前言

解析几何是理工科高校、师范院校中许多专业开设的一门重要的数学基础课。由于其内容多，公式多，抽象概念多，学生对这门课程内容的理解往往浮于表面。为了提高学习的效果，帮助广大读者学好这门课程，编者根据多年积累的教学经验，按照全国综合大学和师范院校对数学类专业教学的基本要求，编写了这本解析几何课程教学与学习指导参考书。

全书共六章。每章由重点内容提要、学习基本要求、考核知识点、典型例题精选、课后习题全解、学习效果测试题六部分组成。**重点内容提要部分**给出了本章内容的简要总结，以帮助读者抓住要点，提高学习效果。**学习基本要求部分**给出了本章的学习目的与要求，以及通过学习所要达到的能力层次，以便做到心中有数，有的放矢。**考核知识点部分**给出了本章的重点内容，关键的方法和技巧，使学生在学习中重点突出，掌握解题的技巧和方法。**典型例题精选部分**给出了一些具有代表性题目的详细解答，并注重于分析解题思路，提示解题规律。**学习效果测试题部分**主要汇编了能反映本章具体要求的一些检测题目，并给出了答案，读者可在自我测试的基础上，对照参考。课后习题全解，主要对吕林根等编写的《解析几何》（第三版）教材中的习题做了比较详细的解答。对超出基本要求的习题（加“*”号）也予以解答，供某些专业和读者参考。该教材是获奖的全国优秀教材，且由高等教育出版社出版，被许多高校采用。在解答课后习题的过程中，编者给出每题一种解法或证法，而且使解答结果尽量与教材后的习题答案保持一致。其实不少

题目有多种解答，其结果也有不同的表达方式，读者不要局限于此书的解答及教材后的习题答案。编写这一部分的目的是使读者能在独立思考完成练习的基础上进行对照参考。编者的愿望是想给读者提供一本与同名课程教学相配套的辅助参考资料，使读者通过阅读本书，能对解析几何的理论和方法有更加深入的理解。

由于编者水平有限，书中难免存在缺点或疏漏之处，敬请读者指教。

编　者

2007 年 4 月于西北工业大学

目　录

第 1 章　矢量与坐标

1.1　重点内容提要

1. 平面仿射坐标系

由一定点 O 和两个不平行的矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 构成平面上的几何标架，记为 $\sigma=[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$.

在平面仿射坐标系 σ 下，该平面上的点 P 可以表示为 $P(x,y)$. 在 σ 下，该平面上的矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，或者 $\boldsymbol{a}=(x,y)$.

2. 空间仿射坐标系

由一定点 O 和三个不共面的矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3$ 构成了空间的几何标架，记为 $\sigma=[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$.

在空间仿射坐标系 σ 下，空间的点 P 可以表示为 $P(x,y,z)$. 在 σ 下，空间的矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$，或者 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$.

3. 平面直角坐标系

当仿射坐标系 $\sigma=[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$ 中的 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 是互相垂直的单位矢量时，该坐标系称平面直角坐标系，或者称为笛卡尔坐标系. 这里我们选择的是右手系，并且记为 $\sigma=[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]$.

4. 空间直角坐标系

当仿射坐标系 $\sigma=[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 中的坐标矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是互相垂直的单位矢量时，该坐标系称为空间直角坐标系，这里选择右手系，并且记为 $\sigma=[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$.

5. 矢量的概念

矢量又称为向量. 矢量既有大小，又有方向. 矢量的几何表示是有向线段，矢量的代数表示是在坐标系 σ 下的分量表示，即 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$.

矢量的大小称为矢量的模. 矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\boldsymbol{a}|$.

在空间直角坐标系下，矢量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 的模 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向是由方向角 α,β,γ 来表示，这里方向角的余弦称为方向余弦，即

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

其中 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$.

与方向余弦成比例的数称为矢量的方向数. 所以矢量 $\boldsymbol{a}$ 的分量 x,y,z 也是一组方向数.

6. 矢量的加法和数乘运算

矢量的加法和数乘运算是矢量运算的基础.

矢量加法运算的几何表示分为平行四边形法则，三角形法则，以及多边形法则. 矢量加法运算的代数表示是三维有序数组的分维运算的合成.

