$\int_a^b[f(x_0)+\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x_0)\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b(x-x_0)^2\mathrm{d}x$.

其中$\int_a^b f(x_0)\mathrm{d}x < 0$，$\int_a^b (x-x_0)^2\mathrm{d}x > 0$，故必有$f''(\xi) > 0$，得证.

45.【证明】构造函数$F(x) = xf(x)$，$G(x) = \frac{1}{x}$，由柯西定理存在$\xi \in (a,b)$有$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$，

则$\frac{bf(b)-af(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}}$，即$\frac{bf(b)-af(a)}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \xi^2[f(\xi)+\xi f'(\xi)]$，

整理得$\frac{ab}{b-a}[bf(b)-af(a)] = \xi^2[f(\xi)+\xi f'(\xi)]$.

第三章　一元函数积分学

一、选择题

1.【解】对于①,任意常数 a,$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数.

$\Rightarrow$ 因为 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x = 0.$
则有 $f(-x)+f(x)=0$,$f(-x)=-f(x)$,即 $f(x)$ 为奇函数.
$\Leftarrow f(x)$ 为奇函数,$f(-x)=-f(x)$.
$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x = 0.$

对于②,$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)$ 为偶函数.

$\Rightarrow$ 因为 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$. 故 $f(-x)+f(x) = 2f(x) \Rightarrow f(-x)=f(x)$.

$\Leftarrow f(x)$ 为偶函数,$f(-x)=f(x)$. 则有 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

对于③ $\Rightarrow \int_{a}^{a+w} f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关,$w>0$,知 $\int_{a}^{a+w} f(x)+\mathrm{d}x = k$(常数).

则 $(\int_{a}^{a+w} f(x)\mathrm{d}x)'_a = f(a+w)-f(a) = 0$. 可得 $f(x)$ 有周期 w.

$\Leftarrow f(x)$ 有周期 w,则 $f(a+w)=f(a)$. $(\int_{a}^{a+w} f(x)\mathrm{d}x)'_a = f(a+w)-f(a)=0$,说明 $\int_{a}^{a+w} f(x)\mathrm{d}x = k$,
即值与 a 无关.

对于④,设 $f(x)$ 为 w 的周期函数,则 $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

$F(x+w) = \int_{0}^{x+w} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x}^{x+w} f(t)\mathrm{d}t$,由于 $f(x+w)=f(x)$,

$(\int_{x}^{x+w} f(t)\mathrm{d}t)'_x = f(x+w)-f(x) = 0$. 故 $\int_{x}^{x+w} f(t)\mathrm{d}t$ 与 x 无关.

令 $x=0$,则有 $\int_{x}^{x+w} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{w} f(t)\mathrm{d}t$,

于是 $F(x+w) = \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x}^{x+w} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{w} f(t)\mathrm{d}t = F(x) + \int_{0}^{w} f(t)\mathrm{d}t$,

即 $F(x+w) - F(x) = \int_{0}^{w} f(t)\mathrm{d}t$.

从而推知若 $F(x)$ 为周期函数 w. 则 $\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 以 w 为周期函数 $\Leftrightarrow \int_{0}^{w} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

故④错误. ①②③正确. 答案选 B.

2.【解】对于 A,因为 $f(x+T)=f(x)$,故 $f'(x+T)=f'(x)$. 所以 $f'(x)$ 以 T 为周期.

对于 B,不妨令 $f(x)=\cos^2 x$,周期为 π,则 $\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$,

不是周期函数,故 B 错误.

对于 C,令 $F(x) = \int_{0}^{x} [f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$. 则 $F(x+t) = \int_{0}^{x+T} [f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$

$$= \int_{0}^{x} [f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t + \int_{x}^{x+T} [f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t.$$