矢量减法运算是引入负矢量的加法运算，如图 1.1 所示.

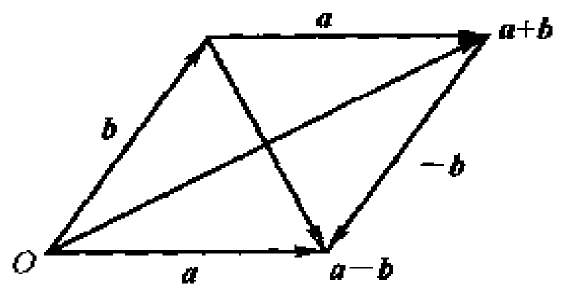

图 1.1

数乘矢量的运算 $\lambda\boldsymbol{a}$，λ 为实数. λ 分别为正实数，负实数和零时，对应的 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的几何意义是重要的概念. $\lambda\boldsymbol{a}$ 的代数运算是三维数组的分维数量相乘运算.

矢量的加法和数乘运算又统称为矢量的线性运算，它们满足以下八条运算规律：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$　　(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$

(5) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$　　(6) $\lambda(\mu)\boldsymbol{a}=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

(7) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$　　(8) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

有了以上八条运算规律，使得矢量的线性运算具有完备性.

7. 矢量之间的线性关系

矢量共线、共面的位置关系可以通过矢量之间的线性关系表示. 有以下的重要结论：

(1) 两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线（又称之为平行）的充要条件是存在一个实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

(2) 两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在不全为零的实数 λ,μ，使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

(3) 三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是存在两个实数 m,n，使得

$$\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$$

(4) 三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是存在三个不全为零的实数 m,n,p，使得

$$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

矢量的线性关系有重要的理论和应用价值. 所有的共线矢量都可以由其中一个非零矢量唯一地线性表示. 一组共面矢量(个数大于等于 3) 中的任意一个矢量都可以由其中两个不共线的矢量唯一地线性表示.

8. 两矢量的数性积

两矢量的数性积有以下的定义(或称算法)：

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$　(这里 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 称为 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的射影)

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$

其中 $\boldsymbol{a}=(X_1,Y_1,Z_1)$，$\boldsymbol{b}=(X_2,Y_2,Z_2)$.

两个矢量的数性积是一个实数，又称点积，它是 n 维矢量内积的特例.

两矢量的数性积有重要应用：

(1) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$　　(2) $\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

(3) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$　($\boldsymbol{a}$ 非零矢量)　　(4) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

9. 两矢量的矢性积

两矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的乘积结果是一个新的矢量，记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的矢性积. 两矢量的矢性积有以下的定义(或称算法)：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

其中 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，并且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 呈右手系.

$$(2)\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{a}=(X_1,Y_1,Z_1)$，$\boldsymbol{b}=(X_2,Y_2,Z_2)$.

两矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的矢性积的运算规律中有一项与数性积不同，即交换律不成立，有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

这是由于定义中规定的右手系确定矢性积的方向.

两矢量的矢性积有以下的应用：

(1) 以两矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形和三角形的面积分别为

$$S_{\square}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$$

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$$

(2) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

10. 三矢量的混合积

三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积定义：先进行矢性积，后作数性积，即

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 有规定的顺序.

三矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积有下述性质：

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$

三矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积可以用下式计算：

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{a}=(X_1,Y_1,Z_1)$，$\boldsymbol{b}=(X_2,Y_2,Z_2)$，$\boldsymbol{c}=(X_3,Y_3,Z_3)$.

三矢量的混合积的应用：

(1) 以三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体和四面体的体积分别为

$$V_6=|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|=\left\|\begin{matrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{matrix}\right\|$$

和

$$V_4=\frac{1}{6}|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{matrix}\right\|$$

(2) 三矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$

(3) 空间四个点 $p_i(x_i,y_i,z_i)$，$(i=1,2,3,4)$ 共面的充要条件是四阶行

列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

1.2　学习基本要求

(1) 理解仿射坐标系的概念,掌握建立仿射坐标系方法.理解仿射坐标系和直角坐标系之间关系,能判别仿射坐标系是右手系.

(2) 理解矢量的概念,掌握矢量的几何表示和代数表示,以及矢量大小和方向的计算.

(3) 理解矢量加法和数乘运算的规则,掌握几何运算法则和相应的分量计算的方法.

(4) 理解矢量共线、共面的概念,掌握判断两矢量共线,三矢量共面的方法.

(5) 理解矢量的数性积、矢性积以及混合积的概念,掌握计算它们的多种方法.了解矢量的数性积、矢性积、混合积在几何中和物理中的应用.知道矢量的双重矢性积等概念.

1.3　考核知识点

(1) 建立仿射坐标系,以及在仿射坐标系下空间点的坐标表示,矢量的分量表示.

(2) 在直角坐标系下,两点之间的距离公式和线段定比分点公式,以及简单几何图形的方程.

(3) 在仿射坐标系下,两矢量 $\boldsymbol{a}=(X_1,Y_1,Z_1)$ 与 $\boldsymbol{b}=(X_2,Y_2,Z_2)$ 共线的充要条件为

$$X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2$$

三矢量 $\boldsymbol{a}=(X_1,Y_1,Z_1)$,$\boldsymbol{b}=(X_2,Y_2,Z_2)$,以及 $\boldsymbol{c}=(X_3,Y_3,Z_3)$ 共面的充要条件为

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$$

(4) 矢量的数性积、矢性积以及混合积的几何定义：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c},\quad |\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，　$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 呈右手系

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

(5) 在直角坐标系下，矢量的数性积、矢性积、混合积的分量表达式为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

(6) 在直角坐标系下，矢量的数性积、矢性积、混合积的应用.其中包括矢量在一有向数轴上的投影，平行四边形和三角形的面积，以及空间的四面体和平行六面体的体积等.

(7) 两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$，两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

(8) 矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模和方向余弦的计算.

(9) 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的计算.

1.4　典型例题精选

例 1.1　由四面体 $OABC$（见图 1.2）构成了一个空间仿射坐标系 $\{O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$，设点 D 为边 AB 的中点，求点 D 和矢量 $\overrightarrow{CD}$ 在该仿射坐标系下的坐标.

解　由图 1.2 可知

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$$

故点 D 的坐标为$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$. 又由

$$\overrightarrow{OC}=(0,0,1)$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)-(0,0,1)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$$

故矢量$\overrightarrow{CD}$ 的坐标为$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$.

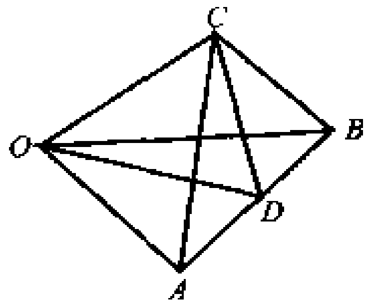

图　1.2

例 1.2　在空间仿射坐标系$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$下,已知矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_1$,试判断(1) 矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是否共面?(2) 矢量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ 是否共面?

解　(1) 由矢量共面的充要条件,可设

$$m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

其中 m,n,p 为待定常数. 将 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_1$ 代人上式,可得

$$(m+p)\boldsymbol{e}_1+(m+n)\boldsymbol{e}_2+(n+p)\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}$$

因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是坐标矢量,所以有

$$\begin{cases}m+p=0\\m+n=0\\n+p=0\end{cases}$$

这是一个三元一次方程组,根据方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

可以得到结论,即 $m=n=p=0$,所以矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面.

(2) 设　$$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+\gamma(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

其中 λ,μ,γ 为特定常数. 上式整理为

$$(\lambda-\gamma)\boldsymbol{a}+(\mu-\lambda)\boldsymbol{b}+(\gamma-\mu)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

由(1) 可知矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面,所以有

$$\begin{cases}\lambda-\gamma=0\\\mu-\lambda=0\\\gamma-\mu=0\end{cases}$$

根据上面方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

可知三元一次方程组有非零解，例如$\lambda=\mu=\gamma=1$满足方程组，所以矢量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$是共面的.

例 1.3 已知矢量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，它们的模分别为1和3，且夹角为$\frac{\pi}{3}$，求$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$以及$|3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$.

解 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

$$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=$$

$$1+9+3=13$$

所以，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$.

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$$

$$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=$$

$$1+9-3=7$$

所以，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.

$$|3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=(3\boldsymbol{a})^2+(2\boldsymbol{b})^2+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$$

$$9|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2+12|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=$$

$$9+36+18=63$$

所以，$|3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{63}$.

例 1.4 已知一径矢$\overrightarrow{OP}$的方向角分别为$\alpha,2\alpha,3\alpha$，求证该径矢必在一个坐标面内.

证 由于方向角取值是在0到π之间，所以要证明径矢$\overrightarrow{OP}$在一个坐标面内，即要证明这三个方向角$\alpha,2\alpha,3\alpha$必有一个等于$\frac{\pi}{2}$.

由于方向余弦满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\cos^2 3\alpha=1$$

将三角函数恒等式

$$\cos 3\alpha=\cos\alpha-2\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

代入上式，经计算整理后，得

$$8\cos^6\alpha-10\cos^4\alpha+3\cos^2\alpha=0$$

由上面的方程可以得到三组解：

$$\cos\alpha_1 = 0,\quad \cos\alpha_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\alpha_3 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

根据径矢的方向角的取值范围，可以推知

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2},\quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4},\quad \text{故 } 2\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{6},\quad \text{故 } 3\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$$

所以径矢$\overrightarrow{OP}$必在一个坐标面内.

例 1.5　求同时垂直于矢量 $\boldsymbol{a} = (1,1,1)$，和矢量 $\boldsymbol{b} = (1,0,-1)$ 的矢量的方向余弦.

解　设所求的矢量 $\boldsymbol{c} = (X,Y,Z)$.

解法 1　由题设可得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = 0 \quad \text{和} \quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 0$$

得到关于 X,Y,Z 的两个方程，即

$$\begin{cases} X+Y+Z=0 \\ X-Z=0 \end{cases}$$

由上面的方程组可以得到

$$X : Y : Z = 1 : -2 : 1$$

所以矢量 $\boldsymbol{c} = k(1,-2,1)$，其中 k 不为零.

由于矢量 $\boldsymbol{c}$ 的方向余弦就是矢量 $\boldsymbol{c}$ 的单位矢量的分量，所以有

$$\boldsymbol{c}^\circ = \frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$$

因此，所求的矢量 $\boldsymbol{c}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \cos\beta = \pm\frac{-2}{\sqrt{6}},\quad \cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

解法 2　利用矢量的矢性积来计算.

由矢量的矢性积的定义，可以知道所求的矢量

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,2,-1)$$

由共线矢量的定义，可以取矢量 $\boldsymbol{c} = \pm(1,-2,1)$. 对应的方向余弦的求法同解法 1.

例 1.6 求证由空间四点 $A(5,2,-1)$,$B(1,-3,4)$,$C(-2,1,3)$ 及 $D(2,6,-2)$ 构成一个平行四边形,并求其面积.

证 由点 A 到点 B 构成的矢量为

$$\overrightarrow{AB}=(1,-3,4)-(5,2,-1)=(-4,-5,5)$$

由点 C 到点 D 构成的矢量为

$$\overrightarrow{CD}=(2,6,-2)-(-2,1,3)=(4,5,-5)$$

可以看出 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$,并且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$.

容易验证点 A,B,C 不共线.所以点 A,B,C,D 构成一个平行四边形.该平行四边形的面积可以表示为

$$S_{\square ABCD}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -4 & -5 & 5\\ -7 & -1 & 4\end{matrix}\right\|=$$

$$|-15\boldsymbol{i}-19\boldsymbol{j}-31\boldsymbol{k}|=\sqrt{225+361+961}=\sqrt{1\,547}$$

故该平行四边形的面积为 $\sqrt{1\,547}$.

例 1.7 在直角坐标系下,已知四点 $A(0,0,0)$,$B(1,1,0)$,$C(2,0,2)$,以及 $D(3,4,2)$,判别这四点是否共面?如果不共面,试求由四点为顶点构成的四面体的顶点 D 所引出的高的长.

解 由三矢量共面的条件,可以给出空间四点 A,B,C,D 共面的判别方法为

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}=-6\neq 0$$

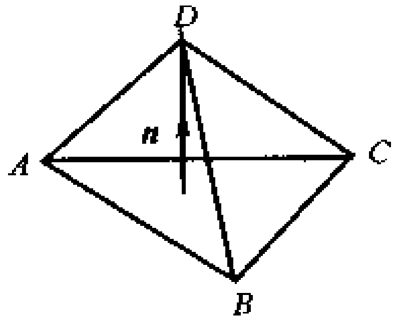

图 1.3

故可以判定该四点 A,B,C,D 不共面.

由顶点 D 所引出的四面体的高可以看做是矢量 $\overrightarrow{AD}$ 在底面 ABC 的垂线上的投影(见图 1.3).因此,顶点 D 对应的高可以表示为

$$h_D=|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}^{\circ}|=\left|\overrightarrow{AD}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}\right|=$$

$$\frac{|(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})|}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

由上面的计算过程可以看出顶点 D 所引出的高 h_D 也可以看成是平行六面体的体积与底面的平行四边形面积之商.

例 1.8　设非零矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,求证 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})))=\boldsymbol{a}^4\boldsymbol{b}$

证　根据矢量的矢性积定义得 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,/\!/\,\boldsymbol{b}$,如图 1.4 所示.可设

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{b}$$

由恒等式

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

可以推出

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以有

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$$

又有

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))=-\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

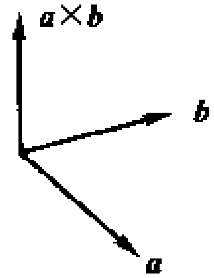

图　1.4

故有

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})))=-\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))=$$
$$-\boldsymbol{a}^2[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}^4\boldsymbol{b}$$

1.5　课后习题全解

§1.1　习题

1. 下列情形中矢量的终点各构成什么图形?

(1) 把空间中一切单位矢量归结到共同的始点;

(2) 把平行于某一平面的一切单位矢量归结到共同的始点;

(3) 把平行于某一直线的一切矢量归结到共同的始点;

(4) 把平行于某一直线的一切单位矢量归结到共同的始点.

解　(1) 单位球面;(2) 单位圆;(3) 直线;(4) 相距为 2 的两个点.

2. 设点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心,如图 1.5 所示,在矢量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{FA}$ 中,哪些矢量是相等的?

解　$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{EF}$,　$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{FA}$,　$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BC}$,　$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CD}$,　$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{DE}$

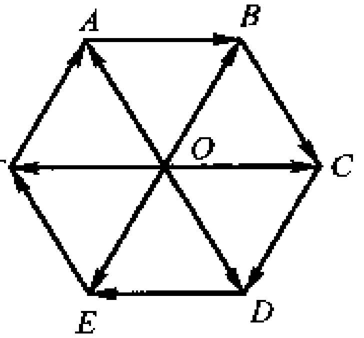

图　1.5

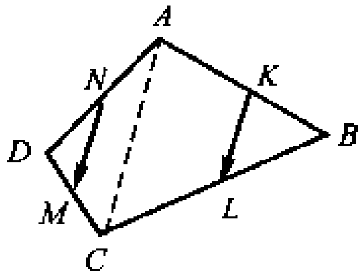

图　1.6

3. 设在平面上给了一个四边形 $ABCD$，如图 1.6 所示，点 K,L,M,N 分别是边 AB,BC,CD,DA 的中点，求证：$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$. 当 $ABCD$ 是空间四边形时，这等式是否也成立？

证明　在三角形 ADC 中，由题设知，NM 为其中位线.

故
$$\overrightarrow{NM}\parallel\overrightarrow{AC}\text{ 且 }|\overrightarrow{NM}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$$

同理，KL 为 $\triangle ABC$ 的中位线，有 $\overrightarrow{KL}\parallel\overrightarrow{AC}$.

且
$$|\overrightarrow{KL}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$$

所以 $\overrightarrow{NM}\parallel\overrightarrow{KL}$，$|\overrightarrow{NM}|=|\overrightarrow{KL}|$，且 $\overrightarrow{NM}$ 与 $\overrightarrow{KL}$ 方向相同.

由两个矢量相等的定义，有 $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$ 得证.

当 $ABCD$ 是空间四边形时，显然该等式也成立.

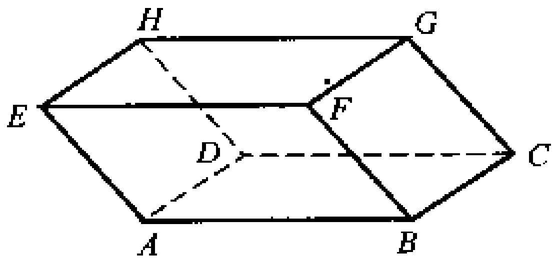

图　1.7

4. 设 $ABCD\text{-}EFGH$ 是一个平行六面体，如图 1.7 所示，在下列各对矢量中，找出相等的矢量和互为反矢量的矢量：

(1) $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$；(2) $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CG}$；(3) $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{EG}$；(4) $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{GF}$；(5) $\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CH}$.

解　相等的矢量有(2)，(3)，(5)；互为反矢量的矢量有(1)，(4).

5. 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 分别是三棱台 $ABC—A'B'C'$ 的上、下底面，如图

1.8 所示，试在矢量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{B'C'}$，$\overrightarrow{C'A'}$，$\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{CC'}$中找出共线矢量和共面矢量.

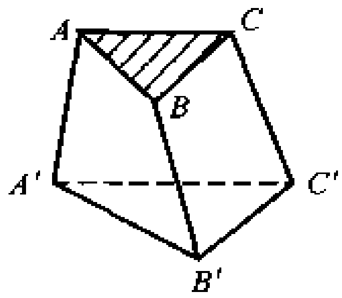

图　1.8

解　共线矢量为$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{A'B'}$；$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{B'C'}$；$\overrightarrow{CA}$与$\overrightarrow{C'A'}$；

共面矢量为$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{B'C'}$与$\overrightarrow{C'A'}$；

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{AA'}$与$\overrightarrow{BB'}$；$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{B'C'}$，$\overrightarrow{BB'}$与$\overrightarrow{CC'}$；

$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{C'A'}$，$\overrightarrow{CC'}$与$\overrightarrow{AA'}$；

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{A'B'}$与$\overrightarrow{CC'}$；$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{B'C'}$与$\overrightarrow{AA'}$；$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{C'A'}$与$\overrightarrow{BB'}$.

§1.3　习题

1. 要使下列各式成立，矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 应满足什么条件？

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；　(4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

(5) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$.

解　由矢量加法与矢量减法的几何作图法可以得出各式成立满足的条件：

(1) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　(2) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向　(3) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向且 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$

(4) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向　(5) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向且 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$

2. 试解下列各题：

(1) 化简 $(x-y)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(x+y)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

(2) 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$；

(3) 从矢量方程组 $\begin{cases}3\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\\2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases}$ 解出矢量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$.

解　(1) $(x-y)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(x+y)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$

$$x\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}-y\boldsymbol{a}-y\boldsymbol{b}-(x\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{a}-y\boldsymbol{b})=2x\boldsymbol{b}-2y\boldsymbol{a}$$

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)+(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)-(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)=-2\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$

$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=3(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)-2(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)=-3\boldsymbol{e}_1+10\boldsymbol{e}_2-7\boldsymbol{e}_3$

(3) 用 2 乘以第一个方程的两边，得　$6\boldsymbol{x}+8\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{a}$

用 3 乘以第二个方程的两边，得　$6\boldsymbol{x}-9\boldsymbol{y}=3\boldsymbol{b}$

将两个新方程两边分别相减，有　$17\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$

得 $\boldsymbol{y}=\frac{2}{17}\boldsymbol{a}-\frac{3}{17}\boldsymbol{b}$，将 $\boldsymbol{y}$ 代入 $2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ 得 $\boldsymbol{x}=\frac{3}{17}\boldsymbol{a}+\frac{4}{17}\boldsymbol{b}$.